HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|---|---|
| Title | 日射による積雪の内部融触 |
| Author(s) | 吉田, 順五 |
| Citation | 低温科學. 物理篇, 19, 97-110 |
| Issue Date | 1960-12-10 |
| Doc URL | http://hdl.handle.net/2115/17969 |
| Type | bulletin (article) |
| File Information | 19_p97-110.pdf |

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Zyungo YOSIDA 1960 Internal Melting of Snow due to the Penetrating Sunlight. *Low Temperature Science, Ser. A, 19.* (With English résumé p. 107)

# 日射による積雪の内部融解*

吉田順五
(低温科学研究所　応用物理部門)

(昭和35年7月受理)

## I. 積雪の内部融解現象

積雪に日があたると，投射日光の大部分（普通70～80%ぐらい）は表面で反射される。そして，わずかの残りが積雪の内部にはいつて吸収され，熱となる。この熱は，量としては多くないが，積雪自体が熱をつたえにくいものなので，時間がたつとともにしだいに積雪内に蓄積される。それで，はじめ積雪の温度が0°C以下であり，また，気温も0°C以下に保たれたままであるとしても，積雪表面のしたある深さの雪層の温度が0°Cに達し，そこで部分的な融解がおこり雪がしめることがある。図版I-1の写真は，この内部融解をおこした積雪の組織である。アニリン法[1]で，積雪の表面から3cmの深さまでを，鉛直に，厚さ0.4mmの薄片につくつた。薄片の各小部分を顕微鏡で写真にとり，つぎあわせたのがこの写真である。前夜10cmほど新雪がつもり，午後になつても気温は−1.2°C以上にはならなかつたが，うす日がさした。その結果，この写真のような内部融解がおこつたのである。写真の上端0印のところが積雪表面である。表面から2cmの深さまでは，ほとんどふつてきた雪の結晶の集合そのままで，融解した形跡はない（このときの雪の結晶は，雲粒のついた不規則結晶であつた)。しかし，深さ2cmから下では，雪は大きな氷の粒がつらなりあつた組織を示している。このあたりでは，雪が部分的に融解して湿り，いくつかの雪の結晶が，水の表面張力による引力のために集合して大きな氷の粒となつた。それを，薄片にするときに凍結させたので，写真にみるような組織になつたのである。実際に，この同じ積雪から，つもつたままの状態で，試料をとり，結合熱量計[2]で含水率を測定したところ，表面の2cmの厚さの雪層は含水率0%であつたのにたいし，2cm以下10cmあたりまでは，含水率が10%をこえ，最大18%にも達していた。第1図に，その日の天空状態，気温の変化とともに，積雪の含水率の時間的変化が示してある。(12時ごろ日射が一時つよくなつた。そのため，表面層も12時には2%の含水率を示したが，それ以外のときは，すべて0%の含水率であつた)。

積雪の内部融解はしばしば指摘もされ，de Quervain[3]，Hoeck[4]の記述もあるが，たちいつた研究はまだ行なわれていないようである。内部融解がひどくなれば，積雪が非常な変質をうけることはいうまでもない。軽い内部融解でも，積雪の組織変化を促進するであろう。図版

* 北海道大学低温科学研究所業績　第560号

I-2の写真は，積雪をたてに，2 cmほどの厚さに切つて，すかして見たところである。積雪が厚さ1～2 cmほどの，組織がすこしづつちがう層からなることを示している。この層状構造は，つもつた雪の結晶のちがい，つもるときの天候のちがいなどにもよるが，つもつたあとでおこる内部融解によつても作られるにちがいない。

簡単な条件を仮定すれば，内部融解の問題は熱伝導理論であつかえる。はじめ，積雪全体が一様に，0°C以下のある温度にあるところへ，一定の強さの日射があたりはじめたとき，どれほどの時間ののち，どれほどの深さで内部融解がはじまるかを，熱伝導論によつて，次の節で考察する。気温はのぼらず，したがつて，積雪も，その表面だけは始めとおなじ0°C以下の温度にたもたれているとする。もとより，実際には，このような簡単な条件が実現することはほとんどない。しかし，このようなばあいのことがわかつていれば，実際の内部融解を研究するうえに，いろいろと役にたつであろう。

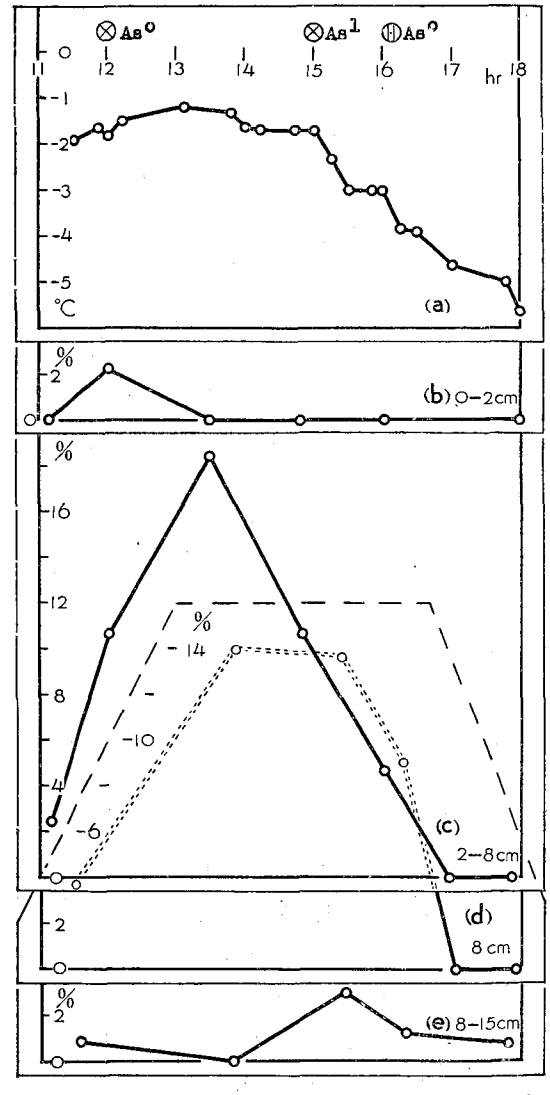
## II. 内部融解の熱伝導理論

積雪表面に強さ$I_0$の日射があたつているとき，積雪内部での日光の強さ$I$を，表面からいろいろな深さで測定すると

$$I = I_0(1-r)e^{-aX} \qquad (1)$$

の関係がみいだされる。$r$は積雪表面の反射率，$X$は，積雪表面から鉛直下むきにはかつた距離である。$I$は，この式にしたがつて$X$の増大とともに減少し，常数$a$が大きいほどその減少のどあいがはげしい。

常数$a$の値は雪に固有なもので，密度




**第1図** 気温と積雪含水率との変化。(昭和35年3月8日11時から18時まで。無風。札幌市北海道大学低温科学研究所の庭)。最上段(a)は天空状態と積雪表面にごく近いところではかつた気温。第2段(b)以下は，積雪表面下いろいろな深さでの積雪含水率である。(b)積雪表面の厚さ2 cmの層。(c)深さ2 cm～8 cmのあいだの積雪層。(d)深さ8 cmのところ。(e)深さ8 cm～15 cmのあいだの積雪層。(15 cmより深いところでの含水率は，つねに，0であつた。16時には，深さ2 cm～8 cmの層が，その上部から凍りはじめた)。

その他の雪の性質によつてさだまる。雪の密度，雪の粒径と $a$ との関係については大浦の研究がある[5]。積雪表面での日射の反射係数 $r$ もまた，雪の性質によつて定まる常数である。この $r$ と $a$ との値が知られれば，深さ $X$ において単位時間に単位体積の雪によつて吸収されて熱となる光の量は

$$a(1-r)I_0e^{-aX} \tag{2}$$

によつて与えられる[6]。簡単のため

$$A = a(1-r)I_0 \tag{3}$$

とする。

雪の熱伝導率も雪の性質で定まる常数であるが，それを $k$ であらわそう。すると，積雪内部の温度 $U(X,\ T)$ は，吸収日光による発熱の項 $Ae^{-aX}$ をふくむつぎの熱伝導微分方程式

$$c\rho\frac{\partial U}{\partial T} = k\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + Ae^{-aX} \tag{4}$$

をみたさなければならない。$c$ は氷の比熱，$\rho$ は雪の密度，$T$ は時間である。さて，温度 $U$ は 0℃ 以下の，積雪のはじめの温度を 0 としてはかることにしよう。そして，0℃ を $U_0$ で表わすことにする。すると，前節の終りでのべた問題の解答は，初期条件として "$T=0$ では $U=0$"，境界条件として "$X=0$ でつねに $U=0$" の条件をみたす (4) 式の解であたえられる。なお，雪は，$X=0$ から $X=\infty$ までつづいていると仮定する。積雪がある程度以上に厚ければ，この仮定は近似的に許される。

$$\frac{a^2k}{c\rho}T = t,\quad aX = x,\quad \frac{a^2k}{A}U = u \tag{5}$$

によつて，変数 $T$，$X$，$U$ を無次元の換算時間 $t$，換算距離 $x$，換算温度 $u$ にかえると，上の微分方程式と初期条件，境界条件とは

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-x} \tag{6}$$

$$(u)_{t=0} = 0,\quad (u)_{x=0} = 0 \tag{7}$$

となる。換算量についてまず解 $u(x,\ t)$ をもとめ，その解において換算量をもとの変数 $X$，$T$，$U$ に変換することにすると，一般性があつて便利である。さて，(7) 式の条件をみたす (6) 式の解は

$$\begin{aligned} u &= u(x,\ t) \\ &= (1-e^{-x}) - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2}e^{t-x}\left\{1-\Phi\left(\sqrt{t}-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\} \\ &\qquad - \frac{1}{2}e^{t+x}\left\{1-\Phi\left(\sqrt{t}+\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

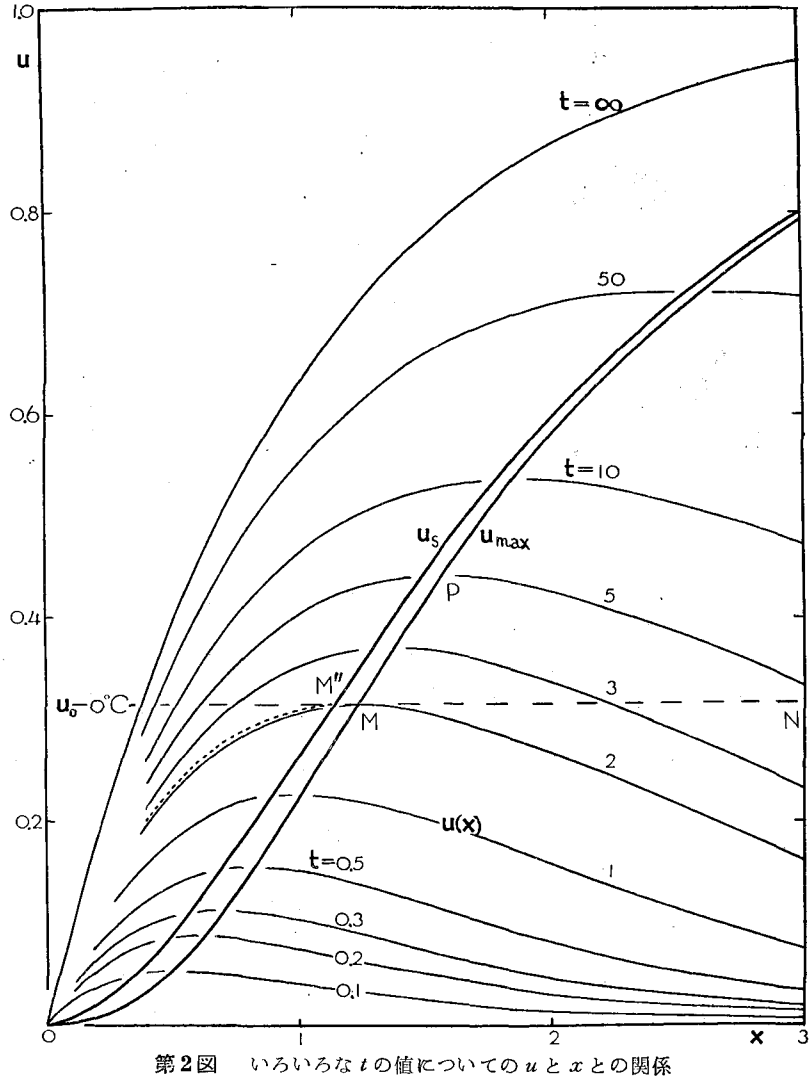
であることが知られている。(たとえば文献 (7) の pp. 378～384 をみよ)。ここに，$\Phi$ は誤差積分

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2}ds$$

である。

第2図に，換算時間 $t$ のいろいろな値に対して，(8)式であたえられる換算温度 $u$ と換算距離 $x$ との関係 $u=u(x)$ をグラフで示した。$t$ の有限な値にたいして $u(x)$ はひとつの極大をもつ山形の曲線で表わされる。その極大値 $u_{max}$，またこの極大のおこる $x$ の値 $x_{max}$ は，ともに，$t$ の増大とともに大きくなる。第2図の $\mathbf{u}_{max}$ としるした曲線は，この極大の点をつらねたものである。$t$ が無限大になると極大は $x=\infty$ にむかつて去り，$u(x)$ は単調増加関数 $1-e^{-x}$ となる。

積雪全体は，はじめ，0℃以下のある温度にあつた。$u=0$ という換算温度がその温度に相当する。一例として，0℃が第2図の水平な破線MNの高さのところの換算温度 $u_0$ に相当す




第2図　いろいろな $t$ の値についての $u$ と $x$ との関係

るものとしよう。時間とともに，積雪のなかの温度分布は，$t$ の小さい値の山形の曲線から $t$ の大きい値の山形の曲線へと次々にうつつてゆく。そして，$t=2$ になつたとき，山の頂はM点に達し，積雪表面から換算距離にして $x=1.24$ の深さで，はじめて雪の温度が0°Cに達する。雪の温度は0°C以上にはのぼれない。それで，なお時間がたてば，M点を中心として，第2図の上では左右に，実際の雪のなかでは上下に，雪が部分的にとけて，0°Cの湿つた範囲がひろがる。第2図には示してないが，$u(x)$ を表わす曲線は，頂を水平線MNで切りとられた山形の曲線にかわる。これが内部融解である。はじめの雪の温度がもつと低くて，たとえば第2図のうえで0°Cが $u_0=0.44$ に相当するとすれば，雪の温度は $t=5$ のとき $x=1.56$ の深さで，すなわちP点で0°Cに達し，そこを中心として上下に内部融解をおこす。(内部融解がはじまれば，さきにのべたように $u(x)$ は頂をきられた山形の曲線で表わされるようになり，積雪のなかの温度分布は(8)式で与えられるものとはちがつてくる。第2図の山形の曲線は，内部融解がはじまるまでの温度分布だけを表わす)。

$t=\infty$ のとき，$x=\infty$ で $u$ は1になる。これ以外のばあいには，$u$ は1よりつねに小さい。それゆえ，はじめの雪の温度が，換算温度にして，0°Cより1以上ひくければ，すなわち $u_0>1$ ならば，内部融解はおこりえない。$U$ は，雪のはじめの温度を0とする温度であるが，いま，0°Cを0とする実際の温度を $U'$ とし，$U'$ に対応する換算温度を $u'$ としよう。すなわち $U'=U-U_0$，$u'=u-u_0$ である。すると，いまのべた内部融解のおこりえない条件は

$$(u')_{t=0}<-1$$

とかかれる。これを(3)式と(5)式とによつて，実際の温度 $U'$ についてのものにかきかえると

$$(U')_{T=0}<-\frac{A}{a^2k}=-\frac{1-r}{ak}I_0 \qquad (9)$$

となる。これが，いくら時間がたつても内部融解がおこりえないための，積雪のはじめの温度に対する臨界条件である。

以上のように，はじめの雪の温度が低いほど，すなわち $u_0$ が大きいほど，内部融解のはじまる深さは深く，はじまるまでの時間はながい。この関係は，$u_{\max}$ を $u_0$ とよみかえることにより，第2図の曲線 $\mathbf{u}_{\max}$ で表わされる。なお，正確のために，第1表に，いろいろな $t$ の値

**第 1 表**

| $t$ | 0.005 | 0.01 | 0.02 | 0.045 | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_{\max}$ | 0.0041 | 0.0077 | 0 0138 | 0.0278 | 0.0524 | 0.0858 | 0.1120 |
| $x_{\max}$ | 0.165 | 0.210 | 0.275 | 0.370 | 0.490 | 0.615 | 0.700 |

| $t$ | 0.5 | 1 | 2 | 3 | 5 | 10 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_{\max}$ | 0.154 | 0.226 | 0.314 | 0.368 | 0.440 | 0.535 | 0.720 |
| $x_{\max}$ | 0.820 | 1.010 | 1.235 | 1.375 | 1.56 | 1.93 | 2.61 |

に対する $u_{max}$ の数値と，$u_{max}$ に対応する $x$ の値 $x_{max}$ とを示した。

ひとつの数値例として，密度 0.35 gr/cm³ のしまり雪の表面に強さ $I_0=50$ cal/cm²·hr の日射があたるときの内部融解を考えよう。この日射は，春ちかく，晴れた日の札幌附近の日射として，中程度のもので最大のものというわけではない。雪に関するいろいろな常数をつぎのようにとる。

| | |
|---|---|
| 密　度 $\rho$ | 0.35 gr/cm³ |
| 熱伝導率 $k$ | $5.0\times10^{-4}$ cal/cm·℃ |
| 表面反射率 $r$ | 0.7 |
| 積雪内日射減衰係数 $a$ | 0.5/cm |
| 投射日光強度 $I_0$ | 50 cal/cm²·hr$=1.4\times10^{-2}$ cal/cm²·sec |

$r$, $a$, $k$ は，密度以外の雪の性質によつても影響されるが，大浦の研究結果[5]から判断して，うえにあげた $r$, $a$ の値は，$\rho=0.35$ の雪について妥当な値である。$k$ の値は，吉田，岩井のもとめた関係式[8] $\log_{10}k=-4+2\rho$ によつて $\rho$ の値から定めた。以上の値をつかうと，(5) 式の換算係数はつぎのようになる。

$$\frac{a^2k}{c\rho}=7.15\times10^{-4}/\text{sec},\quad a=0.5/\text{cm},$$

$$\frac{a^2k}{A}=5.95\times10^{-2}/℃$$

雪のはじめの温度 $(U')_{T=0}$ が $-3.8$℃ であつたとしよう。すると，$u$ が $3.8\times5.95\times10^{-2}=0.226$ の値になつたとき雪の温度は 0℃ となり内部融解がはじまるはずである。第 1 表で，$u$ の極大値 $u_{max}$ が 0.226 になるのは $t=1$，すなわち，日射があたりはじめてから $1\div(7.15\times10^{-4})$ sec$=23$ 分 20 秒あとである。そして，内部融解がはじまる位置は，$t=1$ に対応する $x_{max}=1.010$ の値から，$1.010\div0.5=2.02$ cm となる。結局，密度 0.35 の雪が $-3.8$℃ に冷えているところへ，50 cal/cm²·hr の日射があたると，雪の表面が $-3.8$℃ に保たれたまま，23 分 20 秒たつと，雪の表面のした 2.02 cm のところは温度が 0℃ にのぼり，そこから内部融解がはじまるという結果である。

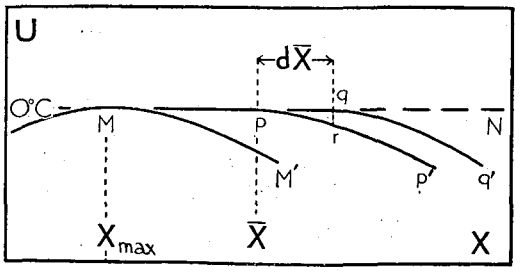
まえに，$u$ は 1 より大きくなることはなく，雪のはじめの換算温度 $(u')_{t=0}$ が $-1$ 以下ならば，いくら時間がたつても内部融解はおこらないことをのべ，そのために実際の温度 $(U')_{T=0}$ がみたすべき条件として (9) 式をえた。いまのばあい (9) 式は $(U')_{T=0}<-1/(5.95\times10^{-2})=-16.8$℃ となる。

第 1 表からわかるように，$u_{max}$ の値がすこし大きくなるためにも，$t$ の値は急速に大きくなる必要がある。たとえば，$t=1$ では $u_{max}=0.226$ であるが，約その 2 倍にあたる 0.440 に $u_{max}$ がなるのに，$t$ の方は 5 倍にならなければならない。そして $u_{max}$ が 0.226 の 4.4 倍の 1 になるためには，$t=\infty$，すなわち無限に長い時間がいるのである。このことから，雪のはじめの温度がわずか低くなつても，内部融解は急激におこりにくくなることがわかる。

このことを，もうすこし，実際のばあいに近く考えてみよう。夜のあいだに雪は冷え，朝になつて日があたりはじめるが，その日，日射のつづく時間はたかだか数時間である。この数時間のうちに雪の温度が0°Cになることがなければ，内部融解は実際にはおこりえない。いま日射のつづく時間を4時間としてみよう。うえの数値例のばあいでいうと，4時間は$t=10$にあたり，この$t$の値に対応する$u_{max}$の値は，第1表から，0.535となることがわかる。したがつて，雪のはじめの温度$(U')_{T=0}$が$(-0.535)\div(5.95\times10^{-2})=-9$°C以下ならば，4時間日射がつづいても，その日，雪の内部融解はおこらない。しかし，まえに示したように，雪のはじめの温度が$-3.8$°Cなら，23分20秒で内部融解がはじまるのである。このように，ある日に内部融解がおこるかおこらないかは，夜のうちの雪の冷えかたの僅かのちがいできまる。

## III. 内部融解進行に関する考察

積雪表面からある深さで温度が0°Cに達したあとは，その深さを中心として，部分的融解によつて，しめつた範囲が上下にひろがる。この範囲を「しめり範囲」ということにしよう。湿り範囲内では，どこでも雪の温度は0°Cである。したがつて，熱伝導はおこりえず，そこで吸収される日光はすべて雪の融解のためにつかわれ，雪の含水量は吸収日光の量に比例して増す。融解が進んで，雪を作つている氷の骨組がくずれるほどになると雪層の沈下がはじまり，問題がむつかしくなる。それで，簡単のため，氷の骨組はくずれないものとする。また，雪が部分的融解をうけて湿ると，日光の減衰係数$a$が大きくなるといわれているが，この点についてもまた，簡単のため，雪がしめつても$a$に変化はおこらないと仮定する。このような簡単な仮定をしたとしても，なお，湿り範囲が時間とともに上下にひろがる有様を熱伝導理論でさだめることは，なかなか困難である。それで，くわしいことは次の機会にゆずることとして，いまは，湿り範囲の上下の端で，温度分布に関してどのような条件がみたされなければならないかの議論にとどめることにする。



第3図　しめり範囲の下端ちかくの温度分布

第3図では，実際の温度$U$，雪の表面からの実際の深さ$X$が，それぞれ，たて軸よこ軸にとつてある。深さ$X_{max}$のM点で雪の温度がはじめて0°Cに達したとする。図には，その時の温度分布を，$X_{max}$より深い部分について，M点をとおる曲線MM′で表わしてある。それからある時間たつて，時刻が$T$のとき，しめり範囲がひろがつて，その下端が深さ$\bar{X}$のp点まできたとしよう。このときの温度分布は，Mpのあいだでは水平線で，p点から右ではpp′のような形の曲線であらわされる。さらに$dT$だけ時間のたつた時刻$T+dT$では，しめり範囲の下端は$d\bar{X}$だけすすんでq点に達し，温度分布は水平直線Mqと曲線qq′とで示される。こ

の $dT$ のあいだに，深さが p と q とのあいだにある厚さ $d\bar{X}$ の雪層（水平単位面積内にある雪層を考える）は $Ae^{-\alpha\bar{X}}\,dT\,d\bar{X}$ だけの日光エネルギーを吸収する。この吸収されたエネルギーは熱にかわるが，この熱がどのようになるか，あるいは使われるかを考えよう。

第3図の左の方（実際には上の方）にはこの熱は流れえない。左の方は，どこでも温度が0°Cで温度勾配がないからである。しかし，右の方には，$\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{X=\bar{X}}$ の温度勾配があるので，$dT$ のあいだに $-k\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{X=\bar{X}}dT$ だけの熱量が伝導によつて去つてゆく。また，時刻 $T$ で雪層 $d\bar{X}$ は，曲線 pr（r は q 点を通る垂直線と曲線 pp′ との交点）で示される温度分布をもつていたのに，$dT$ のあいだにその全体が0°Cにあたたまり，直線 pq で表わされる温度分布をとるようにかわる。このためには，三角形 pqr の面積と $c\rho$ との積，すなわち $\frac{c\rho}{2}\left(-\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{X=\bar{X}}(d\bar{X})^2$ の熱を必要とする。さらに，雪層 $d\bar{X}$ は0°Cになつたうえ，その一部がとかされるかもしれない。これに必要な熱量は $d\bar{X}$ と $dT$ とに比例するはずだから，それを $q\,d\bar{X}\,dT$ と書くことにしよう。以上，右の方へ去る熱，雪を暖めかつ融かすための熱が，吸収日光のエネルギーでまかなわれる。それで

$$Ae^{-\alpha\bar{X}}\,dT\,d\bar{X} = -k\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{X=\bar{X}}dT - \frac{c\rho}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{X=\bar{X}}(d\bar{X})^2 + q\,d\bar{X}\,dT \qquad (10)$$

の関係がなりたつ。この式で，右辺第1項は1次の微小量であるのに対して，ほかの項はすべて2次の微小量である。それゆえ，右辺第1項は0でなければならない。このことから

$$\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{X=\bar{X}} = 0 \qquad (11)$$

なる条件がえられる。つまり，しめり範囲の下端では，温度勾配はつねに0であつて，第3図の曲線 pp′，qq′ は p 点，q 点で水平線 MN と折目をつくらずにつながつていなければならない。

(10)式の右辺第1項は，しめり範囲の右端から $dT$ のあいだに伝導で去る熱量であつた。(10)式をたてるときには，その熱量を1次微小量と考えたのであつて，その結果として(11)式をえたわけである。このことは，しかし，必ずしも，伝導で去る熱量が0であることを示すのではない。その熱量が2次あるいはそれ以上の次数の微小量である可能性を残している。そして，実際，つぎに示すように，それは2次の微小量なのである。

雪層 $d\bar{X}$ の右端の温度は時刻 $T$ では r 点で示される。$\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{X=\bar{X}}=0$ であるから，r 点での温度勾配は1次の微小量 $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right)_{X=\bar{X}}d\bar{X}$ にひとしい。r 点は，第3図の上では，$dT$ のあいだに上昇して q 点と一致し，その時の r 点での温度勾配は0になる。したがつて，r 点，つまり雪層 $d\bar{X}$ の右端の温度勾配は，$dT$ のあいだに $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right)_{X=\bar{X}}d\bar{X}$ から0まで変化し，その平均値は $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right)_{X=\bar{X}}d\bar{X}$ にひとしい。それゆえ，雪層 $d\bar{X}$ から伝導によつて $dT$ のあいだに去る熱は，2次の微小量

$$-\frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right)_{X=\bar{X}}d\bar{X}\,dT \qquad (12)$$

であたえられる。このことは，雪層 $d\bar{X}$ の右端の温度勾配自体が1次微小量であることに由来しているのである。先に，雪層を暖めるのに必要な熱量として(10)式の右辺第2項を導いた。その導きかたから考えて，雪層右端の温度勾配が1次微小量なら，(10)式の右辺第2項は3次微小量になることが直ちにわかる。したがつて，(12)式を(10)式の右辺第1項としたばあい，右辺第2項は省略してさしつかえない。かくして

$$Ae^{-\alpha\bar{X}} = -\frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right)_{X=\bar{X}} + q \tag{13}$$

の関係がえられる。

湿り層より下の雪は温度が0°C以下で，そこでは熱伝導が行なわれており前節の(4)式がなりたつ。湿り層の下端 $X=\bar{X}$ は，また同時に，この熱伝導の行なわれている範囲の上端でもある。それで，$X=\bar{X}$ でも(4)式はなりたたなければならない。さて，しめり層の下端 $X=\bar{X}$ では温度がつねに0°Cなので

$$(U)_{X=\bar{X}} = U_0(=0°\mathrm{C}) \tag{14}$$

の条件がなりたつ。したがつて $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{X=\bar{X}}=0$ でなければならず，(4)式は，$X=\bar{X}$ で

$$-k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right)_{X=\bar{X}} = Ae^{-\alpha\bar{X}} \tag{15}$$

の形をとる。この式と(13)式とを組合わせると

$$q = \frac{A}{2}e^{-\alpha\bar{X}} \tag{16}$$

がえられる。(13)式の右辺第1項は，しめり層から伝導によつて去る熱量であるが，(16)式の関係からその熱量も $\frac{A}{2}e^{-\alpha\bar{X}}$ にひとしいことがわかる。かくして，しめり層の下端 $X=\bar{X}$ において吸収される日光エネルギー $Ae^{-\alpha\bar{X}}$ は，その半分は氷をとかして雪をしめらせるのにつかわれ，他の半分は伝導によつて流れて下のまだ0°C以下にある雪の温度を高めるのにつかわれる。

(13)式は雪層 $d\bar{X}$ の熱収支から導かれた境界条件であるが，(16)式の関係があるため，それは(15)式とおなじである。かくして，しめり層の下端 $X=\bar{X}$ で温度 $U$ がみたすべき境界条件として(11)，(14)，(15)式がえられる。この条件は，また，しめり層の上端でもそのままなりたつ。これらの条件を変換量で表わすと

$$(u)_{x=\bar{x}} = u_0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\bar{x}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=\bar{x}} = -e^{-\bar{x}} \tag{17}$$

となる。ここに，$\bar{x}$ はしめり層の下端あるいは上端の変換距離，$u_0$ は0°Cに対応する変換温度である。

しめり層の上下端が移動する有様を知るには，(17)式の境界条件をみたす(6)式の解をみつければよい。ただし，その解は，初期条件として，雪の温度がある深さで，はじめて，0°Cに達

したときの温度分布から出発しなければならないという条件をさらにおわされる。さきにのべたように，その解をあたえることは将来へのばす。そして，ここでは，それと関連のある問題として，しめり層の上端がどこまで上昇しうるかの限界を考えるのにとどめることとする。

## IV. 表面層内の定常温度分布

積雪表面は0°C以下の一定温度に保たれたままなので，温度0°Cの湿り層の上端が上昇すると，まだ0°Cにはなつていない表面層のなかの温度勾配はつよくなる。その結果，熱が表面にむかつて流れ表面から大気へのがれる速さがます。それで，しめり層の上端がある高さに達すると，表面層内で発生する熱は，雪をあたため，あるいは融かすひまがなく，その全部が大気に流れ去つてしまう状態になるであろう。熱の収支は大気と表面層とのあいだだけで行なわれるので，その下の湿り層との熱的関係はうしなわれ，湿り層の上端の上昇はとまり，表面層内の温度分布は定常で，$\frac{\partial u}{\partial t}=0$ となる。この定常状態になるまでには無限の時間がかかるので，これは実現されない状態である。しかし，この状態をこえては変化がすすみえないという意味で，これは表面層内の限界状態を表わしている。その点で，この定常状態を考えることが役にたつ。

この定状状態での表面層内の温度 $u$ は，(17)式の3つの条件に加えて $(u)_{x=0}=0$ の条件をみたす(6)式の解で与えられる。ただし，$\frac{\partial u}{\partial t}=0$ なので，(6)式の左辺は0とする。その解は

$$u=(1-e^{-x})-xe^{-x_s} \tag{18}$$

$$u_0=-(u')_{t=0}=(1-e^{-x_s})-x_se^{-x_s} \tag{19}$$

である。$x_s$ はこの定常状態での湿り層の上端の坐標 $x$ で，しめり層の上端は $x_s$ をこえて上にでることはなく，表面層内の温度も(18)式で与えられる温度より高くなることはない。$(u')_{t=0}=-u_0$ は，0°Cを0とする換算温度で表わした積雪のはじめの温度であるが，$u_0$ が与えられれば，(19)式によつて $x_s$ が定められる。第2図で，たて軸を $u_0$ 軸，よこ軸を $x_s$ 軸とみたてたとき，$\mathbf{u}_s$ としるした曲線が $u_0$ と $x_s$ との関係を表わしている。その関係を数値であらわしたのが第2表である。

第2図の曲線 $\mathbf{u}_{\max}$ は $u_0$ と，はじめて温度が $u_0$ (=0°C) に達する点の深さ $x_{\max}$ との関係で

第 2 表

| $u_0$ | 0.00468 | 0.0102 | 0.0175 | 0.0370 | 0.0616 | 0.0902 | 0.122 | 0.156 | 0.191 | 0.228 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_s$ | 0.1 | 0.15 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
| $u_0$ | 0.264 | 0.337 | 0.408 | 0.475 | 0.537 | 0.594 | 0.645 | 0.692 | 0.733 | |
| $x_s$ | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 | |

あつた。さて，たとえば $u_0$ が水平直線 MN の高さにあるとすると，雪の温度は M 点ではじめて 0°C になり，しめり層の上端は水平に左に移動して，無限に時間がたつたとき，水平直線 MN と曲線 $\mathbf{u}_s$ との交点 M″ に達する。しかし，図にみるように MM″ の距離はあまり大きくはない。また，M″ から出発して左の方 0 点にむかつて下る点線は，湿り層の上端が M″ 点に達したあとの表面層内の定常温度分布 ((18) 式で与えられる分布) である。この温度分布もまた M 点から 0 点にむかう曲線で表わされる温度分布，すなわち，雪の温度がはじめて 0°C になつたときの温度分布とあまりちがわない。それゆえ，表面からある深さで温度が 0°C に達し内部融解がはじまつたあとでも，上の方にむかつては，あまり大きな変化はおこらないとみてよい。

しかし，下にむかつては別である。下の方の定常状態とは，その全体が $u_0$，すなわち 0°C になることで，はじめて温度が 0°C に達したときの温度分布とは全くかけはなれている。

第 1 図の測定には若浜五郎君の手をわずらわせた。ここに謝意を表わす。なお，この仕事の大部分は科学研究費によつて行なつた。

## 文　献

1) 木下誠一・若浜五郎 1959 アニリン固定法による積雪の薄片. 低温科学, 物理篇, ***18***, 77–96.
2) 吉田順五 1959 積雪含水率測定用熱量計. 低温科学, 物理篇, ***18***, 17–28.
3) De Quervain, Maurice 1948 Über den Abbau der Alpinen Schneedecke. IUGG, Assemblée générale d'Oslo, II, 55–68.
4) Hoeck, Erwin 1952 Der Einfluss der Strahlung und der Temperatur auf den Schmelzprozess der Schneedecke. Beiträge zur Geologie der Schweiz, Hydrologie, Lieferung 8.
5) 大浦浩文 1951 積雪による光の反射及び透過について II. 低温科学, ***6***, 35–40.
6) 吉田順五 1948 積雪による日射の吸収. 低温科学, ***4***, 17–26.
7) 小平吉男 1933 物理数学, 第 2 巻 (岩波書店).
8) 吉田順五・岩井 裕 1947 積雪塊の熱伝導率の測定. 低温科学, ***3***, 79–87.

## Résumé

A small portion of the sunlight falling upon the surface of snow penetrates some distance into it, decaying with depth $X$ in proportion to $e^{-\alpha X}$, and is absorbed to produce heat. Although that heat is very small in amount it can be accumulated, because the poor heat conductivity of snow prevents it from escaping. This causes, at times, the snow to be warmed enough to be melted internally with its surface layer left unmelted. An example of that phenomenon of internal melting is illustrated in Photo. 1 of Pl. I. On one day of March when the air temperature never rose above −1.2°C, a thin section was vertically cut out of the snow. That section is shown in the photograph, its top marked 0 being the snow surface. A distinct difference in the texture can be seen between the parts above and below the level 2 cm deep. Above that level the snow crystals kept their original size as they had been deposited, which indicates that they had

not been melted. Below that level they had changed into an aggregate of large ice granules each of which is a cluster of several snow crystals conglomerated by the internal melting.

At what time after the insolation and where in the interior of the snow can the beginning of internal melting be predicted by the theory of heat conduction? Let

$X$ be the distance downwards from the snow surface,
$T$ be the time since the beginning of the insolation,
$U$ be the temperature of snow counted from its initial temperature which is below 0°C, 0°C itself being denoted by $U_0$,

then the above variables must satisfy the differential equation

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial X} = k \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + Ae^{-\alpha X}. \tag{1}$$

The last term $Ae^{-\alpha X}$ on the right side of the equation is the amount of heat evolved by the absorbed sunlight in a unit time and in a unit volume of snow at depth $X$. If the intensity of the sunlight upon the snow surface and its reflection power are respectively denoted by $I_0$ and $r$, the constant $A$ can be written as $a\,(1-r)\,I_0$. The constants $c$, $\rho$ and $k$ are respectively the specific heat of ice, the density of the snow and its heat conductivity. Let it be assumed that at $T=0$, that is, at the beginning of insolation, the whole of the snow is at temperature $U=0$ which is below 0°C. In addition to that the temperature of the snow is supposed to be kept at $U=0$ at its surface even though within it the temperature may change. Then the initial and boundary conditions are given by

$$(U)_{T=0} = 0, \quad (U)_{X=0} = 0. \tag{2}$$

The solution of differential equation (1) satisfying those conditions will show how the temperature rises within the snow with its surface kept at a temperature below 0°C. As soon as the temperature reaches $U_0$ (=0°C) anywhere within the snow, there the internal melting begins.

By a change of variables

$$\frac{a^2 k}{c\rho} T = t, \quad aX = x, \quad \frac{a^2 k}{A} U = u, \tag{3}$$

the differential equation (1) and the initial and boundary conditions (2) are transformed into simpler ones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-x}, \tag{4}$$

$$(u)_{t=0} = 0, \quad (u)_{x=0} = 0. \tag{5}$$

The new variables $t$, $x$ and $u$ are all dimensionless. The solution of equation (4) with conditions (5) is

$$u = (1-e^{-x}) - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2} e^{t-x}\left\{1-\Phi\left(\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\} - \frac{1}{2} e^{t+x}\left\{1-\Phi\left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\}, \tag{6}$$

where $\Phi$ stands for the error integral

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2}\,ds.$$

In Fig. 2 of the text, $u$ is plotted against $x$ by the mound-like curves $u(x)$ for different values of $t$. As time goes on the temperature distribution $u(x)$ shifts from the curve of smaller $t$ to that of larger $t$. Suppose that 0°C, which is denoted by $u_0$ in terms of $u$, lies at the level of line MN. Then curve $u(x)$ touches that line for the first time at point M at $t=2$. At that moment of contact the internal melting begins and a layer of wet snow starts to extend to the left and right of point M (upwards and downwards in the actual snow), the curve of temperature distribution becoming like a mound with its top cut off by line MN. (That top-cut curve is not shown in the figure).

The larger $u_0$ is, *id est*, the lower the initial temperature of snow is, the more time is needed for the snow to reach 0°C and the deeper the level lies at which the snow reaches 0°C. That situation is represented by the curve marked $u_{\max}$ in Fig. 2 which runs through the tops of curves $u(x)$. ($u_{\max}$ is the value of $u$ at the top of curve $u(x)$. It is obvious that $u_{\max}=u_0$ means the beginning of the internal melting). In Table 1 of the text the values of $u_{\max}$ and $x_{\max}$ are listed for different values of $t$, where $x_{\max}$ is the value of $x$ at which $u_{\max}$ occurs.

When $u_0>1$, that is, when the initial temperature of snow lies below 0°C by more than 1 in terms of $u$, the temperature of snow never reaches 0°C however long a time may elapse. Obviously internal melting does not occur in such a case. By assigning reasonable values to $a$, $r$ and $k$, a snow of $\rho=0.35$ is found, under the insolation of intensity $I_0=50$ cal/cm$^2$·hr, not to be subjected to any internal melting if it is initially cooled down beyond $-16.8$°C. But, if its initial temperatrne is $-3.8$°C, internal melting begins at depth $X=2.02$ cm and at time $T=23$ min 20 sec.

As stated above, the wet layer extends both upwards and downwards from the level $x_{\max}$ at which the snow reaches 0°C for the first time. A consideration on the balance of heat at the top and bottom surfaces of the layer yields

$$(u)_{x=\bar{x}} = u_0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\bar{x}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=\bar{x}} = -e^{-\bar{x}}, \tag{7}$$

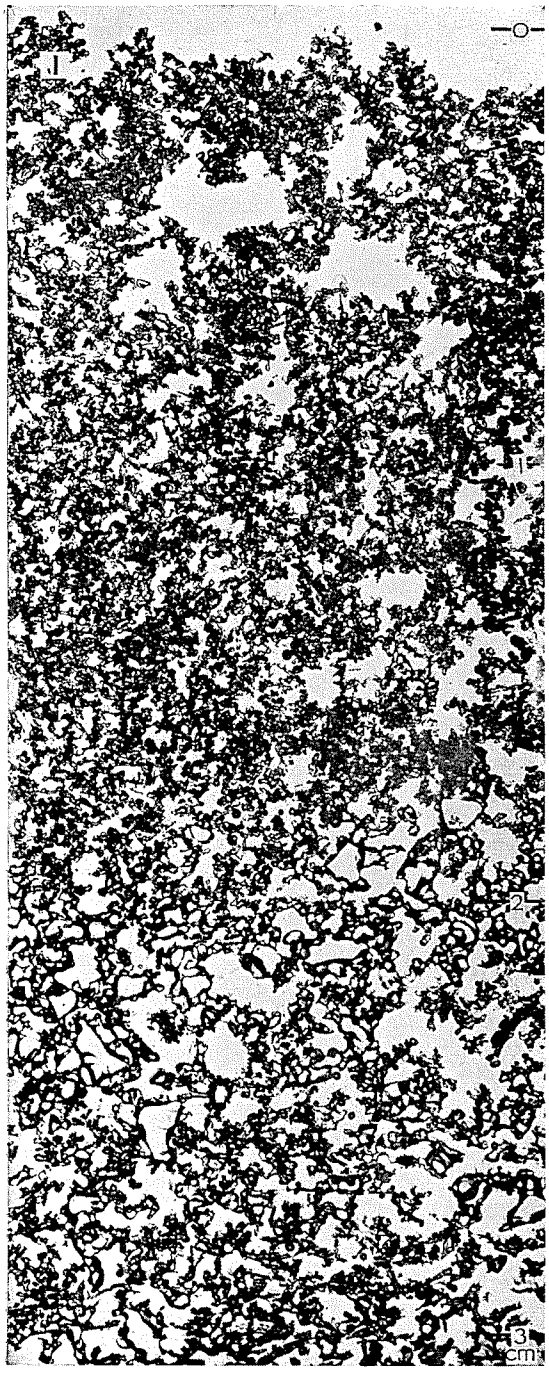
conditions which must be satisfied on either of the two boundary surfaces of the wet layer. Here $\bar{x}$ is used to denote the position of the boundary surface, it may be either the top or the bottom. Within the wet layer, heat cannot move because there is no temperature gradient. Consequently all the energy of sunlight absorbed there is expended to melt snow. But the energy $e^{-\bar{x}}$ absorbed on the boundary surface of the wet layer is spent one-half to melt snow, while the other half flows off the surface into the snow lying above or below the wet layer.

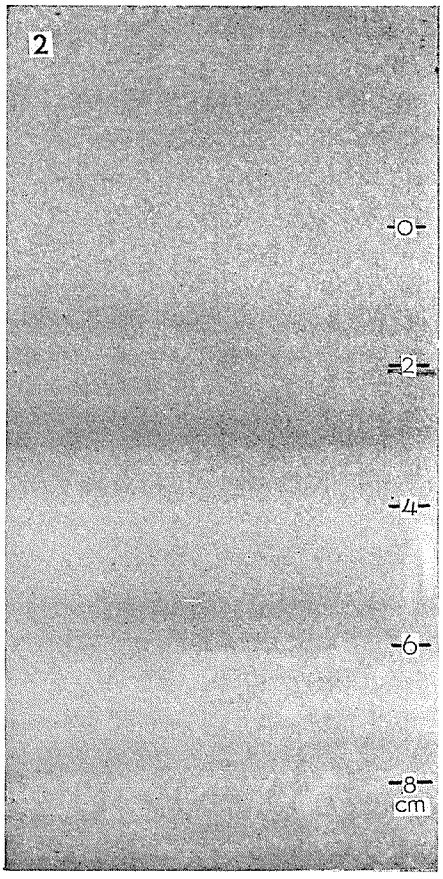
Within the surface layer lying between the snow surface and the top of the wet layer there can be established a stationary temperature distribution with boundary conditions $(u)_{x=0}=0$, $(u)_{x=x_s}=u_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_s}=0$ and $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=x_s}=-e^{-x_s}$. Here $x_s$ stands for the depth $\bar{x}$ of the top of the wet layer in this stationary state. This state is a limiting

one in the sense that, once the temperature distribution comes to that state, it cannot change any longer. Therefore the top of the wet layer cannot rise above the level $x_s$. The value of $x_s$ is connected to $u_0$ by

$$u_0 = (1-e^{-x_s})-x_s\, e^{-x_s}, \tag{8}$$

which relation is in Fig. 2 represented by the curve marked $u_s$. That curve is positioned to the left of the curve $u_{\max}$ with only a small distance between. Point M″ is a point on curve $u_s$ when 0°C is represented by the straight line MN. The wet layer starting from point M can extend to the left (upwards in the actual snow) up to point M″ but cannot get over that point. The dotted curve starting from point M″ downwards to the left shows the temperature within the surface layer when the above mentioned stationary state is reached. Also that curve is displaced only a little from the one starting from point M which represents the temperature distribution at the beginning of the internal melting. Therefore no large change can occur in the surface layer of snow after the internal melting has begun. But the situation is very different below the level of first melting. That problem remains to be solved in the future.




1. 内部融解をおこした積雪を鉛直に切つてつくつた薄片。写真上端が積雪表面である。表面下 2 cm より深いところで内部融解がおこつた。(薄片作成，写真撮影ともに若浜五郎による)
2. 積雪の比較的こまかい層構造。この層構造のなかには内部融解によるものもあろう。(小島賢治による写真)