経済学研究 *45-4*
北海道大学 1996.3

サヴェジ基礎論における術語worldについて（5）

園　信太郎

1．はじめに

この「基礎論」とは

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics,* Wiley, New York, 1954 (*Second Revised Edition,* Dover,New York, 1972)

でのサヴェジ氏の思索のことだが，筆者はこの紀要の1993年3月第42巻4号，頁は21(307)-47(333)，1993年9月第43巻2号，14(144)-37(167)，1994年9月，第44巻2号，31(125)-59(153)，及び1995年3月第44巻第4号,118(436)-146(464)，において「基礎論」への注釈を試みたのであり，一方,副次的注釈，「サヴェジ，レオナルド ジミィ，による1961年の講義における個人的確率について」，1994年3月第43巻4号，176(603)-187(613)，も示した。

今回は第4，第5，第6公準（「基礎論」での略記は順にP4，P5，P6),「定性的確率，qualitative probability」，「定量的確率，quantitative probability」，及び「条件つき確率，conditional probability」に関するサヴェジ氏の議論を読み取ることとする。なお今まで通り§x.y,z,はDover版の第x章第y節z頁を示す。

2．「自身にとってより確からしい」ということ

§3.1,27,の初めの段落（これは第3章Personal Probabilityの冒頭である）を引くと次である。

I personally consider it more probable that a Republican president will be elected in 1996 than it will snow in Chicago sometime in the month of May,1994. But even this late spring snow seems to me more probable than that Adolf Hitler is still alive. Many,after careful consideration, are convinced that such statements about probability to a person mean precisely nothing, or at any rate that they mean nothing precisely. At the opposite extreme,others hold the meaning to be so self-evident as to be unanalyzable. An intermediate position is taken in this chapter,where a particular interpretation of probability to a person is given in terms of the theory of consistent decision in the face of uncertainty,the exposition of which was begun in the last chapter. Much as I hope that the notion of probability defined here is consistent with ordinary usage,it should be judged by the contribution it makes to the theory of decision,not by the accuracy with which it analyzes ordinary usage.

「確からしさ」を「定義」する際には，「世界」に対する「個人」の態度というような個人的事柄から，少なくとも原理上は，その「定義」は無縁でなければならないという，確率概念に対する非個人的態度をなぜか採る者にとっては，「自身にとっては，某年某月の某所の雪よりも某年の某党の勝利のほうが，より確からしい」とか，「自身にとっては，この某所の春の雪のほうが，死んだはずの某氏が実はひっそりとどこかで暮らしていることよりも，より確からし

い」とかいうような,「自身にとっては…より確からしい」という言い回しは,「まさに何ものをも意味していない, mean precisely nothing」か, 少なくとも「何かを精確に意味しているなどということはない, mean nothing precisely」, とせざるをえない代物なのである。だがしかし, 一方では, 「自身にとっての確からしさ」に言及しているこれらの表現は, 少なくとも「自身」にとっては, 分析などできないくらいに「それ自身として明らかである, self-evident」直観的事柄を指し示しているのだという, かなり極端な立場を採る者もいることであろう。

ところでサヴェジ氏はここで自分はある中間的な立場を採ると述べているが, これは, 不確定性に直面している「個人」の行為の整合性（つまり「個人」の行いに現れる損得勘定における一貫性）に着眼して, 「個人」にとっての「確からしさ」を明確な様式で規定しようとする立場のことであり, また, 「個人」の行為の整合性に関する議論は既に前章から始まっているのである。

しかしこの段落の次の段落で, the concept “more probable to me than”is an intuitive one, open to no ambiguity and yet admitting no further analysis という「確からしさ」に関する直観的見解に対して, サヴェジ氏が強い不信感を表明していることは注意すべきであろう。「個人」にとっての「確からしさ」とは, 不確定性に直面している状況での行動様式に関するものであり, 内的直観なるものを言辞的に表明したものなどではないからである。実際, 27頁の末尾の文とこれに続く28頁の文とを引けば次である。

If the state of mind in question is not capable of manifesting itself in some sort of extra-verbal behavior, it is extraneous to our main interest. If, on the other hand, it does manifest itself through more material behavior, that should, at least in principle, imply the possibility of testing whether a person holds one event to be more probable than another, by some behavior expressing, and giving meaning to,his judgment.

従ってサヴェジ氏にとっての本来の「確からしさ」を「直観的, intuitive」確率というふうにとらえてしまうと誤解が生じやすくなるであろう。

ところで彼は§3.1,28,の2番目の段落で（de Finetti, Bruno,の議論から刺激を受けたことを前の段落の末尾でことわったうえで）「行動的尋問, behavioral interrogation」の簡潔な例を示すことによって, 彼にとっての本来の「確からしさ」がいかなるものかを伝えようするのである。そこでこの行動的尋問の概略を述べると次のようになる。

今「私」は二つの「できごと」X及びYのどちらが「「彼」にとってより確からしい」のかを知りたいものとする。そこで「彼」と「私」の両方にとって「たとい微弱ではあっても, 紛れもなく価値がある」対象cを「私」が持ち出して, 「Xが実際に通用する場合にはそのcを「彼」に無料で与えるが, 通用しない場合には「彼」にcを与えることはない」という「くじX」, 及びYに関しても同様の「くじY」を,「私」が作り上げるものとする。さらにまた「私」はこれら（共通の賞cを持つ）二つの「くじ」を「彼」に提示して, 誠実に, もちろん無料で,「くじX」と「くじY」との間の二者択一を勧めるものとするのである。このような状況において「彼」が例えば「くじY」を選ぶのならば, 「「彼」にとっては, YのほうがXよりも「より確からしい」」と「私」が判断したとしても, ただし「彼」にとっては対象cの内容がX,Yが通用するか否かには依存しないとしてだが, 決して異様ではないであろう。またよりフォーマルに, 「「彼」にとってより確からしい」ということを「彼」が示す二者択一の有り様によって「定義」するという立場を「私」が採ったとしても, この「定義」は, 選択肢間の無差別性の問題

を脇におけば，不当なものではないであろう。

ところで§3.1,28,の２番目の段落でサヴェジ氏が実際に示している行動的尋問の様式を末尾の一文を除いて引用すれば次ぎである。

To illustrate the scheme,our idealized person has just taken two eggs from his icebox and holds them unbroken in his hand.We wonder whether he thinks it more probable that the brown one is good than that the white one is. Our curiosity being real,we are prepared to pay, if necessary, to have it satisfied. We therefore address him thus: "We see that you are about to open those eggs. If you will be so cooperative as to guess that one or the other egg is good,we will pay you a dollar, should your guess prove correct. If incorrect,you and we are quits,except that we will in any event exchange your two eggs for two of guaranteed goodness." If under these circumstances the person stakes his chance for the dollar on the brown egg,it seems to me to correspond well with ordinary usage to say that it is more probable to him that the brown one is good than the white one is.

ここで「我我が問題としている理念化された個人，our idealized person」というのは，多分，「基礎論」で提示されている（「個人」の損得勘定に関する）規範系に忠実な，あるいは忠実であるように日日努力する，「個人」をさすのであろう。またここでは，「あなた」の推量がうまく行くか否かにかかわらず，また問題の二つの卵の内容がいかなるものであれ，質が保証されている我我の二つの卵を「あなた」の二つの卵と引き替えることによって，我我の実験に「あなた」が被験者としてかかわることでは「損はしない」ように配慮されているのである。

なおサヴェジ氏はこの次の段落では，例えば，不確定性に直面している「個人」の行動様式を検束するための（「個人」が自身に対して課す）規範の探査やその動機づけなどを考察する場合には，「これこれの状況に置かれた場合にはどのように感じるか」と自身や相手に問いただすのではなく，「どのように行うか」と問うべきであると主張している。このような「個人」が行う（自身の行為に関する）想像上の実験に基づいて規範系を探査し解釈して行こうとする流儀は，行動的尋問を現実に行おうとすれば時間も費用も多くかかるので，現実との妥協の産物と思われるかもしれないが，「公準」を一人一人が自身へのマキシムとして解釈して行くべきであるとする規範的立場からすれば，この言辞的ではないしかし現実の行動的尋問でもない，一人一人の想像上の実験に訴えるやりかたは，中間的な妥協の産物のようではあっても，正当であるとしてよいであろう。なおこの段落（§3.1,28,の下から２番目の段落）を引けば次である。

There is a mode of interrogation intermediate between what I have called the behavioral and the direct. One can, namely, ask the person,not how he feels,but what he would do in such and such a situation. In so far as the theory of decision under development is regarded as an empirical one,the intermediate mode is a compromise between economy and rigor. But, in the theory's more important normative interpretation as a set of criteria of consistency for us to apply to our own decisions,the intermediate mode seems to me to be just the right one.

このように自身の想像上の実験の場での「自己」の選択によって示される無言の答えによって，「自身にとってより確からしい」という個人的「確からしさ」への現実的な接近が与えられることに注意して，個人的確率の「定義」をなんとか行ってみようというのである。なお，§3.1,30,の２番目の段落の冒頭の文中の脚注で，

“personal probability”という言葉はThornton C.Fryによって口頭で自分へと示唆されたとサヴェジ氏はことわっているが，そこではさらに“subjective probability”,“psychological probability”,“degree of conviction” なども同じ概念を表すものと見なせると彼は述べている。しかしこのような同一視はサヴェジ氏にとっての「確からしさ」を読み取る場合には多分誤解を招きやすいことであろう。

3．not more probable thanと第4及び第5公準

前節では，Xが通用する場合には賞cが「個人」に与えられ，Xが通用しない場合（つまりXの否定～Xが通用する場合）には「何も与えられない」という，「できごと」Xに関する「くじ」を利用した。そこでこの「くじ」を少しく一般化するために，ただし対象c及びc′を想定して，c′よりもcがもたらされるほうが「できごと」Xが通用するか否かにかかわらず「自身にとってより得である」と，「個人」は既に判断しているものとしよう。さらにまた「できごと」Yに関しても，Yか～Yかにかかわらず，少なくともその「個人」にとっては，cがc′よりも得であるとしよう。そこで，c及びc′をおのおの「あたり」賞及び「はずれ」賞のように見なして，「Xが通用する場合には賞cが，～Xが通用する場合には賞c′が，「個人」へともたらされる」という「くじ」L〈X〉と，Yに関する同様の「くじ」L〈Y〉とを，設定できることとなる。

この場合，これらの「くじ」の間での「個人」による二者択一を想定したうえでだが，「個人」の想像上の実験場における「自己」が，ただしX,Yが通用するか否かにかかわらずc,c′の内容は不変であるとして，L〈X〉よりもL〈Y〉を（得であるとして）選ぶのならば，「自身にとっては，「できごと」Xよりも「できごと」Yのほうがより確からしい」とその「個人」が主張したとしても不当ではないであろうし，さらにまた彼が，よりフォーマルに，「自身にとっての確からしさ」をこのような「「くじ」間の選択の様式」によって「定義」することを試みたとしても，決して異様ではないであろう。

だが，この「定義」が成立するためには，「あたり」及び「はずれ」賞の対c,c′が，（X及びYに関する同様の「無縁性」を満たす，つまりX,～X,Y,～Yのどれが実際に通用するか否かにかかわらず，賞dは賞d′よりも自身にとってより得であり，しかもその内容は不変であると，「個人」によって判断される）他の対d,d′に置き換えられたとしても，「自己」の選択の様式が「XよりもY」から逆転して「YよりもX」になってしまうことなどありえないことが必要である。

ところで「あたり」及び「はずれ」賞が金銭的なものであり，当然「あたり」賞のほうが「はずれ」賞よりも金額が（たとい微弱ではあっても）上である場合には，「個人」がその場で直面している「できごと」が通用するか否かにかかわらず「あたり」賞のほうが「はずれ」賞よりも得であると彼が判断しても，通常の状況では，不当ではないであろう。さらにまたより一般的な場合ではあっても，選択の様式が逆転してしまうことを（その「個人」にとって）合理的であるとは主張し難いであろう。そこでd,d′に関する「くじ」をプライム ′ をつけて表すとして，「自身にとってL〈X〉よりもL〈Y〉が得ならば，やはり自身にとってL′〈X〉よりもL′〈Y〉が得である」という判断の様式は，少なくとも選択を行おうとする者にとっては，不当ではないはずである。

つまり，一つの「賞の対」に関する「くじ」の間での選択によって示される「自身にとっての確からしさ」は他の「賞の対」に連関して示される「確からしさ」と一致しなければならない，というマキシムが浮き出てくることとなる。

ところでサヴェジ氏の流儀に従って，単なる「賞」ではなく，「個人」にとっての本来の「結果」，つまり「個人」が直面している「世界」の状態がいかなるものであれその内容が不変である（その「個人」にとっての）窮極的報酬としての「結果」と連関して，このマキシムを書き換えることにより，§3.2,31,の第4公準P4が提示される。

この第4公準の内容を(表記法を原文とは少し変えて)示せば次ぎのようになる。

第4公準。c,c′,d,d′を「結果」とし，c′＜◦c, d′＜◦d，つまり「結果」c,dはおのおのc′,d′よりもその「個人」にとってはより得であると仮定する。またX,Yを（「世界」の部分集合としての）事象とし，これらの「世界」に関する補集合をおのおの〜X,〜Yとし，さらにまた(「世界」から「結果の全体」への写像としての)行為f〈X〉,f〈Y〉,g〈X〉,g〈Y〉を次ぎの様式で定義する。

f〈X〉(s)は，s∈Xの場合には値cを，またs∈〜Xの場合には値c′を取る。
f〈Y〉(s)は，s∈Yの場合には値cを，またs∈〜Yの場合には値c′を取る。
g〈X〉(s)は，s∈Xの場合には値dを，またs∈〜Xの場合には値d′を取る。
g〈Y〉(s)は，s∈Yの場合には値dを，またs∈〜Yの場合には値d′を取る。

この場合，f〈X〉≦・f〈Y〉，つまり「f〈X〉はf〈Y〉よりも得というわけではない」，あるいは「その「個人」にとっては，f〈Y〉はf〈X〉と少なくとも同等である」，と仮定すれば，g〈X〉≦・g〈Y〉が従う。

ところでサヴェジ氏による§3.2,31,での流儀に従えば，「XはYよりも確からしいにはあらず，X is not more probable than Y」あるいは「その「個人」にとっては，確からしさに関してYはXと少なくとも同等である」という表現が次のように正式に「定義」されることとなる。なお彼は不等号≦を流用しているがここでは≦＊を用いることとする。

定義。X≦＊Y即ち「XはYよりも確からしいにはあらず」とは，c′＜◦cを満たす任意の「結果」の対c,c′に対して；

f〈X〉(s)は，s∈Xの場合には値cを，s∈〜Xの場合には値c′を取る，
f〈Y〉(s)は，s∈Yの場合には値cを，s∈〜Yの場合には値c′を取る，

という様式によって定義される行為f〈X〉及びf〈Y〉が，f〈X〉≦・f〈Y〉を満たす，ということであると定義する。

ところで第4公準を仮定すれば，c′＜◦cを満たすある「結果」の対c,c′が存在してf〈X〉≦・f〈Y〉ならば，他の同様の「結果」の対に対して導入される行為の間でも同様の選好が成立するのであるから，

c′＜◦cを満たすある「結果」の対c,c′が存在してf〈X〉≦・f〈Y〉 ならば,X≦＊Y,

が従う。つまり，「d′＜◦dを満たす任意の「結果」の対d,d′に対して（ただし今までと同様の行為g〈X〉,g〈Y〉を導入して）g〈X〉≦・g〈Y〉」を導くのだが，存在しているc,c′に対してf〈X〉≦・f〈Y〉が成立するのであるから，P4より，g〈X〉≦・g〈Y〉が従い，≦＊の定義によって，X≦＊Yとなるのである。ところがこの逆はc′＜◦cを満たすc,c′が少なくとも一対存在しなければ従わないのである。

解釈上は「世界」も「行為の全体」も空ではないのだから，行為と「真の状態」とがもたらす報酬も少なくとも一つはあるはずである。つまり「「結果」の全体」も解釈上は空ではないとしてよいであろう。ところが，どの「結果」も無差別であるのならば，その「個人」にとっては，解釈上は，どの行為も無差別となってしまうのであるから，不確定性に直面した場合の（損か得かの）選択の問題は実際上は成立しなくなるし，従って，そのような「個人」は損得勘定のためのマキシムを探査する場からは，除外しておいてよいであろう。つまり，たとい微弱ではあっても，

それらの間の格差が無視しえない一対の「結果」が存在することを仮定することは，正当なことである。

そこで次の第5公準P5が導入されることとなる。

第5公準。ある「結果」の対c,c′が存在してc′<◦c。

このP5より「「結果」の全体」が空ではないことがフォーマルに従う。さらにまた，c,c′に対応する定数的な行為（例えば，常に値cのみをとる写像）をおのおの〈c〉,〈c′〉とすれば,c′<◦cより〈c′〉<・〈c〉であるから，P1より，〈c〉≒〈c′〉が従うので，「世界」は空ではないし，また少なくとも二つの異なる行為が存在することとなる。

4．定性的な個人的確率

「結果」の対c,c′と事象Xとに対して「X上で値cのみを，また〜X上で値c′のみを取る写像」を導入したが，このような写像を[c,c′,X]と表記することとしよう。

ところでc,c′を任意の「結果」としてc′<◦cと仮定する。この場合，[c,c′,X] ≤・[c,c′,Y]とX≤∗Yとは同値となる。後者から前者が従うことは≤∗の定義により明らかである。またd,d′をd′<◦dを満たす任意の「結果」とすると,前者及びP4より[d,d′,X] ≤・[d,d′ ,Y]が従うので,X≤∗Yとなる。

また，P5によって存在が保証されている「結果」の対c,c′,c′<◦cを一つ固定しX,Yを任意の事象とすると,P1により「[c,c′,X]≤・[c,c′,Y]あるいは[c,c′,Y] ≤・ [c,c′,X] 」。P4により，前者からはX≤∗Yが，また後者からはY≤∗Xが従う。故に「X≤∗YあるいはY≤∗X」が従う。

またさらに事象Zを考えると,やはりP1により「[c,c′,X] ≤・ [c,c′,Y]かつ[c,c′,Y] ≤・[c,c′,Z]ならば，[c,c′,X] ≤・ [c,c′,Z]」。これとP4とにより「X≤∗YかつY≤∗Zならば，X≤∗Z」が従う。実際，後者の「ならば」における前半から前者の「ならば」における前半が従い，前者の「ならば」における後半とP4とにより後者の「ならば」における後半が従う。

また同様のc,c′を用いることとし，X,Y,Zを事象としてX,Yのおのおのとの共通部分は空であるとする。またX≤∗Yとする。この場合 [c,c′,X] ≤・[c,c′,Y] となる。これら二つの行為(あるいは「くじ」)は 〜(X∪Y)=〜X∩〜Y上で共通の値c′を取るが，仮定によりZは〜(X∪Y)に含まれる。そこでZ上で共通の値cを取るように（ただし他の箇所はそのままにして）二つの行為を変形すると，これらは〜(X∪Y)上で一致しまたX∪Y上では変形されていない行為[c,c′,X∪Z]及び[c,c′,Y∪Z] となる。故に，P2によりこれらの間の選好は不変であり，[c,c′,X∪Z] ≤・ [c,c′,Y∪Z] が従う。故に，P4より，X∪Z≤∗Y∪Zが従う。また逆にX∪Z≤∗Y∪Zである場合には，Z上の値をcからc′へと変形して同様にP2を用いると[c,c′,X] ≤・ [c,c′,Y]となり，P4を用いると，X≤∗Yが従う。

故に，X,Yのおのおのとの共通部分が空である場合には，X≤∗YとX∪Z≤∗Y∪Zとは同値である。

またXを任意の事象とするとφ≤∗X。実際，c,c′を今までと同様として，値cを取る定数的行為を〈c〉とし,〈c′〉も同様とすると，Xが実際上不可能（あるいはnull)な事象である場合には 〈c′〉≤・〈c〉given Xとなる。〈c〉を〜Xで常に値c′を取るように変形した行為は[c,c′,X]に等しく，また〈c′〉=[c,c′,φ]であるので,これらが〜X上で一致していること及び条件つき選好の定義により,[c,c′,φ] ≤・ [c,c′,X]が従う。故に,≤∗の定義及びP4により,φ≤∗Xとなる。Xが実際上不可能というわけではないとすると，c′<◦c及びP3により，〈c′〉<・〈c〉given Xが従う。故に，条件つき選好の定義により，[c,c′,φ] <・[c,c′,X]。故に[c, c′, ϕ] ≦・ [c,c′,X]。故に，≦＊ の定義及びP４により，ϕ≦＊Xが従う。

また「世界」Sは「S≦＊ϕにはあらず」を満たす。実際，c,c′を今までと同様として，かつS≦＊ϕと仮定すると，≦＊の定義により，[c,c′,S] ≦・ [c,c′, ϕ] 。故に〈c〉≦・〈c′〉。ところがc′＜◦cであるから，「結果」間選好の定義により〈c′〉＜・〈c〉。故に，＜・の定義により,「〈c〉≦・〈c′〉 にはあらず」。故に矛盾が生じる。

ここで≦・の場合と同様にして≦＊に基づいて次の二つの(事象間の)二項関係を導入することができる。

X＜＊Y（XよりもYは確からしい）とは「Y≦＊Xにはあらず」ということであると定義する。

X＝＊Y（XとYとは同程度に確からしい）とは「X≦＊YかつY≦＊X」ということであると定義する。

例えば，上の「世界」Sに関する主張は「「世界」Sはϕ＜＊Sを満たす」となる。

さらにまた「X＝＊ϕと「Xは実際上不可能である」とは同値である」が従う。c,c′を今までと同様にc′＜◦cを満たす（その存在がP５によって保証されている）「結果」の対とする。主張の後半を仮定すると「実際上不可能」の定義により〈c′〉≦・〈c〉given Xかつ〈c〉≦・〈c′〉given X。条件つき選好の定義により，[c,c′, ϕ] ≦・ [c,c′,X] かつ [c,c′,X] ≦・ [c,c′, ϕ]。故に，P４及び≦＊の定義により，ϕ≦＊XかつX≦＊ϕが従う。故に,＝＊の定義によりX＝＊ϕが従う。

次に逆を示すために主張の後半の否定である「Xは実際上不可能ではない」を仮定する。P３より〈c′〉＜・〈c〉given X。条件つき選好の定義により[c,c′, ϕ] ＜・ [c,c′,X] 。＜・の定義により，[c,c′,X] ≦・ [c,c′, ϕ] にはあらず。≦＊の定義により，X≦＊ϕにはあらず。故に，＝＊の定義により,X＝＊ϕにはあらず。

ところでサヴェジ氏は§3.2,32,の冒頭の段落で「定性的確率，qualitative probability」という言葉を正式に次のように定義している。

A relation ≦・between events is a **qualitative probability** ; if and only if,for all events $B,C,D,$

1. ≦・is a simple ordering,
2. B ≦・ C ,if and only if $B \cup D$ ≦・$C \cup D$,provided $B \cap D = C \cap D = 0$,
3. 0≦・ B , 0＜・ S.

ここで０とは空集合のことであり，＜・は≦・及び「にはあらず」によって「自然に」定義される二項関係であるが，さらに彼はこの後の段落で次のように注意を促している。

It may be helpful to remark that the second part of the above definition says, in effect, that it will not affect the person's guess to offer him a consolation prize in case neither B nor C obtains,but D happens to.

さらにまたこの後で,「行為間の「個人」の選好によって定義したnot more probable thanと読まれる事象間の関係は定性的確率である」という内容の「定理１」が提示されるのである。なおサヴェジ氏はその証明を省略しているが，上で筆者が論じたことにより証明は明らかであるだろう。つまり≦＊は「個人的な」定性的確率とでもよぶべき,「個人」の行為に基づく，事象間の関係なのである。なおまた定性的確率の定義における三つの性質を以下では順にQL1, QL2,QL３として言及する。

５．定性的確率に関するいくつかの命題

前節の「定理１」から従う命題の例として§3.2の末尾に32頁から33頁にかけて演習問題とし

て11個の小さな命題が掲げてあるのだが，その直前の段落を引けば次である。

You will have no difficulty in proving that Theorem 1 follows from P1-5.Theorem 1 has many consequences of the sort one would expect if $\leq$ meant“not more probable than”in any sense having the mathematical properties ordinarily attributed to numerical probability. This is illustrated by the following list of exercises,which should not only be proved formally, but also interpreted intuitively.One easy exercise not included in the list below, because it is not strictly a consequence of Theorem 1 alone, is to show that $B \doteq 0$, if and only if B is a null event.

この末尾の文の，容易に証明はできるが「定理１」から直接に従うとは見なし難い命題とは，前節の「定性的確率の定義」の前で示したものにほかならない。そこの証明では，「実際上不可能な事象，virtually impossible event，null event」の定義とP３とが「自然に」利用されており，「定理１」の,つまり「$\leq *$ は定性的確率である」の，直接的帰結とは言い難いであろう。なお,ここではこの演習問題の内容を少しだけ増して提示する。またサヴェジ氏は 1,2a,2b,3,4a,4b,4c,4d,5a,5b,6, と番号を振っているが，ここではただの通し番号とする。

１．$X \subset Y$ ならば $\phi \leq * X \leq * Y \leq * S$ 。

ここで結論の左端はQL３より従う。また右端は,$Y \subset S$ であるので，一般の場合より従う。仮定より $Y = Y' \cup X, Y' \cap X = \phi$ とできる。QL３より $\phi \leq * Y'$。QL２より $\phi \cup X \leq * Y' \cup X$。故に $X \leq * Y$ が従う。

２．X,Yのおのおのと Z との共通部分は空であるとする。この場合,$X < * Y$ と $X \cup Z < * Y \cup Z$ とは同値である。

QL２より $Y \leq * X$ と $Y \cup Z \leq * X \cup Z$ とは同値である。故に，おのおのの否定の間でも同値が成立する。故に，$< *$ の定義により結論が従う。

３．$\phi < * Y$ かつ X と Y との共通部分は空であるならば，$X < * X \cup Y$。

上の２により $\phi \cup X < * Y \cup X$。ここで左辺はXにまた右辺は $X \cup Y$ に等しい。

４．$X \leq * Y$ と $\sim Y \leq * \sim X$ とは同値である。

前半を仮定する。$X = X \cap S = X \cap (\sim Y \cup Y) = (X \cap \sim Y) \cup (X \cap Y)$ であり，同様に，$Y = (Y \cap \sim X) \cup (Y \cap X)$。故にQL２より $X \cap \sim Y \leq * Y \cap \sim X$。さらにまたQL２より，$(X \cap \sim Y) \cup (\sim X \cap \sim Y) \leq * (Y \cap \sim X) \cup (\sim X \cap \sim Y)$。ここで左辺は $(X \cup \sim X) \cap \sim Y = S \cap \sim Y = \sim Y$ に等しく，同様にして右辺は $\sim X$ に等しく，故に $\sim Y \leq * \sim X$ が従う。また逆に後半を仮定すると,既に示したことにより，$\sim(\sim X) \leq * \sim(\sim Y)$ となるが，ここで左辺はXにまた右辺はYに等しい。

またさらに $< *$ 及び $= *$ の定義に注意すれば「$X < * Y$ と $\sim Y < * \sim X$ とは同値である」及び「$X = * Y$ と $\sim X = * \sim Y$ とは同値である」が従う。

５．$X \leq * Y$ かつ Y と Z との共通部分が空ならば，$X \cup Z \leq * Y \cup Z$ が従う。

$X' = X \cap \sim Z$ とすると上の１より $X' \leq * X$ となる。故にQL１より $X' \leq * Y$。またQL２より $X' \cup Z \leq * Y \cup Z$。ここで左辺は $X \cup Z$ に等しい。

また仮定の $\leq *$ が $< *$ であれば結論の方も $< *$ となる。

６．$X \leq * \phi$ ならば，$X = * \phi$ かつ任意の事象Yに関して $X \cup Y = * Y$。

QL３より $\phi \leq * X$ であるので前半は $= *$ の定義により従う。また上の５より $X \cup Y \leq * \phi \cup Y = Y$。一方上の１より $Y \leq * X \cup Y$。故に $= *$ の定義により後半も従う。

7．$S \leq * X$ならば，$X = * S$ かつ任意の事象Yに関して$X \cap Y = * Y$。

上の1より$X \leq * S$ であるから前半は $= *$ の定義により従う。また上の4により$\sim X \leq * \sim S = \phi$。故に上の6により$\sim X \cup \sim Y = * \sim Y$。さらにまた上の4により$X \cap Y = \sim(\sim X \cup \sim Y) = * \sim(\sim Y) = Y$。故に$X \cap Y = * Y$。

また4を用いずに示してみると，上の1より$Y \cup (X \cap \sim Y) \leq * S$ 。また$X = (X \cap Y) \cup (X \cap \sim Y)$ 。故に $S \leq * X$ならば，QL 1により，$Y \cup (X \cap \sim Y) \leq * (X \cap Y) \cup (X \cap \sim Y)$ 。故にQL 2により$Y \leq * X \cap Y$。一方上の1により$X \cap Y \leq * Y$。故に $= *$ の定義により結論が従う。

8．$X \cup Z \leq * Y \cup Z$かつXとZとの共通部分が空であるのならば，$X \leq * Y$。

$Y' = Y \cap \sim Z$とすると,$X \cup Z \leq * Y' \cup Z$かつ$Y' \cap Z = \phi$。故にQL 2より$X \leq * Y'$。また上の1より$Y' \leq * Y$。故にQL 1より$X \leq * Y$。

なお，仮定が $< *$ であるのならば結論も $< *$ となる。

9．$X \leq * Y$かつ$X' \leq * Y'$であり，さらにYとY'との共通部分は空であるとする。この場合，$X \cup X' \leq * Y \cup Y'$ が従う。

$X' = (X' \cap Y) \cup (X' \cap \sim Y)$及び$Y = (Y \cap X') \cup (Y \cap \sim X')$という分割に注意して，$Z = X' \cap Y, X'' = X' \cap \sim Y, Y'' = Y \cap \sim X'$ とする。$Y \cap X'' = \phi$なので上の5より$X \cup X'' \leq * Y \cup X''$。ところが$Y = Y'' \cup Z$より右辺は$Y'' \cup (Z \cup X'')$に等しく，また$Z \cup X'' = X'$。故に$X \cup X'' \leq * Y'' \cup X'$。また$X' \leq * Y'$及び5より,$X' \cup Y'' \leq * Y' \cup Y''$。故にQL 1より$X \cup X'' \leq * Y' \cup Y''$。また $(Y' \cup Y'') \cap Z = \phi$ であるのでやはり5により，$X \cup X'' \cup Z \leq * Y' \cup Y'' \cup Z$。ところが$X'' \cup Z = X'$かつ$Y'' \cup Z = Y$。故に$X \cup X' \leq * Y \cup Y'$が従う。

なお仮定の内の少なくとも一方が$< *$である場合には結論は$< *$となる。

10. $X \cup X' \leq * Y \cup Y'$であって$X, X'$の共通部分が空であるならば，$X \leq * Y$あるいは$X' \leq * Y'$。

結論を否定すると「$Y < * X$かつ$Y' < * X'$」となる。故に上の9により$Y \cup Y' < * X \cup X'$。これは仮定に反する。

なお仮定が$< *$である場合には,結論の$\leq *$を$< *$に置き換えてよい。

11. $X \leq * \sim X$かつ$\sim Y \leq * Y$ならば，$X \leq * Y$が従う。

結論を否定すると$Y < * X$となる。これと仮定の前半により$Y < * \sim X$が，また後半により$\sim Y < * X$が従う。故に上の9より$Y \cup \sim Y < * \sim X \cup X$。故に$S < * S$となるが，QL 1より$S \leq * S$であるので，$< *$の定義により矛盾が生じる。

なお仮定の内の少なくとも一方が$< *$であれば結論も$< *$となる。実際，例えば，仮定の前半が$< *$であるとする。一方$X < * Y$の否定は$Y \leq * X$である。そこでこの否定と仮定の前半とにより$Y < * \sim X$が,また後半により$\sim Y \leq * X$が従うので，上の9より$S < * S$となる。

また仮定が共に $= *$ であれば($= *$ の定義により)結論も $= *$ となる。

ところでこの11（原文では6）に対してサヴェジ氏はequality holding in the conclusion,if and only if it holds in both parts of the hypothesisと述べているが，ifの方は上で注意したように $= *$ の定義によりほとんど明らかなのだが，only ifの方は従わないのである。例えば，棒を三等分するように目印をつけて,一方の端の部分をXとし他方をYとすれば,これらの長さは三分の一となり等しいが,$\sim X$及び$\sim Y$の長さは共に三分の二である。

6．定量的確率の定義と定性的確率への一致

§3.3,33,の冒頭の段落の末尾の二文で，「「世界」はいくらでも細かく，その「個人」の定性的確率に関して，等分割できる」,つまり「$S=X_1\cup\cdots\cup X_n, X_i\cap X_j=\phi(i\neq j), X_i=*X_j(i,j=1,\cdots,n)$，を満たす無限に多くの自然数nと「世界」に対する一様な分割$\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$とが少なくともその「個人」にとっては存在する」ということを，「個人」に対する「要請，postulate」としてしまうことによって，その「個人」にとっての定量的確率の「存在」を示してしまおうという流儀に対して，サヴェジ氏は不信感を示しているが，この二文をそのまま引けば次である。なお後半にno more probable thanとあるのは多分not more probable thanのことであろう。

It might fairly be objected that such a postulate would be flagrantly ad hoc.On the other hand,such a postulate could be made relatively acceptable by observing that it will obtain if,for example,in all the world there is a coin that the person is firmly convinced is fair,that is,a coin such that any finite sequence of heads and tails is for him no more probable than any other sequence of the same length;though such a coin is,to be sure,a considerable idealization.

例えば，「「長さ」が等しい」という場合には，測定のための基準と方式とが明確に規定されたうえでの「等しい」であるはずだが，「「確からしさ」が等しい」という場合の「等しい」は，その内訳が「長さ」の場合ほど明白であるとは言い難いであろう。実際，「確からしさ」での「等しい」が「長さ」での「等しい」よりも直観的により明白な内容であるなどとは（通常の「個人」にとっては）言えないはずであるし，また「世界」に対する「一様な」分割の存在を，なんらかしらかの「一様な」乱数（ただしいわゆる数ではなくHやTというような記号でもよい）発生装置の存在を天下り式に認めてしまって，証明してしまうなどというやりかたによって，「確からしさ」の基礎づけが遂行できるとも言い難いであろう。そこでサヴェジ氏は，「世界」に対する「一様な」分割の存在を自明視せずに，「個人」にとっての定量的確率の存在を示さなければならなくなるのである。

ところでこの「定量的確率，quantitative probability」という言葉は§3.3,33,の3番目の段落から持ち出したのであり，これを引けば次である。

To begin with,let me say precisely what is meant,in the present context,by a probability measure,this being the standard term for what I would here otherwise prefer to call a quantitative probability,and what it means for a probability measure to be in agreement with a qualitative probability.

さらにこの次ぎの段落をそのまま引く。

A **probability measure** on a set S is a function $P(B)$ attaching to each $B\subset S$ a real number such that:

1. $P(B)\geq 0$ for every B .
2. If $B\cap C=0$, $P(B\cup C)=P(B)+P(C)$.
3. $P(S)=1$.

This definition,or something very like it,is at the root of all ordinary mathematical work in probability.

ところで§3.4,40,の2番目の段落でサヴェジ氏自身が認めているように,「確率測度，probability measure」という術語は完全加法族や完全加法性との連関で定義されるのが普通であるので，ここでは文脈上より適切な「定量的確

率」の方を用いることとする。なおサヴェジ氏は§2.5,14,の末尾の段落で，The notation **f** will be used to denote an act, that is,a function,attaching the consequence $f(s)$ to the states. The notation **f** is logically a better name for a function than the more customary $f(s)$ for exactly the same reason that the word "logarithm" is a better term for logarithm than "logarithm of x" would be. と注意しているが，この流儀によれば，上の定義は，…is a function P attaching to each $B \subset S$ a real number $P(B)$ such that: …,とでもすべきであろう。

また「定量的確率が定性的確率に一致する」とはどういうことかが§3.3,34,の冒頭の段落で定義されているが,そこでは「定量的確率が定性的確率に一致する（あるいは厳格に一致する），…(strictly)agrees with…」と「ほとんど一致する，…almost agrees with…」との二つの「一致する」が言及されている。（定量的確率の定義とともに）これらを提示すると次のようになる。

定義。PがS上の定量的確率であるとは，PがSの各部分集合に対して（即ち,「世界」における各事象に対して）実数を対応させる写像であって次の1,2,3を満たすことであると，定義する。

1. 任意の事象Xに対して $0 \leqq P(\mathrm{X})$ 。
2. 任意の事象X,Yに対して，これらの共通部分が空であるのならば，$P(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) = P(\mathrm{X}) + P(\mathrm{Y})$ 。
3. $P(S) = 1$ 。

定義。PをS上の定量的確率とし$\leq *$を定性的確率とする。この場合，Pが$\leq *$に（厳格に）一致するとは，任意の事象X,Yに対して，$P(\mathrm{X}) \leqq P(\mathrm{Y})$とX$\leq *$Yとが同値となることであると，定義する。また$P$が $\leq *$ にほとんど一致するとは，任意の事象X,Yに対して，X$\leq *$Yならば $P(\mathrm{X}) \leqq P(\mathrm{Y})$となることであると，定義する。（この定義により「「厳格」ならば「ほとんど」」となることは明らかである。）

7．P6′及び第6公準

第6公準P6は，§3.3,38,の後半でサヴェジ氏がP6′として導入している（「個人」の）定性的確率への要請を動機として，39頁から40頁にかけて§3.3の末尾で提示されている。また34頁から38頁にかけての「ほとんど一様な分割，almost uniform partition」,「精密，fine」,「ほとんど同等，almost equivalent」,「緊密，tight」，などに関する議論は，P6′の動機づけを彼自身の立場から探査するために展開されているのである。このP6′の内容は次である。

P6′　X及びYを「世界」Sの任意の事象とし$\leq *$を「個人」の定性的確率とする。この場合，X$<*$Yならば，Sのある分割が存在してその各項Zに対して，X∪Z$<*$Y。

さらにまたこれに続く38頁から39頁にかけての段落を，冒頭の一文を除いて引用すると次ぎである。

Suppose,for example,that you yourself consider $B<C$,that is,that you would definitely rather stake a gain in your fortune on C than on B. Consider the partition of your own world into 2^n events each of which corresponds to a particular sequence of n heads and tails, thrown by yourself,with a coin of your own choosing.It seems to me that you could easily choose such a coin and choose n sufficiently large so that you would continue to prefer to stake your gain on C, rather than on the union of B and any particular sequence of n heads and tails. For you to be able to do so, you need by no means consider every sequence of heads and tails equally probable.

例えば，その「個人」にとって$X<^*Y$であるとし，一方で彼は，一枚のコインを実際に自分で選んで，それを何回か自分で投げ上げることによって得られる（各回の結果が「表」か「裏」かである）「裏」と「表」とからなる系列を観察するという，想像上の実験を定めるものとする。この場合，投げ上げの回数をmとすれば可能な実験結果の総数は2^m個であるが，各実験結果を「世界」における「できごと」と見なせば，「世界」は2^m個の事象Z_1, Z_2, … Z_M, $M=2^m$, へと分割されることとなる。すると各項$Z_i, i=1,2,\cdots$, Mに対して,$X\cup Z_i<^*Y$あるいは$Y\leq^*X\cup Z_i$であるが，（例えば「個人」が自分の財布のありふれたコインを選んだとして）投げ上げの回数mを「充分に」大に取れば，「各項$Z_i, i=1,2,\cdots,M$に対して$X\cup Z_i<^*Y$」が，少なくともその「個人」にとっては，満たされることとなるとしても不当ではないであろう。しかしM個の系列が「確からしさ」において互いに同等である，つまり$\langle Z_1,Z_2,\cdots,Z_M\rangle$は「世界」に対する一様な分割である，などと仮定する必要はないのである。

ところで$X<^*Y$は解釈上は，「「個人」にとっては，XよりもYの方が確からしい」，つまり（$c'<^\circ c$として）くじ$[c,c',X]$よりもくじ$[c,c',Y]$の方を自身にとって得であるとして選ぶという，いわば「直接的な」内容を表すはずのものである。しかし「定義」からすれば，これは「$Y\leq^*X$にはあらず」というように否定によって示される「間接的な」状況を指すのである。だがP6′は，$<^*$ が$\leq^*$に対する否定によって導入される単なる派生的な関係ではなく，$X<^*Y$を満たすX,Yの間には（たとい微弱ではあっても，従って上で述べたmを「充分に」大に取る必要があるであろうが）「個人」にとっての（損得上の）格差が紛れもなく存在していることを示唆しているようである。つまりP6′によって，$<^*$ が（消去法的選択やその否定などではない）本来の選択であることが暗に示されているようなのである。

ところでこのP6′からサヴェジ氏の議論を逆方向に少し読み直してみると，結局彼は，定性的確率$\leq^*$の一般的な定義（つまり上の第4節でのQL1,QL2,QL3）と$<^*$に関する要請P6′とから$\leq^*$に（厳格に）一致する定量的確率の一意的存在を導いていることとなる。

実際，§3.3,37,の「定理3」の証明の末尾の部分である38頁のPart 5で利用されている論法によって（$\omega=\{0,1,\cdots,n,\cdots\}$，0から始まる自然数の全体，として),任意の事象Aに対して，三つ組の系列$\langle X_n,Z_n,Y_n\rangle, n\in\omega$,で,$\langle X_n,Z_n,Y_n\rangle$はAに対する分割であり，$X_n\leq^*Y_n\cup Z_n$, $Y_n\leq^*X_n\cup Z_n$, $X_n\subset X_{n+1}$, $Y_n\subset Y_{n+1}$, かつ$Z_{n+1}\leq^*Z_n\cap\sim Z_{n+1}$,を満たすものが存在することが従う。

このような三つ組の系列によって，例えば$X=\cup\{X_n\mid n\in\omega\}, Y=(\cup\{Y_n\mid n\in\omega\})\cup(\cap\{Z_n\mid n\in\omega\})$とすると，Aに対する等分割$\langle X,Y\rangle$が，即ち$A=X\cup Y, X\cap Y=\phi, X=^*Y$,を満たす$\langle X,Y\rangle$が,存在することが従う。なおここで（P6′により）$\cap\{Z_n\mid n\in\omega\}=^*\phi$となる。

なおこの三つ組系列の存在を示す際に，サヴェジ氏は次の原理を暗黙の内に（あるいはほとんど本能的に）利用しているようである。つまり，「Aを空ではない任意の集合とし，またRをA上の任意の二項関係とする。この場合，任意の$x\in A$に対してある$y\in A$が存在して$R(x,y)$ならば，ωからAへのある写像fが存在して任意の$n\in\omega$に対して$R(f(n),f(n+1))$。」という，従属選択（depending choice）の原理（あるいは公理）がだまって利用されているのである。なお注意すべきなのは,$R(f(i),f(i+1)), i=0,1,\cdots,n$,を満たす系列$\langle f(0),f(1),\cdots,f(n),f(n+1)\rangle$を数学的帰納法で構成しても，「個人」の面前には系列 $n+1$, $n+2$, $n+3,\cdots$,が続いており，彼が直面している状況は始めの場合と本質的には変化していない，ということである。

ところで（定性的確率の定義，P6′,従属選択の原理により）任意の事象が等分割されることが示されるのだが,一方，「世界」Sを二つの部分に等分割し，さらにまたこれらのおのおの

を二つの部分に等分割し，さらにまたこれらの各部分を二つの部分に等分割し,…,という等分割の系列を考えるのならば，各m∈ω番目の段階においては「世界」に対する2^m個の部分への等分割が，つまりSに対する2^m個の項からなる一様な分割が，得られることとなる。

このような一様な分割の系列によって，ただし2^m個への等分割では，当然，各項に対して「確率」1／2^mが配分されることとなるが，「世界」の各事象の「確率」を評価できることとなり，その結果としてS上の定量的確率Pが定義されることとなる。さらにまたこのPが定性的確率 ≦＊ に厳格に一致することも，また一意的に定まることも，示される。

またサヴェジ氏はさらにこのPに対して,それがいわば「細密」であること，つまり，「Aを任意の事象としaを０以上１以下の任意の実数とする。この場合，$B⊂A$を満たすある事象Bが存在して，$P(B)=a \cdot P(A)$ 。」が従うことを，示しているのである。

ところでより細かい点を読み取るために§3.3,38,の「定理４」を次に引く。

Theorem 4　≦・is both fine and tight,if and only if,for every B ＜・C,there exists a partition of S the union of each element of which with B is less probable than C.

ここで≦・は一般の定性的確率を表す。また後半では，＜・が(この定理の後で提示される) P６′に相当する性質を満たすことが主張されている。つまり，「＜・がP６′に相当する性質を満たすことと，≦・が「精密,fine」かつ「緊密,tight」であることとは，同値である。」というのがこの定理の内容である。ところで「精密」の定義だが，Wiley版の36頁から37頁にかけての一文では，If and only if,for every B ＞・０, there is a partition of S ,no element of which is more probable than B ;　≦・is *fine.* となっているが，Dover版では,…, no element of which is as probable as B ;　≦・is *fine.* となっている。これはDover版の37頁の脚注によればMalcolm Pikeの指摘によって修正したとのことである。しかしこのas probable asは文脈からすればat least as probable asのことであろう。従って，記号≦＊を流用して一般の定性的確率を表すものとすれば，「≦＊が精密であるとは，φ＜＊Xを満たす任意のXに対して「世界」に対するある分割が存在してその分割の各項Yに対してY＜＊X，ということであると定義する。」となる。

一方「緊密」の定義は37頁の冒頭の段落の末尾で定義されているのだが，その際「ほとんど同等，almost equivalent」という事象間の関係が用いられているのであり，その定義を述べれば，「「XとYとはほとんど同等である」とは「X∩V＝Y∩W＝φ，φ＜＊V,かつφ＜＊Wを満たす任意のV,Wに対して，Y≦＊X∪VかつX≦＊Y∪Wということであると定義する。」となる。そこでさらに,「「任意のX,Yに対して，X＝＊Yと「XとYとはほとんど同等である」とは同値である」という場合,かつその場合に限って，≦＊は緊密である。」と，定義するのである。なおX,Yが同等ならば「ほとんど同等」となることは明らかである。

ところが「緊密」であることと「X＜＊Yを満たす任意のX,Yに対してあるZが存在して，X∩Z＝φ，φ＜＊Z，かつX∪Z＜＊Y」とは同値であるが従う。実際，「緊密」を仮定しておいて，さらに後者の否定を仮定すると,「X＜＊Yを満たすあるX,Yが存在して，X∩Z＝φ，φ＜＊Zを満たす任意のZに対してY≦＊X∪Z」となるが，これより「このX,Yはほとんど同等であるが，X＝＊Yではない」が従い，「緊密」という仮定に反することとなる。また逆を示すために後者の主張を仮定しておいて，「緊密」ではないとする。この場合「X＜＊Yかつ，X∩V＝φ，φ＜＊Vを満たす任意のVに対してY≦＊X∪V」を満たすX,Yが存在するが，これは仮定に反する。ところで（両者は同値ではあるが）

後者の主張の様式によれば「ほとんど同等」を経由する必要がないので論証の際に便利である。

ところで上の「定理4」は「≦＊が精密かつ緊密であることと＜＊がP6′を満たすこととは同値である」となるが，サヴェジ氏は証明は容易であるとして省略しているので補っておくこととする。まず後者から前者が従うことを示すためにP6′を仮定する。「精密」であることは，ϕ＜＊Xとすると,P6′により，「世界」に対するある分割が存在して,その各項Yに対して,Y＝ϕ∪Y＜＊X，より従う。次に「緊密」であることを示す。X＜＊Yとすると，P6′により，「世界」に対するある分割が存在してその各項Zに対してX∪Z＜＊Y。ここで各Zに対してZ∩～X＝＊ϕとすると，X＝＊ Sとなり，S ＜＊Yとなって Y≦＊Sに反することとなる。故に，ϕ＜＊Z∩～Xを満たすZが存在するが，Z′＝Z∩～Xと置くと，X∪Z′＜＊Y，X∩Z′＝ϕ，ϕ＜＊Z′となり，上の段落で注意したように，≦＊は「緊密」となる。次に逆を示すために前者を仮定する。またX＜＊Yとする。「緊密」であるので，X∪Z＜＊Y，X∩Z＝ϕ，ϕ＜＊Zを満たすZが存在する。一方「精密」であるので，このZに関して「世界」に対するある分割が存在してその各項Vに対してV＜＊Z。故に，この各項Vに対してX∪V＜＊X∪Z＜＊Y。故に，「世界」に対するある分割が存在してその各項Vに対してX∪V＜＊Y，が従う。

ところで§3.3の末尾(39頁から40頁)で第6公準P6が提示されるのだが，その直前の段落を引けば次ぎである。

As far as the theory of probability per se is concerned, postulate P6′is all that need be assumed,but in Chapter 5 a slightly stronger assumption will be needed that bears on acts generally, not only on those very special acts by which probability is defined. Therefore, I am about to propose a postulate, P6, that obviously implies P6′and will therefore supersede it.This stronger postulate seems to me acceptable for the same reason that P6′ itself does.

つまり[c,c′,X]というような特別な様式の行為のみを取り扱うのではなく，「個人」の行為一般にかかわる，しかしその動機づけがP6′と同様に不自然ではない，(規範としての) 公準を提示するというのである。このP6の内容を示せば次ぎである。

第6公準。**f**,**g**を行為とし*c*を「結果」とする。またここで**f** ＜・ **g**と仮定する。この場合，「世界」Sに対するある分割が存在して以下を満たす。この分割の任意の一つの項上で**f**,**g**の値が常に*c*に一致するようにして，またS上の他の部分では値を変更しないようにして，得られる変形された行為を，おのおの**f**′,**g**′とすると，**f**′ ＜・ **g** かつ **f** ＜・ **g**′。

ここでもまた，＜・ が 選好 ≦・ の単なる否定ではなく，たとい微弱ではあっても (「個人」にとっての損得上の) 格差を表していることが示唆されているようである。

8．条件つき確率の「定義」について

X≦＊Yとは，c′＜◦cを満たす任意の「結果」に対して[c,c′,X] ≦・ [c,c′,Y]，ということであった。またここで[c,c′,X]とは，X上で値cのみを，また～X上で値c′のみを取る，「個人」の行為を表すのであった。ところでP5によりc′＜◦cを満たす「結果」の対の存在が保証されているので，このようなc,c′をあらかじめ固定しておけば，P4により，[c,c′,X] ≦・[c,c′,Y]とX≦＊Yとは同値となる。

ところで行為間の選好に対しては (P2との連関で述べたように) 条件つきの選好がかなり自然に導入できるのであった。そこで条件つきの定性的確率を，X≦＊Y given Zとは[c,c′,X] ≦・ [c,c′,Y]given Zのことであるとして「定

義」することは正当であるように思われるのである。しかし，この「定義」が成立するためには，c,c′の選び方によらずに $\leq$・given Zが定まることが保証されなければならない。だが，～Z上で値c′のみを取るように[c,c′,X]を変形した行為とは，（～X∩Z）∪～Z＝～X∪～Z上でc′を，またX∩Z上でcを取る，行為[c,c′,X∩Z]であるから,先の $\leq$・given Zは[c,c′,X∩Z] $\leq$・ [c,c′,Y∩Z]となる。しかしこれはX∩Z$\leq$＊Y∩Zにほかならない。

つまり「条件つき定性的確率，conditional qualitative probability」を行為間の条件つき選好を経由して「定義」する必要はなく，「X$\leq$＊Y given ZとはX∩Z$\leq$＊Y∩Zのことであると定義する」とすればよいのである。またX$<$＊Y given Zは「Y$\leq$＊X given Zにはあらず」によって「定義」されるが，これはX∩Z$<$＊Y∩Zにほかならない。

また条件つき定性的確率が実際に定性的確率であることを確認する必要がある。ただしここで$\phi<$＊Zとする。まず $\leq$＊given Zは事象間の二項関係である。またQL1,つまり$\leq$＊given Zが「単純な順序」であることは，$\leq$＊が比較可能性と推移性とを満たすので従う。次に，X及びYのVとの共通部分は共に空であるとする。X$\leq$＊Y given ZとするとX∩Z$\leq$＊Y∩Z。故にQL 2より，（X∩Z）∪(V∩Z)$\leq$＊（Y∩Z）∪(V∩Z)。故に（X∪V）∩Z$\leq$＊（Y∪V）∩Z。故にX∪V$\leq$＊Y∪V given Z。また逆をたどれば逆が得られる。また$\phi<$＊ZよりQL 3も従う。つまり，$\phi<$＊Zとすると，QL1,QL2,QL 3は $\leq$＊given Zへと「遺伝」することとなる。

次に，$\phi<$＊Zとし $\leq$＊ はP 6′を満たすとすれば，P 6′も「遺伝」する。実際，X$<$＊Y given ZとするとX∩Z$<$＊Y∩Z。故に，Sに対するある分割が存在してその各項Vに対して，(X∩Z)∪V$<$＊Y∩Z。また，（X∪V）∩Z＝(X∩Z)∪(V∩Z) $\leq$＊ (X∩Z)∪V$<$＊Y∩Z。故に(X∪V)∩Z$<$＊Y∩Z,即ちX∪V$<$＊Y given Z。ここでVは「ある分割」の任意の項であった。

なお§3.5,44,の冒頭の段落の「定理１」を引くと次ぎである。

THEOREM 1　If $\leq$・is a qualitative probability, then so is $\leq$・given D . If in addition $\leq$・is fine or tight, then $\leq$・given D is correspondingly fine or tight.

ここで$\phi<$・Dは暗黙の内に仮定されている。また主張の前半は，上で示したように，「条件つき定性的確率」が定性的確率になっているということである。また後半は「精密」も「緊密」も共に「条件つき」の場合へと「遺伝」するということであるが，前節で§3.3,38,「定理４」との連関で示したように，「精密」かつ「緊密」とP 6′とは同値であるから，上で示したP 6′の「遺伝」を後半の主張は含んでいることとなる。ところでサヴェジ氏はこの「定理１」の証明を省略しているが，ここでは後半の成立を確認することとする。

定性的確率$\leq$＊は「精密」であると仮定する。また$\phi<$＊Xとする。この場合,$\phi<$＊Y given Xとすると$\phi<$＊Y∩X。「精密」であることより,「世界」に対するある分割が存在してその各項Zに対して,Z$<$＊Y∩X。ところがZ∩X$\leq$＊Z。故にZ∩X$<$＊Y∩Xとなり，Z$<$＊Y given Xが従う。ここでZは「世界」に対するある分割の任意の項であった。

また$\leq$＊は「緊密」であると仮定し，X$<$＊Y given Z，$\phi<$＊Zとする。この場合X∩Z$<$＊Y∩Zとなる。故に（X∩Z）∪～Z$<$＊(Y∩Z)∪～Z。また「緊密」であることより，((X∩Z)∪～Z)∩V＝(X∪～Z)∩V＝ϕ，$\phi<$＊V,(X∩Z)∪～Z∪V$<$＊(Y∩Z)∪～Zを満たすVが存在する。故に(X∩Z)∪V$<$＊Y∩Z。ところがV＝V∩ZであるのでX∪V$<$＊Y given Zが従う。またX∩V＝ϕ。また$\phi<$＊V given Z。

ところでこの「定理１」に続く段落でサヴェジ氏は，通常は条件つき確率の「定義」とされてい

る等式が，彼のそれまでの議論から従うことを注意しているのである。この段落をそのまま引くと次ぎである。(なお始めの文の末尾の$\leq\cdot$は$\leq\cdot$ given D のことであろう。)

If $\leq\cdot$ is fine,then,for any D that is not null,there exists,in view of Theorem3.3, one and only one probability measure $P(B \mid D)$,the (**conditional**)**probability of** B **given** D , that almost agrees with $\leq\cdot$. But,just as one would expect from the traditional study of numerical probability,and as may be easily verified, $P(B\cap D)/P(D)$considered as a function of B for fixed D is a probability measure that almost agrees with $\leq\cdot$ given D . Therefore,

(1)　$$P(B \mid D)=P(B\cap D)/P(D) .$$

ここでは定性的確率が「精密」の場合に言及しているが，定性的確率$\leq *$がP 6′(つまり「精密」かつ「緊密」)を満たす場合にはこれに厳格に一致する定量的確率 P が一意的に存在する。またこの場合前節で示したように($\phi<*$Xとして)条件つき定性的確率$\leq *$ given XもP 6′を満たすので，これに厳格に一致する定量的確率 $P(\cdot\mid \mathrm{X})$ が一意的に存在する。ところで任意の事象Yに対して$Q(\mathrm{Y};\mathrm{X})=P(\mathrm{Y}\cap \mathrm{X})/P(\mathrm{X})$と定めることによって写像$Q(\cdot;\mathrm{X})$を定義すると，これは定量的確率の定義を満たす。一方，Y$\leq *$Z given XとY∩X$\leq *$Z∩Xとは同値。また後者と$P(\mathrm{Y}\cap \mathrm{X})\leqq P(\mathrm{Z}\cap \mathrm{X})$とは同値。またこれと $P(\mathrm{Y}\cap \mathrm{X})/P(\mathrm{X})\leqq P(\mathrm{Z}\cap \mathrm{X})/P(\mathrm{X})$ とは当然同値。故に，Y$\leq *$Z given Xと$Q(\mathrm{Y};\mathrm{X})\leqq Q(\mathrm{Z};\mathrm{X})$とは同値。従って,定量的確率$Q(\cdot;\mathrm{X})$は$\leq *$given Xに一致することとなる。故に，$P(\cdot\mid \mathrm{X})$の一意性により，任意の事象Yに対して$P(\mathrm{Y}\mid \mathrm{X})=Q(\mathrm{Y};\mathrm{X})=P(\mathrm{Y}\cap \mathrm{X})/P(\mathrm{X})$。

さらにこれに続く段落を引けば次ぎである。

As was explained in § 2.7,preference among acts given B can suggestively be expressed in temporal terms.Analogously,the comparison among events given B and, therefore, conditional probability given B can be expressed temporally.Thus $P(C \mid B)$ can be regarded as the probability the person would assign to C after he had observed that B obtains. It is conditional probability that gives expression in the theory of personal probability to the phenomenon of learning by experience.

本来条件つき確率は(条件つき選好と同様に)いわゆる時の流れというような時刻の経過に依存せずに，つまり無時間的に，定義されまた解釈されるものなのだが，一方，実際的な事柄との連関でこれを利用する場合には(やはり条件つき選好と同様に)時間的表現を用いることで，解釈しやすい雰囲気をこれに随伴させることができるのである。なお，「「条件つき選好」が,また「条件つき確率」の場合も同様に，時の流れにかかわる言い回しによって「示唆的に，suggestively」言い表すことができる」というのは，もともとは無時間的に定義される事柄なのだが,これを時間的に表現してしまうと何故かこれに「わかりやすい雰囲気」が伴うようになるという実際上の状況を，サヴェジ氏の立場から，考慮に入れた上での発言であるだろう。例えば「条件つき」確率$P(C\mid B)$を時間的に言い表してみると，「「個人」がもし仮にではあるが「事象Bが通用すること」を観察したとして，その「後に」，彼が「事象Cが通用すること」へと配分することとなるであろう確率」ということとなる。なお仮定法的な言い回しであるwould assign toとかhad observed thatとかは，例えば「事象Bが通用するか否かが定まった「後に」，事象Cが通用するか否かが定まる」というような，時刻の経過に依存した何らかの順番がB,C間に暗黙の内に想定されているわけではないことへの(読

者への）間接的な注意となっている。だがこの「条件つき」確率が,「個人」の「経験による学習, learning by experience」とよばれる現象への, その「個人」にとっての「確からしさ」に基づく, 表現を与えることともなるのである。

なおサヴェジ氏はこれに続く段落で事象間の「独立性, independence」と「無縁性, irrelevance」とに言及しているが, これを引けば次である。

In accordance with established usage,a pair of events B,C are called independent if $P(B \cap C)=P(B)P(C)$. More generally,a set of events are called **independent**, if for every finite set of them,say$B_1,\cdots,B_n$,

$$(2)\qquad P(\cap_i B_i)=\Pi_i P(B_i)\ .$$

Obviously,if D is not null, B and D are independent; if and only if $P(B \mid D)=P(B)$, in which case D may fairly be called **irrelevant to** B.

ここで$P(\cdot \mid D)$とは,ただし$\phi <^* D$として,事象（に対応して定まる「くじ」の）間の条件つき選好$\leq^*$given D に一致する定量的確率であり, 一方 $P(\cdot)$ は, givenという個人的な条件づけ操作を表には出さない, 事象間選好$\leq^*$に一致する定量的確率である。ところがもし$P(B \mid D)=P(B)$であれば, 少なくともBの「確からしさ」に関する限り, given D を行うか否かにかかわらず諸事象間でのBの序列は改変されないのであるから, given D という操作は（あるいは事象Dは）事象Bとは「無縁である」と言い表しても不当ではないであろう。またこの場合, 上で示した公式により $P(B \mid D)=P(B \cap D)/P(D)$ であるので, $P(B \cap D)=P(B)P(D)$が従い, BとDとは「独立である」となる。また逆に「独立である」とすれば$P(B \cap D)=P(B)P(D)$であるが, $\phi <^* D$ より $0<P(D)$であるので, $P(B \cap D)/P(D)=P(B)$。ところが同様の公式によりこの左辺は$P(B \mid D)$に等しいので, $P(B \mid D)=P(B)$が従い, DはBとは「無縁である」となる。

さらにまた§3.5,45,の2番目の段落では「分割公式, partition formula」と「ベイズルール, Bayes'rule」とが言及されるのだが,これを引けば次である。

The following *partition formula* is well known and easy to prove:

$$(3)\qquad P(C)=\sum_j P(C \mid B_j)P(B_j)$$

where B_i is a partition of S into non-null sets. If,further,C is not null,it is also trivial to derive the celebrated **Bayes' rule** (or **theorem**),

$$(4)\qquad P(B_i \mid C)=\frac{P(C \mid B_i)P(B_i)}{P(C)} =\frac{P(C \mid B_i)P(B_i)}{\sum_j P(C \mid B_j)P(B_j)}\ .$$

Illustrations of these formulas are found in all elementary textbooks on probability,as well as in later sections of this book.

これらの公式を示す前に加法法則及び乗法法則の成立をあえて確認することとしよう。まず「X_i,i＝1,…,mを排反的な, つまり$X_i \cap X_j=\phi$,i≠j,を満たす, 事象の列とすると, $P(X_1 \cup \cdots \cup X_m)=P(X_1)+\cdots+P(X_m)$。」というのが（特にm＝2の場合が）加法法則であった。m＝1の場合には$P(X_1)=P(X_1)$より明らかである。mの場合を仮定してm＋1の場合を示すには,$X_1 \cup \cdots \cup X_m$とX_{m+1}との共通部分は空であるので, 定量的確率の定義（における有限加法性）により, $P(X_1 \cup \cdots \cup X_m \cup X_{m+1})=P(X_1 \cup \cdots \cup X_m)+P(X_{m+1})$となることに注意すればよい。

ところで乗法法則は, Xを実際上不可能というわけではない事象とすると,

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y \mid X)$$

が成立するということであった。ところがこれは条件つき確率の「定義」に連関する等式(この節での引用文中の式(1))により明らかである。しかし「Xが実際上不可能の場合には$P(Y \mid X)$は任意の実数値を表す」と規約すれば，「実際上不可能」の場合でも，上の等式は$0 = 0$ ($= 0 \cdot P(Y \mid X)$)となり成立する。

次に分割公式を示す。$X_i, i=1,\cdots,m$を「世界」Sに対する分割とし各項は「実際上不可能ではない」とする。ところで任意の事象Yは,$Y = S \cap Y = (X_1 \cup \cdots \cup X_m) \cap Y = (X_1 \cap Y) \cup \cdots \cup (X_m \cap Y)$ と分割される。故に加法法則により$P(Y) = P(X_1 \cap Y) + \cdots + P(X_m \cap Y)$。ところが乗法法則により $P(X_i \cap Y) = P(X_i)P(Y \mid X_i)$。故に，$P(Y) = P(X_1)P(Y \mid X_1) + \cdots + P(X_i)P(Y \mid X_i) + \cdots + P(X_m)P(Y \mid X_m)$ が従う。

さらにベイズルールを示す。X,Yを実際上不可能ではない事象とする。乗法法則により$P(X \cap Y) = P(X)P(Y \mid X)$。ところが$X \cap Y = Y \cap X$より$P(X \cap Y) = P(Y \cap X)$。また乗法法則により$P(Y \cap X) = P(Y)P(X \mid Y)$ 。故に$P(Y)P(X \mid Y) = P(X)P(Y \mid X)$ 。ここで$P(Y) \fallingdotseq 0$であるので

$$P(X \mid Y) = \frac{P(X)P(Y \mid X)}{P(Y)}$$

が従う。これがベイズルールにほかならない。

ところで上の引用文中では「世界」に対する分割との連関でこの公式が言及されているが，そこで$X_i, i=1,\cdots,m$を「世界」に対する分割として，各項は「実際上不可能ではない」とすると，この場合，上のベイズルールのXをX_iに置き換えて右辺の分母の$P(Y)$に対してこの分割$X_i, i=1,\cdots, m$に関する分割公式をあてはめれば，サヴェジ氏が提示している様式でのベイズルールが得られることとなる。

さらにこれに続く段落を引けば次である。

Finally,if neither B nor C is null,

$$(5)\quad \frac{P(B \mid C)}{P(B)} = \frac{P(C \mid B)}{P(C)} = \frac{P(B \cap C)}{P(B)P(C)},$$

which may be given the suggestive reading: Knowledge of C modifies the probability of B by the same factor by which knowledge of B modifies the probability of C .

ここでの式(5)は条件つき確率の「定義」に連関する等式(1)より明らかだが，サヴェジ氏が注意しているのはその解釈である。ここで「示唆的な読み取り方，the suggestive reading」という表現は，彼にとっての本来の確率は「知識の状態」などを持ち出さずに定義され解釈されるものなのだが，「知識」という言葉を持ち出してこの式(5)を読み取って見ると,何故か「解釈しやすい雰囲気」がこの等式に随伴するようになることへの,結果としては注意となっている。つまりこの式は，「Cが通用する」という「知識」が「B が通用する」ことに関する「個人」の「確からしさ」を変化させるわけだが，「知識」を得た後のその「確からしさ」と「前の確からしさ」との比率が，BとCとの役割を入れ換えても変化しない，従って，一方が通用するという「知識」は他方が通用することに関して同じ率で影響する。

9．補遺——公準系の条件つき選好への「遺伝」について——

ここではP1からP6までの公準が条件つき選好へと「遺伝する」ということを確認する。ただしここで「遺伝する」とは以下で述べるような状況に言及しているのであるが，一方サヴェジ氏自身はこの確認作業を，多分このような「遺伝」は解釈上明らかであると判断してしまって，実際には行っていないのである。なお以下では条件つき選好$\leq \cdot$ given X,$< \cdot$ given Xをおのおの$\leq \cdot_X$, $< \cdot_X$と表すことがある。また,

Xを事象，a,bを行為とする場合，$a \leq \cdot b$ given Xとは「a,bを，X上はそのままで～X上で一致するように任意に変形したものを，おのおのa′,b′とすると,その変形の様式にかかわらず，$a' \leq \cdot b'$」ということであった。

まずP1について考える。この公準は「個人」の選好が単純な順序であること，つまり比較可能性と推移性とを満たすことを要請する。そこでXを事象，a,bを行為とすると,「$a \leq \cdot_X b$あるいは$b \leq \cdot_X a$」を示す。a,bを，X上はそのままで～X上で一致するように任意に変形したものを,おのおのa′,b′とすると,P1の比較可能性より，「$a' \leq \cdot b'$ あるいは$b' \leq \cdot a'$」。前者の場合,P2及び条件つき選好の定義により，$a \leq \cdot_X b$が従い，また後者の場合は$b \leq \cdot_X a$が従う。次に,さらにcを行為として,「$a \leq \cdot_X b$かつ$b \leq \cdot_X c$ならば，$a \leq \cdot_X c$」を示す。a,b,cを,X上はそのままで～X上で一致するように任意に変形したものを，おのおのa′,b′,c′とすると，「ならば」の前半から，条件つき選好の定義により,「$a' \leq \cdot b'$ かつ$b' \leq \cdot c'$」が従う。故に，P1の推移性より，$a' \leq \cdot c'$。故に，条件つき選好の定義により，$a \leq \cdot_X c$が従う。

次にP2について考える。X,Yを事象としa,b,a′,b′を行為とする。またaとb及びa′とb′とはおのおの～Y上で一致しているとし，一方，aとa′及びbとb′とはおのおのY上で一致していると仮定する。この場合,「$a \leq \cdot_X b$ならば$a' \leq \cdot_X b'$」が従う。実際，a,bを，X上はそのままで～X上で一致するように任意に変形したものを，おのおのa″,b″とすると，「ならば」の前半を仮定すれば（条件つき選好の定義により）$a'' \leq \cdot b''$ が従う。ここでa″,b″を，他はそのままでX∩～Y上でa′,b′に一致するように変形したものを，おのおのa‴,b‴とすると，P2より，$a''' \leq \cdot b'''$ が従う。ところでこのa‴,b‴はa′,b′を他はそのままで～X上で一致するように任意に変形したものと見なすことができる。故に，条件つき選好の定義により，「ならば」の後半が従う。

次に条件づけの操作について考える。X,Yを事象としa,bを行為とする。この場合，$a \leq \cdot_X b$ given_X Yとは，「a,bを，Y上はそのままで～Y上で一致するように任意に変形したものを，おのおのa′,b′とすると，$a' \leq \cdot_X b'$」ということである，と定義する。ここでのa′,b′を任意に固定すると，$a' \leq \cdot_X b'$ とは，「a′,b′を，X上はそのままで～X上で一致するように任意に変形したものを，おのおのa″,b″とすると，$a'' \leq \cdot b''$」ということである。ところでこのa″,b″は，a,bを，他はそのままでX∩～Y上で一致するように任意に変形し，さらにまた他はそのままで～X上で一致するように任意に変形する，という作業によって得られたと見なせるが，さらにまたこれは，a,bをX∩Y上はそのままで～X∪～Y上で一致するように任意に変形する，という作業によって得られたと見なすことができる。従って,$a \leq \cdot_X b$ given_X Yと$a \leq \cdot b$ given X∩Yとは同値である。

次に「実際上不可能である」について考える。X,Yを事象とする。この場合,「Yは$\leq \cdot_X$に関して実際上不可能である」とは「任意の行為a,bに関して$a \leq \cdot_X b$ given_X Y」ということである，と定義する。ところで，Xが($\leq \cdot$に関して)実際上不可能であるのならば，Yは$\leq \cdot_X$に関して実際上不可能である。このことは「Xが実際上不可能であるのならばX∩Yも実際上不可能である」という（多分解釈上は明らかな）主張より従う。実際,「Xは実際上不可能である」とすると，定義により，「任意の行為a,bに関して$a \leq \cdot b$ given X」。ここで，a,bを(他はそのままで)X∩～Y上で一致するように任意に変形したものを，おのおのa′,b′とすると，$a' \leq \cdot b'$ given X。さらにa′,b′を，X上はそのままで～X上で一致するように任意に変形したものを，おのおのa″,b″とすると，$a'' \leq \cdot b''$。ところがこのa″,b″は，a,bをX∩Y上はそのままで～X∪～Y上では一致するように任意に変形することによってもたらされたと，見なすことができるので,「任意のa,bに対して$a \leq \cdot b$ given

X∩Y」が従う。故に，上の段落で示したことにより，「任意のa,bに対して$a \leq\cdot_X b$ given_X Y」。

次にP3について考える。X,Yを事象としc,c′を「結果」とする。また常に「結果」cをもたらす行為，つまり「世界」S上で「結果」cのみを値として取る定数的な写像を，⟨c⟩と表記する。この場合，「Yは$\leq\cdot_X$に関して実際上不可能というわけではないのならば，⟨c′⟩$\leq\cdot_X$⟨c⟩と⟨c′⟩$\leq\cdot_X$⟨c⟩given_X Yとは同値である。」が従う。「…」の仮定が満たされているのならば，上の段落で示したことにより，「Xは実際上不可能」というわけではない。故に，P3より，⟨c′⟩$\leq\cdot_X$⟨c⟩と⟨c′⟩$\leq\cdot$⟨c⟩とは同値である。ところで$\leq\cdot_X$ given_X Yと$\leq\cdot$ given X∩Yとは同値であったから，同様の仮定により，「X∩Yは($\leq\cdot$に関して)実際上不可能」にはあらず。故に，P3より，⟨c′⟩$\leq\cdot$⟨c⟩ givenX∩Yと⟨c′⟩$\leq\cdot$⟨c⟩とは同値。以上により「…」の結論が従う。

次にP4について考える。A,B,Xを事象，c,c′,d,d′を「結果」として，⟨c′⟩$<\cdot$⟨c⟩，⟨d′⟩$<\cdot$⟨d⟩と仮定する。また，f_A及びf_BをおのおのA及びB上で「結果」cを他でc′をもたらす行為とし，g_A及びg_Bをc,c′をd,d′に置き換えることによって得られる同様の行為とする。この場合，「$f_A \leq\cdot_X f_B$ならば$g_A \leq\cdot_X g_B$」が従うことを示す。f_A,f_BをX上はそのままで～X上で値c′のみを取るように変形したものをおのおのf_A',f_B'とすると，「ならば」の前半を仮定すれば，条件つき選好の定義により，$f_A' \leq\cdot f_B'$ が従う。ここでf_A'及びf_B'は値c,c′を取るが，これらを値d,d′に置き換えることによって得られる行為を，おのおのg_A'及びg_B'とすると，P4により，$g_A' \leq\cdot g_B'$が従う。ところが，g_A'及びg_B'はおのおのg_A及びg_BをX上はそのままで～X上で値d′のみを取るように変形したものと見なすことができるので，P2及び条件つき選好の定義により，$g_A \leq\cdot_X g_B$が従う。

次にP5について考える。「Xを実際上不可能ではない事象とすると，ある「結果」c,c′が存在して，⟨c′⟩$<\cdot_X$⟨c⟩。」を示す。P5より，⟨c′⟩$<\cdot$⟨c⟩を満たす「結果」c,c′が存在する。またP3より，Xは実際上不可能ではないとすると，⟨c⟩$<\cdot$⟨c′⟩given Xが従う。

次にP6について考える。Xを事象としf,gを行為とする。この場合，「$f <\cdot_X g$ならば，任意の「結果」cに対して「世界」Sに対するある分割が存在して，f,gを，その分割の任意に選ばれた項上で値cのみを他のS上ではそのままの値を取るように変形したものを，おのおのf',g'とすると，$f' <\cdot_X g$かつ$f <\cdot_X g'$。」を示す。$f <\cdot_X g$を仮定しcを任意の「結果」とする。f,gを，X上はそのままで～X上では値cのみを取るように変形したものを，おのおのf'',g''とすると，条件つき選好の定義により$f'' <\cdot g''$。故に，P6より，Sに対するある分割が存在して，f'',g''を，その分割の任意に選ばれた項上で値cのみを他のS上ではそのままの値を取るように変形したものを，おのおのf''',g'''とすると，$f''' <\cdot g''$かつ$f'' <\cdot g'''$。ここでf'''は，fを他はそのままでその分割の任意に選ばれた項上で値cのみを取るように変形して得られる行為f'を，X上はそのままで～X上で値cのみを取るようにさらに変形したものと，見なすことができるし，またg''は，gをX上はそのままで～X上で値cのみを取るように変形したものであるから，P2及び条件つき選好の定義により，$f''' <\cdot g''$から$f' <\cdot g$ given Xが従う。また同様の議論により，$f'' <\cdot g'''$から$f <\cdot g'$ given Xが従う。

1995年10月4日(水)