群論の基本性格と対称性の問題

岩崎允胤

群論の基本性格と対称性の問題

岩崎允胤

まえがき

本稿は、現代代数学の重要な一部門としての群論の哲学的問題を検討しようとするものである。群論の哲学的問題というのは、たとえば、群論は何を（客観的実在のどの側面を）反映するか、群論はどのような領域に適用されるか、群論の意義と限界はどこにあるか、群論の理解をめぐって今日どのような観念論があるか、などの問題である。本稿は、こうした問題を解明するために書かれた一つの覚書き的な試論である。わたくしはここではとくに群論の哲学的問題を対称性（シュンメトリー）の問題との関連においてとりあげようと思う。ソヴェトのマリツェフも言うように、群論の発展の結果、今日では、「群論の方法と概念は対称の規則の研究に重要であるばかりでなく、多くの他の問題の解決にも重要であることがわかった」とはいえ、そもそも「群論は、対称の規則性のような現実の世界の重要な規則性を研究するための道具を見出す必要から起った」[1]のであり、対称性の問題は依然として群論を理解するための初等的な通路であるばか[2]

りか、後述するように、最も抽象的な群論の基本公理のうちにも、事物の変換における対称性の原理が抽象的な形式で反映されている。なお、本稿の最後で触れるように、素粒子論の新しい展開とされるゲルマン、ニーマンの理論においても、群論によって素粒子の世界における対称性が示されている。本稿が、群論の基本性格を、まずもって対称性の問題との関連でとりあげるのはこのためである。

だが、このような観点は、当然、そもそも対称性とは何か、もし対称性が一つの哲学的カテゴリーであるならば、それはどのように把握すべきであるか、そして、群論は対称性のカテゴリーをどのような側面において反映しているか、などの問題をよびおこす。したがって、わたくしは、次にまず、対称性のカテゴリーの弁証法的把握の問題から始めなければならない。

注

（1）ア・イ・マリツェフ「群その他の代数系」ソヴェト科学アカデミー版『数学通論＝数学、その内容、方法、意義＝』遠山啓監訳、VI、一二六九、一二七〇頁。

（2）たとえば、G. Birkhoff and S. Maclane: A Survey of Modern Algebra, 1941（バーコフ、マクレーン『現代代数学概論』奥川光太郎、辻吉雄訳、一九五四年）第六章、群論、や前注におけるマリツェフ論文などを参照。

1　弁証法的カテゴリーとしての対称性

対称性はいうまでもなく、事物の存立の一定の仕方であり、事物に或る均衡の存するところに見出される。少くともそれは、均衡と密接な関係にある、あるいは、均衡に何らか類似した意味をもつカテゴリーである。対称性の原語は *συμμετρία* (symmetry) であるが、これは、もと、尺度（メトロン）を共にする、共通な尺度で測られるということ、つまり、

共測性、可約性（commensuratio）という意味から、さらに、均合、均斉、比率、均衡（平衡）などの意味をもっていたのであり[1]、また、たとえばドイツ語で、対称性、均斉は、Symmetrie あるいは Ebenmaß であらわされるが、これが均衡（平衡）を意味する Gleichgewicht と類語であるのは明らかである。

しかし、対称性は均衡と同一のカテゴリーではなく、むしろ、論理的には均衡を前提とするところの一つのカテゴリーであるように思われる。というのは、対称的なものは、それ自身の存立の一定の均衡を保っているが、均衡の保たれているところに常に対称性があるとはかぎらないからである。非対称性も事物の存立の一定の均衡を示していることは、容易に理解されるであろう（たとえば、太陽系における遊星の位置、人間の体内における心臓の位置、体操における一定の姿勢）。また、均衡方程式は現象諸量間の一定の均衡関係を表現しているが、一般には、それらの間の対称的な関係を与えるものではない。要するに、均衡には対称的バランスと非対称的バランスとがある。このように、対称性は均衡とただちに同一のカテゴリーではなく、むしろ、論理的には均衡を前提とする一つのカテゴリーであるように思われる。

さて、唯物弁証法は、事物の過程にただ均衡とその破壊、その回復のみをみる均衡の絶対化の見地――ブハーリンの均衡概念、近代経済学の枢軸をなした均衡概念[2]――に反対するからには、当然また、事物の存立にただ対称性（法則性）とその乖離（偶然性）のみをみる対称性の絶対化の見地にも反対せざるをえない。もちろん、いかなる均衡論も、事実上、均衡の破壊をみとめないわけにはいかないように、いかなる対称性の絶対化論も、事実上、対称性からの乖離とみとめないわけにはいかない。なぜなら、古くはプラトンも承認したように、現象界は定めなきもの（偶然的なもの）、非有（メー・オン）の支配にゆだねられているものであり、イデア、つまり真の有（オントース・オン）はその全き姿では臨在（パレイナイ）しないからである。

しかし、プラトンにおいてイデアが原理(アルケー)・原型(パラデイグマ)であったように、ここでは、あるいは「均衡」が、あるいは「対称性」が原理・原型として登場している。このようなプラトン主義的な対称性の理論を、後述するように、われわれはたとえば物理学者ヴァイルの思想のうちに見る。かれにとって、対称性の理論は、数学、つまり群の理論である！

わたくしはかって、ソヴェトにおけるブハーリン批判の遺産をとりあげ、その問題を近代経済学における均衡概念の絶対化と結びつけて考察することによって一般に均衡概念の形而上学的理解に反対し、これにたいし、均衡のカテゴリーの弁証法的性格を明らかにするように努めた（『現代の論理学』一九六一年、第二部第三章を参照）。同様に、対称性についてもまた当然、これを唯物弁証法の一つのカテゴリーとして考察しなければならないように思われる。ところで、均衡についてのわたくしの理解は次のようであった。「均衡とは、対立物の斗争によって定立され媒介され止揚される、運動の、客観的一形式（契機）であり、このような形式として、体系の諸要素間あるいは体系とその環境との間に保たれる相対的安定性である、それは偶然的側面をもちながらまた必然的な契機であり、相対的でありながら絶対的運動のいわば『粒』、本質的な条件である」[3]。あるいはまた、「物の相対的安定性とは一定の均衡であり、矛盾によって定立され、たえず揚棄されながらも暫時的にはそれ自身を持続するところの同一性である。じつに、この均衡、この同一性をみずから定立し媒介し揚棄するのが、物質の運動と矛盾の絶対性である」[4]。もし、さきに述べたように、対称性が均衡を前提とするところの一つのカテゴリーであり、事物の均衡の一つの特定の形式であるとすれば、均衡のカテゴリーについてのこの弁証法的把握は、われわれが対称性のカテゴリーを考察するための基礎、前提とすることができるであろう。

ところで、均衡は、事物の示すたんに外面的な特徴にすぎないのではなく、右の引用によっても分かるように、運

動とその矛盾的本質に比べればそれ自身なお全く外面的にとどまりながらも事物（体系）の存立のための或る何らかの構成の仕方を示しているように思われる。対称性は、これにたいし、このような構成をもった事物（体系）にぞくする、その構成分相互間における或る外面的な形式的特徴であるように思われる。そうとすれば、対称性が事物、つまり均衡的体系のどのような外面的な形式的特徴であるかを考えてみなければならない。この点にかんし、わたくしはヘーゲルの見解を参考にすることができるように思う。

ヘーゲルは『美学講義』の抽象的外面的な美を論じた節のなかで Symmetrie（竹内敏雄氏の邦訳では「均斉」と訳されている）のカテゴリーを考察している。[5] かれによれば、たんなる規則性（レーゲルメッシヒカイト）が同じ規定の反復（＝均等性（グライヒハイト））、とくに同じ形態の反復であるのにたいして、対称性は相異なるもののあいだに成立する規則性である。たとえば、家屋の壁が同じ大きさの窓をもっているときはたんなる規則性であるが、同じ大きさの三つづつの窓が、一つのより大きい窓によってその両側に分離されながら、これにたいしておなじ関係におかれるとき、それらは対称性の関係にある。このように、「対称性は、或る抽象的に等しい形式がたんにくりかえされるだけではなく、同種の他の形式——つまりそれだけとってみれば、やはり一定の、自分自身に等しい形式であるが、さきの形式とくらべれば、それに等しくないところの、同種の他の形式——と結合されるところに存する。この結合によって生ずるのは、たんなる規則性よりもすでにいっそう規定された、いっそうの多様性をふくんだ、新しい均等性（グライヒハイト）と統一性（アインハイト）でなければならない」。いいかえれば、たんに同じ規定性の反復にとどまるのではなく「相互に等しくない諸規定性の均合のとれた（gleichmäßig）結合が対称性を与える」[6]。さらにヘーゲルによれば、規則性と対称性は、事物のたんに外面的形式にぞくする抽象的な統一性であり、主として何らかの大きさが一定の関係に規定されている場合にかぎられるのであって、それゆえ、

事物の質にとってどうでもよいものとされる。すなわち、対称性は、事物の質から抽象された量（質的無関与性）にかかわる規定性とされる。

ヘーゲルによれば、このような対称性は非有機的自然にも有機的自然にも見出される。すなわちそれは、鉱物や結晶では支配的であり、植物（それは主観的自立性なしにつねに外面性に捉われている）においても、自己外在的なものにおける統一として、主要契機をなしている。また、動物においては、つねに外界に関係している諸部分は対称的となっている。『エンチクロペディー』の自然哲学の部でも言われているように、動物における対称性は、「外部に向かう側面にのみ存する。なぜなら、他者との関係では、自己同一性は、均等性としてのみ表現される。内部に向かう、区別された、形態の諸契機はたんに対称的に二重化されないばかりではない」云々。[7] さらに、人間についていえば、動物一般と比べて、対称性はいっそう現われなくなる。人間においては、精神的な契機がより豊富になっているからである。一般に、ヘーゲルによれば、精神は本来的に非対称性をもたらすものとされる。対称性のあらわれるのは、精神の外在態（自然）においてである。

以上を要約するに、ヘーゲルにおいては、対称性は、事物の外面的形式的な側面、事物の質的無関与的（＝量的）側面にぞくするカテゴリーであり、同じ規定の反復（規則性）という契機が含まれてはいるが、それは同種の他の規定にたいし一定の均等な――もちろん外在的な――連関にあるかぎりでの同じ規定の反復である。それは、他の規定との外在的な関係を媒介とするかぎりでの不等性における相等性として、たんなる規則性よりも豊かな、事物の外面的形式的規定性である。その外面的抽象性のゆえに、対称性は、事物のより低い段階において、より優勢となる。

ヘーゲルは対称性について述べるとき、かれのあげる例からも知られるように、とくに事物の形態が、それも主と

図 (1)

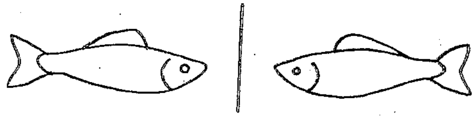


図 (2)

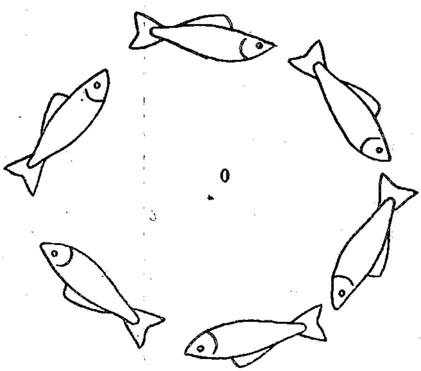


図 (3)

して左右対称が念頭におかれており、現象諸量間の対称的関係などは直接念頭におかれていないけれども、われわれは、一般に事物の対称性というとき、当然これを含めて考えなければならず、したがって、ヘーゲルの当該箇所を積極的に読む場合にも、できうれば一応それを補って考えてみる必要があろう。ところで、現在諸量間の対称的関係のグラフ的表現として代表的なのはガウス曲線であるが、それは $x=\mu$（μ は平均値）にかんして対称的である。つまり、曲線上の点は直線 $x=\mu$ にたいし、鏡映の関係にある。いいかえれば、折返しの仕方で同じ規定性の反復である。

ところで、ヘーゲルが対称性をたんなる規則性と区別している点に、注意しておく必要があろう。(1)で示される系列（平行移動）は規則性ではあるが、対称性ではない、というのがヘーゲルの見解である。(2)はもちろん対称である。(3)の系列（或る点Oを中心とする回転）もおそらくヘーゲルは対称的とみていないであろう。ところで、のちにみるように、群論では(1)、(2)、(3)いずれも対称的なものとされている。すなわち、群論では対称性のカテゴリーの外延はヘーゲルよりも広い。対称性は、そこでは、抽象的一般性において捉えられている。

ヘーゲルは対称性を主として質的無関与性（量）にかかわる側面であると述べているが、それは、対称性にたいする外面的抽象性としてのかれの把握からくる正当な理解を含んでいる。たしかにそれは、事物の量的（場合によってはさらに空間的）な側面にかかわるものであろう。しかし、ちょうど定量が量の規定性であるからといってつねに質的無関与性に終止するとはいえない（たとえば、特定の原子核にとってのプロトンの数、特定の化合物における諸元素分子の数的比率）ように、対称性もまた、事物の質にはつねに無関与であるとはいえない。むしろ、事物の質に積極的にかかわる場合がある。たとえば、特定の結晶の型、ひとでの腕等、多くのものをあげることができる。さらに、或る事物（体系）にぞくする異なった質のあいだにその質にかんし、或る対称性のみられることがある（たとえば、固定双極子―電気的二重性―）。しかし、その場合にも、両者のあいだには、その質の区別それ自身とともに対称性の規定について一定の均等性の連関が見出されており、その均等性の連関を介してはじめて相互的な対称性が成立しているのであろう。この均等性の連関は、それぞれの質それ自身とは区別されなければならない。たんに相異なる質があるだけでは、たとえ、それが対置されているにしても、まだ、語の本来の意味において、対称的とはいえないであろう。

対称性は事物のより低い段階においてより優勢となるというヘーゲルの見解についていえば、大略的な説明としてはこれに賛成しうるであろう。というのは、大把みにいえば運動形態が高次になるにつれて、外面的形式的側面において規則性ないし対称性はあらわれなくなるであろうから。しかし、たとえば、枝々の分岐をもつ一本の木の全体よりも、むしろ一匹の哺乳動物において、その全体としての外面的形態にかんするかぎり、対称性が見出される。とはいえ、一枚一枚の葉は平面として軸にたいして鏡映の関係にあり、幹の年輪は中軸にたいする美事な回転を示してい

る。

精神が非対称性をもたらすというヘーゲルの見地についていえば、それは、事物の存立の一契機としての対称性の外面性を、その有限性を、その相対性を、その合理的ではあるが自己揚棄的な片面性を指摘し、これにたいし事物の発展の主体としての「精神」の弁証法（高次な運動発展の形態のとる弁証法）を、つまり、内的矛盾を原動力とする絶対者の弁証法を対置したものである。その観念論的なヴェールを透して合理的核心を洞察すれば、さきに対称性のカテゴリーの基礎、前提としての均衡のカテゴリーについて述べたわたくしの基本的見解と合致する思想を見出すことができるであろう。

以上の考察を総括して、対称性のカテゴリーについて次の規定を与えておこう。それは、事物（体系）の一定の均衡を前提とするところの、その諸構成分間の相互に均等な反復関係という外面的な形式的な特徴である。

注

(1) アリストテレスにおいて *συμμετρία*, *σύμμετρον* が共測性（可約性）、共測的（可約的）の意味で用いられていることは周知のとおりである。とくに、正方形の一辺と対角線との関係が共測的であるかそうでないか、という問題がしばしば出されている。共測的であるかどうかは整数比をもつかどうかということ、つまり、有理数（ロゴス・つまり比をもつ—rational—数）をもって二つの量の関係をあらわせるかどうかということである。アリストテレスにとっても、無理数（ロゴスつまり比をもたない—irrational—数）は、数ではない。かれは書いている、「数は共測的なものであり、したがって、共測的でないものは数で表わすことはできない。」(Met., 1021 a 5–6) ところで、超越しているものは超越されているものにたいして数的に全く不定な関係にあるところから、*συμμετρία* は、アリストテレスにとって、プラトンの見解（たとえば『ピィレボス』における）を継承して、事物の過不足なき相応な比率、「中」(*μέσον*) をも意味することになる。アリストテレスは書く、「技術あるいは自然によって生成するものはすべて或る比率（ロゴス）によってである」。たとえば、熱は、強いと、湿っているものを乾かし、あまりにも欠けると、ものを存立させせない。そこには、中（メソン）という比率がな

ければならない。「雄性と雌性との混合のさいにも相応な比率的関係が必要である。」(Gen. Anim., 76 a 16 ff.) かれは、さらに、身体の善さ、たとえば健康と好調は、熱いものと寒いものの――身体の内部におけるそれら相互間の、あるいは周囲の環境にたいする――相応な比率的関係を保った混和のうちにあるとしている。事物の存立にとっての相応な比率的関係の意義は、自然についてだけみられるのではない。「画家は、動物を描くとき、均斉を破る〔相応な比率的関係を超過する〕足は、たとえ美しさの点ではすぐれたものであっても、動物にもたせはしないであろう。また、船工は、船尾なり船のその他の部分の何かなりをつくるとき、それの均斉を破らせるようなことはしないであろう。」(Pol., 1284 b 8-11)「国制の変革は、その比例にはずれた成長によっておこる。というのは、ちょうど、身体は諸部分から構成されていて、均斉が保たれるためには、比例的に成長しなければならず、そうでなければ死滅する……、そのように、国制も……。」(ibid., 1302 b 33-1303 a 2)

(2) Cf. H. Meißner : Die Entwicklung der Gleickgewichstheorie als Ausdruck des Verfallsprozesses der bürgerlichen politischen Ökonomie. Probleme der politischen Ökonomie, Bd. 5. 1962. SS. 199 ff.

(3) 拙著『現代の論理学』一九六一年、二一六―七頁。

(4) 拙著『弁証法と現代社会科学』一九六六年、一九九頁。

(5) ヘーゲル『美学講義』の該当する箇所につけられている竹内敏雄氏の次の注は参考になる。「Summetrie は語源的意味においては二つもしくはそれ以上のものがおなじ尺度 (μέτρον) によって測られることをいい、したがって通約可能性 (Kommensurabilität) を意味するが、普通には、(一) 対象の二つあるいはより多くの部分が数量上ある程度の均等性を有し、相互のあいだに均衡をたもっている場合にかぎって用いられ、(二) さらに狭くは左右両半分がその開展の方向を異にしながら、他の諸規定においてたがいに合致するように相照応している場合、すなわち左右相称の均斉 (bilaterale Symmetrie) に局限される。均斉が美的形式原理としての意義を有するのは勿論この (一) ないし (二) の意味においてであり、ヘーゲルもここでは主として (二) の意味における均斉を問題にしている。ちなみに古くはアリストテレスが美の一つの形式的標徴として συμμετρία をあげているように、均斉に美をみとめることは早くから支配的であった。」竹内敏雄訳、第一巻の中、五〇〇頁。

(6) Hegel: Vorlesungen über die Ästhetik, I Bd. hrsg. von H. Glockner, 1953, S. 190.

(7) Hegel: System der Philosophie, 2 Teil, hrsg. von H. Glockner, 1938, SS. 612-3.

2　群論と対称性

前節において対称性のカテゴリーの弁証法的考察をおこなったので、以下本節では、群論の哲学的問題を—とくに対称性の問題との関連において—検討してみようと思う。

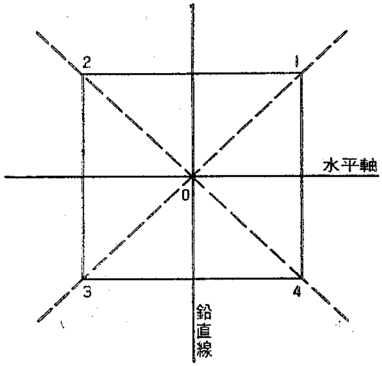
バーコクはマクレーンとの共著『現代代数学概論』で群論を論ずるにあたって冒頭に次のように書いている、「『対称』という考えは教養ある人すべてによく知られている。しかしそこに対称性の代数が生じることを実際知っている人は少い。[1]」対称性の代数とは、すなわち群論である。それでは、群論では対称性がどのように扱われ、それについての代数計算がどのようにおこなわれているか。以下、順序として、一応、群論—とくに変換群の理論—の最も初歩的な部分について述べ、そのなかから群論の基本性格をぬき出してゆくことにしよう。

まず、正方形の対称性を考えることにしよう。対称性をたんに或る特定の静止的な空間的関係とはみず、自分を自分自身に重ねる空間的運動と考えれば、正方形は次の七個の対称性をもつことがわかる。始めの三つは回転であり、他は折返しである。

R　中心Oの周りに時計の針の方向に九〇度の回転

R′　同様な一八〇度の回転

R″　同様な二七〇度の回転



H　Oを通る水平軸にかんする折返し

V　Oを通る鉛直線にかんする折返し

D　第Ⅰ、第Ⅲ象限の対角線にかんする折返し

D′　第Ⅱ、第Ⅳ象限の対角線にかんする折返し

なお、すべての点を不動とする運動（恒等運動と呼ばれる）がある。これは結局何もしないのと同じことであるが、群論ではこれも対称性とみる。しかも、これは、一般に単位元（unit element）あるいは恒等元（identity element）と呼ばれ、それの存在は群成立の要件となっており、群論のなかにきわめて重要な役割をはたす。――そこで、正方形の対称性として、結局、八個の運動が考えられる。

バーコフも言うように、対称性の代数の由来は、二つの運動をあいついでおこなうという仕方で、それらを掛けることができるというところにある。たとえば、折返しHと回転Rとをつづけておこなうとどうなるかを考えてみると、じっさいやってみればわかるように、折返しD′となる。運動D′は、二つの運動HとRをあいついでおこなった結果であり、このあいついでおこなう操作を積とする。そこで HR＝D′ と書く。では、順序を逆にして、さきにRをおこない、つづけてHをおこなった結果はどうなるか。じっさいやってみればわかるように、結果はD′とはならずDとなる。すなわち RH＝D。それゆえ、HR≠RH ということが出てくる。すなわち、この演算では交換法則は成り立たないのである。また、たとえばRとR′の積は何もしなかったのと同じことになる。すなわちさきに述べた恒等運動となる。これをIであらわせば、RR′＝I。

この例は、とくに正方形の各頂点（1、2、3、4）がどのように置換するかに着目して、次のように書くことが

できる。

HR＝D′

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&2&1\\3&2&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$$

注　ただし、括弧内は上の行の文字を下の行の文字で置換することを意味し、二つの括弧の積は、たとえば、1を4に置換し、次に、4を3に置換するという操作を示すものとする。この場合、結果は、1を3に置換したことになるが、それは右辺の括弧内で示される。

R＝HD

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&2&3\\1&4&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$

RR′＝I

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&2&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

以上、正方形の対称性について述べたことを一般化して、任意の集合Sの変換ϕについて考えてみよう。Sのそれ自身への変換（簡単にSにおける変換ともいう）とは、Sにぞくする各元 $p \in S$ にたいし、Sにぞくするただ一つの像 $p\phi$ を対応させることを意味する。二つの変換ϕ、ϕ'の積 $\phi\phi'$ は、それらをあいついでおこなった結果と定義する。すなわち、任意の p について

$$p(\phi\phi')=(p\phi)\phi'$$

ところで、一般には、交換法則は成りたたない。

$$\phi\phi' \neq \phi'\phi$$

しかし、結合法則は成り立つことがわかる。

$$\phi(\phi'\phi'') = (\phi\phi')\phi''$$

つぎに、すべての元を不変とする変換（恒等変換）をIとすれば、すべてのϕにつき

$$I\phi = \phi I = \phi$$

さらに、或る変換ϕをちょうど逆戻しさせる変換（逆変換）をϕ^{-1}とすれば

$$\phi\phi^{-1} = \phi^{-1}\phi = I$$

このように、Sのそれ自身への変換の集合において、その任意の変換について積が成立し、その結果が一義的にきまり、そのさい結合法則が妥当し、かつ、恒等変換（単位変換）と逆変換とがその集合に含まれているならば、その集合は群をなすと言い、これを変換群と呼ぶ。(2)（さきに述べたように、この演算では一般に交換法則は成りたたない。交換法則の成立という条件が加えられたとき、当の集合を可換群あるいはアーベル群と呼ぶ。）

しかし、今掲げた条件（積の成立と一意的決定性、結合法則の妥当、恒等元と逆元の存在）を満足する体系は決して変換群だけではない。実数の加法もベクトルの演算もその条件を満足する。そこで、これら具体的な群のどれについても成立つところの一般的な法則を研究するところの、より抽象的な研究があるはずである。このように、さきの条件を満足するかぎりでの演算一般の体系が抽象群の理論である。抽象群の研究の意義は、具体的な群について個々別々に考えずに、さきの条件を公理として一般的な定理をひき出すことができ、あいことなる具体的な諸群に共通な数学的「構造」――ブルバーキの用語――を明らかにすることができるところにある。抽象群の理論は、変換と対称

性の演算体系を具体的なモデルとしてもつところの普遍的な体系である。

以上の原理的な叙述のなかから、とくに対称性の代数という点に重点をおいて、群論のいくつかの特徴を次に考えてみようと思う。

(1) まず第一に指摘しなければならないのは、群論における対称性の理解が、ヘーゲルにおける対称性の概念と異なっている点である。すなわち、例でいえば、前節に掲げた三つの図のどれについても対称性をみるのが群論の考え方である。対称性をそれ自身に重ねる運動として抽象的にとらえることによって対称性の代数としての群論が成立するのである。

(2) つぎに、群論において対称性が運動として捉えられていることをあげることができる。正方形の対称性について述べたように、それは、たんに空間内における静止的な或る対応ではなく、回転ないし折返しという運動によって理解されている。マリツェフも対称性の数学的定義を次のようにまさに変換という運動によって与えている。「要素の間に定められた関係が考えられている集合Mがあって、PをMのある部分集合とする。もし変換AがPのおのおのの要素を再びPの要素に移すならば、集合Pは、集合Mの許される変換Aに関して、対称あるいは不変であるという。それゆえ、集合Pの対称はPをそれ自身に変換するような、もとの集合Mの許される変換の全体によって特徴づけられる。」[3]――それゆえ、たとえば、空間図形の対称性の程度（対称度）は、その空間図形をそれ自身に一致させる運動の全体によって特徴づけられるのであり、このような運動の全体が豊かで多様であればあるほど、その空間図形はより大きな対称性をもつわけである。反対に、その運動がじつは不動である（恒等変換しか含まれない）場合には、その図形は非対称である。

(3)　しかし、対称性は運動として捉えられているばかりではなく、同時に不変としても捉えられていることに注意しなければならない。右に引用したマリツェフの言葉にも「対称あるいは不変」とある。群論は、この意味では、運動における不変の研究であるということができる。ところで次に、言われるところの運動がどのような運動であるかを考えてみなければならない。

(4)　対称とは、Pのおのおのの要素をふたたびPの要素に移す変換、すなわち自分を自分自身に重ねる運動である。そこで、対称は同一のものの反復であり、それのためには等質性が前提されていなければならない。たとえば、図形の合同ということは、具体的な図形のもの質的特徴を捨象したうえで、回転と折返しによって証明される。一般に、集合Pをそれ自身に一致させる変換においては、着目されているPの要素間の関係以外には、いっさいの質的特徴が捨象されていなければならない。群論における変換は、このような抽象による運動である。そこにあるのは質的無関与的なものの反復である。反復であるからには移行（運動）がある。しかし、その移行（運動）は、質的無関与性を前提したうえでの同一のものの反復に終わるところの移行である。(4)

(5)　しかも、群論ではたしかに対称性が運動として理解されているものの、運動の過程が捨象されているという点が、本質的である。さきに述べた正方形の対称性について考えてみよう。もし運動の過程を考慮にいれるならば、折返しHと回転Rとをつづけておこなうという運動は、決して、折返しD′という運動とは同じではない。運動の過程を捨象し、結果にのみ注目することによって、HR＝D′という積が規定される。マリツェフが回転について次のように書いているのはこの意味である。「力学で『回転』ということは物体の点が新しい位置に移される或る過程を意味する。ここでは『回転』という語は、空間の変換の意味に用いる。この場合は、運動の過程から離れて最後の結果だけ、す

なわち始めと終りの点の位置を観察する。[5]」

(6) 変換群の成立の条件は、変換の積が一意的に決定し、結合法則が妥当し、恒等変換と逆変換が含まれるということである。さきに述べたように、変換自身が質的無関与性を前提しており、この変換の演算は、したがって、量的な計算である。数の演算では結合法則と交換法則が成り立つが、群の演算では交換法則は一般には成り立たない。群の演算は、この点、数の演算とは区別されるが、しかし、群の演算も、数の演算と同様に、量的な代数計算である。マリツェフも「現代代数学も古典代数学と同じように、演算と計算法則の学問である」と言い、群論は「対称性の量的な計算[6]」をおこなうものと述べている。

(7) 以上から明らかになることは、群論は、いわゆる量質転換の過程、さらにこれをひきおこす事物の運動の内的論理を取扱うものではないということである。前節でわたくしは、対称性のカテゴリーの弁証法的性格を検討し、対称性をば、これを定立し媒介し揚棄する運動という見地から、相対的な外面的な形式性として捉えた。ヘーゲル的ないみでの対称性に比べて群論で取扱われる対称性は、さきに(1)で述べたように、より抽象的になっているけれども、群論では、いうまでもなく、その対称性の存立、その哲学的暫時性、相対性、有限性は論じられず、かえって、対称性の存立一般が前提されている。群論は、あくまで、この前提の枠内で、対称性を、自分の自分自身への変換、同一のものの反復の運動として抽象的に一般化したうえでおこなわれる代数的演算の体系である。——数学は一般に、客観的実在の量的（質的に無関与）な側面[7]にぞくする特定の諸条件を前提する。この前提（ὑπόθεσις）のもつ物質性と、それの哲学的暫時性、相対性、有限性を明らかにし、これを物質の運動の内的根拠から説明する（λόγον διδόναι）のが、唯物論の弁証法である。——一般に、数学をそれ自身の内部だけで基礎づけよう——無矛盾的体系として——とする

試みの破産的であるのはこのためである。

なお、この点にかんし若干の付言をしておきたい。邦訳『数学通論』の冒頭におさめられているアレクサンドロフの論文「数学の概観」は、現代におけるマルクス主義的数学論としてすぐれたものであるけれども、たとえば次の見解は若干の疑問の余地を残しているように思われる。「群論は、もっとも一般的なかたちでのシンメトリーに関する学説と見ることができる。ところで、たとえば、硫黄が斜方晶系から単斜晶系にかわる場合の、結晶のシンメトリーの変化は、物質の状態の根本的な質的変化である。このように、群論とは、その変化にともなって対象そのものの根本的変化をみちびくような、ある量あるいは規定性に関する理論である。[8]」たしかに、結晶群の理論は、三次元の空間における合同変換の理論として、自然の外面的、形式的側面における構成の論理を反映しており、しかも、それは、結晶の諸形態にとってたんなる質的無関与性一般にとどまるのではなく、むしろ、結晶の諸形態の質的相異を――それらの量的空間的構造において――示している。しかし、この場合にも、群の理論は、やはりそれ自身としては質的無関与性を前提としており（しかし量も「質的区別にみちみちている」（エンゲルス）、―量のなかに反映されたかぎりでえられた規定性として―）、一つの構造から他の構造への変化の論理を与えるものではない。群論は、ある事物の量的変化によって対象の根本的な質的変化がひきおこされる所以の運動の論理を与えるものではない。

注

（1）バーコフ、マクレーン、前掲書、前掲訳、一三八頁。

（2）現代代数学は、たんに数の性質の研究にとどまらず、抽象的により一般的な――もとより質的に無関与的な――対象の性質を研究することによって、幾何学の研究をもそれ自身のうちに含むことができる。バーコフも言っているように、われわれは、幾何学を学ぶさいにさまざまな空間における変換群に出会うが、これらの群の多くは適当にえらんだ性質にかんするそれ

らの空間の対称性にすぎず、「フェリックス、クラインがいみじくも述べたように（エルランゲンのプログラム、一八七二年）、種々の幾何学は適当な空間につき適当な変換群のもとで保たれる性質の研究とみなされる。」（前掲訳、一四四頁）すなわち、幾何学は、ある空間における一定の条件をもった変換（運動）における不変性（対称性）の研究であり、種々の幾何学は変換群の理論の特殊な場合である。ここには、代数学と幾何学との、量の演算と空間形式の変換との、統一がある。かつてヤノフスカヤはわたくしへの書簡のなかで書いた、「エンゲルスは、現実的世界の空間的諸形式と量的諸関係との研究を、一つの科学――数学のうちへ統一していますが、これはもちろん理由あってのことです。空間的諸形式と量的諸関係とのいずれにも共通な諸特徴は、すでに古代バビロニア人のもとでは、幾何学的な課題の算術的―代数的な解決において、だが、古代ギリシア人のもとでは、二次方程式（アルキメデスにあっては三次方程式）の幾何学的な解決において表現されましたが、こうした共通な諸特徴は、集合論の、ついで――すでに今日では――アルゴリズムの理論の創造によってまったく明らかになりました。」（拙著『現代の論理学』一九六一年、八八頁）群論もまた、この統一を示している。なお、エルランゲンのプログラムについては、たとえば、弥永昌吉、平野鉄太郎『射影幾何学』一九五九年、二三六頁以下を参照。

(3) マリツェフ、前掲論文、前掲訳、一二七七―八頁。

(4) 群論がそれ自身質的無関与性を前提するものであることは、群論が自然の研究に適用されることによって事物の質と結びつけられうる（ヘーゲルにおける度量）にしても、その適用性には限界のあることを示している。素粒子論の問題を論じたさい、牧二郎氏は次のように書いている、「群論的方法による『対称性』の研究は、素粒子間の等質性を現象論的に明らかにするというより広い問題意識の中で位置付けられねばならぬとともに、等質性と表裏の関係にたつ異質性の問題も何らかの（場合によってはさらに）重要な手がかりを与える可能性のあることに注目せねばならない。」（牧二郎「三段階論と素粒子物理学」『唯物論』第一三号、一九六五年、一五頁）。ただし、群論的方法による「対称性」の研究が、武谷三段階論でいわれる現象論的段階にかぎられるかどうかは疑問である。たとえば、ゲルマンによって新たに導入されたコークは実体的な契機ともなりうるかもしれないものではないだろうか。この点については、次節の注（2）を参照。

(5) マリツェフ、前掲論文、前掲訳、一二七四頁。

(6) 同上論文、同上訳、一二六九、一二七〇頁。

(7) ヤノフスカヤは言う、「異なった事物にたいし無差別に定式化されうるすべての関係は量的な関係です。そこでエンゲルスの規定は正しいでありましょう。なぜなら、数学はそのような

関係の科学です。」Cf. Философская Энциклопедия, 2, 1962, стр. 590–562. 拙稿「日ソ哲学シンポジウムへの参加を主要目的とする今日の訪ソ（一九六五、一二—一九六六、一）についての報告」一八—九、三八—四二頁を参照。

（8） ア・デ・アレクサンドロフ「数学の概観」『数学通論』I、前掲訳、九四頁。

（9） エンゲルス『自然弁証法』第二冊、寺沢恒信訳、一九五四年、一一〇頁。

3 自然研究における群論の有効性とその絶対化

――とくにヴァイル的ピュタゴラス＝プラトン主義について

自然における規則性と対称性は、たしかに、事物の存立のための一つの外面的形式である。群論は、この対称性について前節で述べたような量的な定義をあたえ、それによる量的演算の規則をあたえることによって、われわれが自然の一つの重要な側面についての認識を深めるための道を開いた。それが、結晶の理論や量子力学などの分野において広い適用を見出しているのは周知のとおりである。わたくしがそこで言及しておきたいのは、最近、素粒子論において群論の適用によって理論的前進がおこなわれていることである。すなわち、ゲルマンとニーマンは三次元のユニタリー群 U(3) の理論によって素粒子の「現象論」的――武谷三段階論の用語で言えば――分類を試みた。Octet theory（八重項理論）といわれるのがこれである。[1] この理論は、あくまで現象整理的なものであって、なぜ素粒子間に八重項の分類が成り立つかを何ら説明するものではない。しかし、きわめて多数の素粒子にたいしそれらの自然的諸性質にかなりよく照応するような分類を与えているものとして注目されている。いうまでもなく、それが成功をおさめたのは、素粒子の世界に対称性が存し、その量的な関係が群論的な演算による解決を許すからである。しかも、ゲルマンはさらに進んで、この「現象論」的な分類を可能にするものとして、やはり群論の適用によるコーク (quark)

理論を提出している。コークはたんなる機能的な概念ではなく、バリオンやパイメソン、ケーメソンなどのもとにある何らかの実体的な概念であるかもしれない。(2) それはさきの八重法理論の現象整理的段階を実体認識に向かって一歩おしすすめたものであるように思われる。その点でこの理論は一つの注目すべき達成を示すものといえるであろう。このように、群論によって反映される自然の領域は、われわれにとって(πρὸς ἡμᾶς)、階層的な素粒子の世界にまで拡大されている。群論は自然の豊な姿をわれわれの前にときあかす一つの理論的武器である。

しかし、前節において指摘したように、群論は、その基本公理(積の一義的決定性、結合法則の成立、単位元の存在、逆元の存在)にもとづく一定の量的な代数計算の体系であり、物質の運動の内在的論理を、量質転化の論理を与えるものではない。それはたしかに、対称性(前節で示した定義による)を或る運動において捉え対称性の代数演算を与えはするが、物質の運動がなぜ一定の対称性を定立し媒介するかの内的根拠を与えるものではない。このような内的根拠を与える本来的な運動法則に、群論は本来かかわるものではないと思われるのである。それゆえ、群論の適用の成果に眩惑され、物理学の課題が自然の物質性の探究にあることを忘れ、群論の意義を絶対化し、「はじめにSU(3)ありき」、一般に「はじめに群ありき」という見地をとるのは、ピュタゴラス＝プラトン的数学主義を復活するものであるといわなければならない。

ところで、この群論の絶対化、群論にかんするピュタゴラス＝プラトン的数学主義は、ヘルマン・ヴァイルの見解のなかにその最も顕著な代表を見出す。わたくしはここでは、かれの晩年の著作『シンメトリー』をとりあげてみることにしよう。かれは、そのなかで、シンメトリーを、自然と芸術の世界に内在する統一的な原理と見なし、その原理を現代数学における群として捉えている。かれは次のように書いている、「この本の道すじはつぎのとおりである。

最初にある程度くわしく左右対称をのべて、芸術や、有機的ならびに無機的な自然界におけるその役割を論じたい。それから、しだいに回転対称の例の示すような方向に、この概念を一般化していく。そのさい最初のうちは、幾何学の範囲内にとどまるが、その後には、数学的抽象化の手続きによってこの範囲を越えて、最後に、大きな一般性をもつ数学的概念にむかってすすんでいく。それは、ある特殊な外観やその応用された物すべての背後にある、いわゆるプラトン的なイデアにあたるものといってもよい。」「わたしはプラトンと同じように、数学的な観念が、双方（自然と芸術――筆者）に共通した根源であると考えたい。つまり、自然を支配する数学的法則が、自然におけるシンメトリーの根源であり、また創造的な芸術家の精神のなかに、その観念が直観的に実現されるものが、芸術におけるその根源であると考えたい。[3]」要するに、ヴァイルにあっては、群論の原理が、いわばプラトン的なイデアとして、自然と芸術の根源にあってこれを支配しているものとされている。かれはさらに次のように書いている。「もし自然がまったく合法則的であるならば、相対性の原理で定式化されるように、すべての現象は、自然の普遍的法則のもつ完全なシンメトリー＝を含有するだろう（プラトン的なシンメトリーのイデアが十分な姿で臨在するだろう……筆者）。しかし、事実はそうでないということからだけでも、『偶然性』が世界の本質的な特徴であることは明らかである。[4]」対称性が絶対化され、現実における対称性の破壊は偶然性に帰着される。そこには、真なる有（ὄντως ὄν）の十分な顕現はなく、事物はたえず定めなき非有（μὴ ὄν）の攪乱にゆだねられている。それゆえ、ヴァイルが引いている次の或る美術史家の言葉はかれ自身の思想の表白でさえある。「シンメトリーは静止と束縛をあらわし、非対称は、運動と弛緩をあらわす。前者は秩序と法則を、後者は不分明と偶然を……あらわしている。[5]」

ヴァイルのこのような見地は、ピュタゴラス派の見地にそっくりそのままではなかろうか。そのことを示すために

若干の引用をしておこう。伝えによると、「ピュタゴラスは……数と数における均合（συμμετρία）――これをかれは調和（ἁρμονία）とも呼んでいるが――を原理だと言っている。[6]」また、この派では「秩序と均合は美しく好都合であり、無秩序と不均合（ἀσυμμετρία）は醜く不都合である。[7]」とされている。この派のピロラオスの断片に次の章句がある。「自然は、宇宙の秩序化にさいし、限りないものどもと限られたものどもとから調和された（ἁρμόχθη）、全宇宙も、そのなかのすべてのものも。[8]」

ヴァイルの思想を、「はじめにロゴスありき」に模ねて、「はじめに群ありき」と端的にあらわしうるとすれば、かれの著作『シンメトリー』の日本語への訳者遠山啓氏は、現代数学の原理を展望している著作『無限と連続』の最後の章を「はじめに群ありき」という標題によってまとめておられる。氏によれば、群論は「集合論によって断ち切られた各要素間の相互関係、すなわち社会性を回復し、集合を単なる群集から社会へと再組織する[9]」ものであり、「群はちょうど有機的に組織された社会のようなもの[10]」ともいわれる。氏はこの「社会」という言葉によって、群成立の条件における「積」の関係――要素の「結合」――のことを指されるのであろうが、それは質的無関与性を前提とする量的な演算の関係にすぎず、「社会」というこの比喩は、いうまでもなく、科学を主題とするとき問題となるところの、人間の実践の成果として形成される歴史的社会とはおよそ何のかかわりもないものである。今日、一般に、数学主義の社会科学への蔓延にはまさに目を瞠るべきものがあり、集合論やトポロギーや群論が、およそ何らの方法論的な反省もなく、恣意的に社会科学のなかに導入されてきている事態を思えば、群を社会になぞらえることははなはだ危険なものといわなければならない。「はじめに群ありき」の句を文字通りにとれば、あたかも群が具体的な社会における原理・原型であるかのような印象が人々に与えられるからである。ともかく、遠山氏は群論の哲学的意義を強調

されており、哲学者について、群論を「どのように評価するかによって彼の哲学を言い当てることができるように思える」[11]とも書かれる。氏はたしかに、他方で、その多くの論著のなかで、ここで一々の引用は省略するが、数学についてのたくさんの唯物論的な命題を書かれてきたし、ソヴェトの科学アカデミー版『数学通論』の監訳者でもある。にもかかわらず、氏は、一方で、ヘルマン・ヴァイルの『シンメトリー』の訳者として、プラトン的＝ピュタゴス的数学主義に傾いていているように見受けられる。[12]

注

(1) 一九五九年に小川修三氏は、坂田モデルにおける三つの基本粒子NとPとΛの同質性に着目し（それらはストレンジネスについては異質的である）、これらを相互にいれかえても理論は不変であるという仮説をたて、池田、大貫氏らとともに、三次元のユニタリー群 U(3) の数学的理論を定式化し、完全対称性の理論を提唱した。群論の与える対称性による多くの素粒子の分類の企ては、その後いくたの模索を経て、ニーマンとゲルマンによるいわゆる八重項理論 (Octet Theory) として結実した。かれらは三次元のユニタリー群の既約表現のうち八次元表現をとりあげた。

$$\left(P\ \ n\ \ \Lambda\ \ \Sigma^{+}\ \ \Sigma^{0}\ \ \Sigma^{-}\ \ \Xi^{0}\ \ \Xi^{-}\right)$$

$$\left(K^{+}\ \ K^{0}\ \ \eta\ \ \Pi^{+}\ \ \Pi^{0}\ \ \Pi^{-}\ \ K^{0}\ \ K^{-}\right)$$

上図のように、たまたま八個の素粒子の列をまとめると、自然の現象がよく整理され、これは既約表現の八に一致するからである。このようにして、かれらは、八次元の表現空間の基底ベクトルにたいし一つ一つ粒子の状態を対応させたのである。ここでは、坂田モデルにおけるN、P、Λはもはや基本粒子ではなく、バリオンにも中間子にも、観測量として、同等の存在形式（対称性）が与えられている。――牧二郎、前掲論文を参照。

(2) コーク (quark) は、SU(3) の三次元既約表現の表現空間の基底ベクトルであり、それにはそれぞれスピンの二方向をもったuとdとs（およびそれらの反粒子）がある。三つのコークの積が、強い相互作用をする、質量の低いバリオンの規定量と変換性を与え、コークと反コークの積が、強い相互作用をする、質量の低い中間子の規定量と変換性を与える。コークのチャージは、ユニットチャージの三分の一か、あるいは三分の二である。コークは実体的契機となりうるものかもしれず、ウルバリオンと呼ばれるべきものになるのかもしれない。しかし、チャージが三分の一であるところから、それは見掛けのもので

あって、別にウルバリオンがあるのかもしれない。とにかく、コークは、八重法理論を一歩進めたものとして注目される。

(3) H・ヴァイル『シンメトリー』遠山啓訳、一九五七年、六、七頁。

(4) 同訳書、二七頁。

(5) 同訳書、一六頁。

(6) Diels: Fragmente der Vorsokratiker, 4 Aufl. 1922, 45 B 15.

(7) Ibid.: 45 D 4, cf. D 8.

(8) Ibid.: 32 B 1.

(9) 遠山啓『無限と連続』一九五二年、四八、六五頁。

(10) 遠山啓「数学と弁証法」『思想の科学』第二号、一九五九年、六五頁。

(11) 遠山氏の数学論については拙著『現代社会科学方法論の批判』第二章第二節で批判的な私見を述べたことがあるから、それを参照されたい。