混沌系工学特論 #9

情報科学研究科　井上純一

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

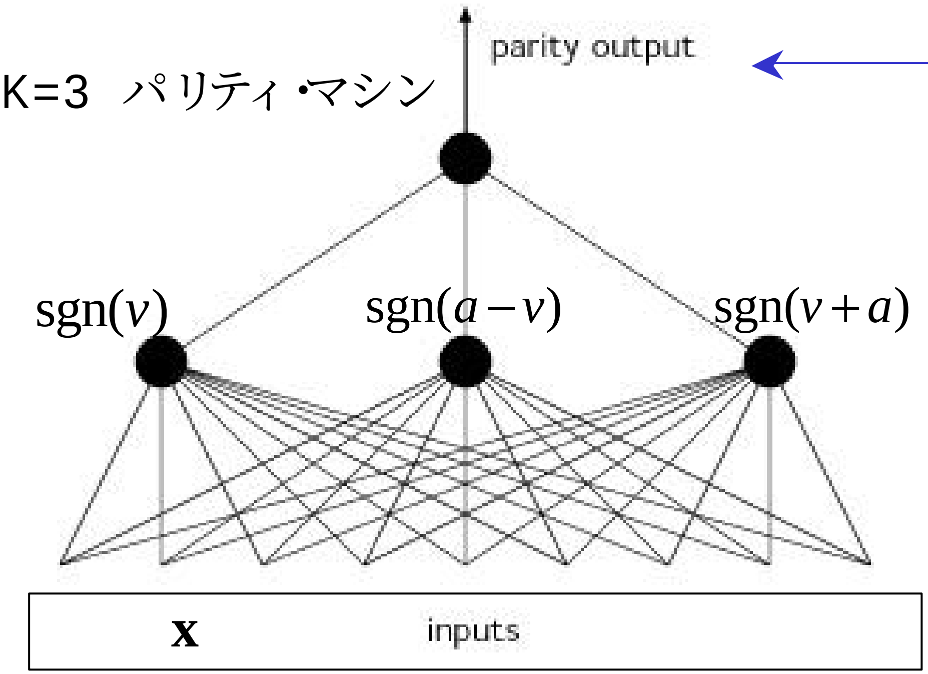
平成17年1月31日　第10回（最終回）講義

実現不可能な規則のオンライン学習

前回の復習

教師機械

K=3　パリティ・マシン



$$T_a(v) = \mathrm{sgn}[v(a-v)(a+v)]$$
$$v = \sqrt{N}(\mathbf{J}^0 \cdot \mathbf{x}) / |\mathbf{J}^0|$$

最終出力は3つのパーセプトロンの出力のパリティとなる

性能　：実現することのできる入出力関係の数は

$\sim 10N$　(レプリカ法の解析による)

(単純パーセプトロンは2N)

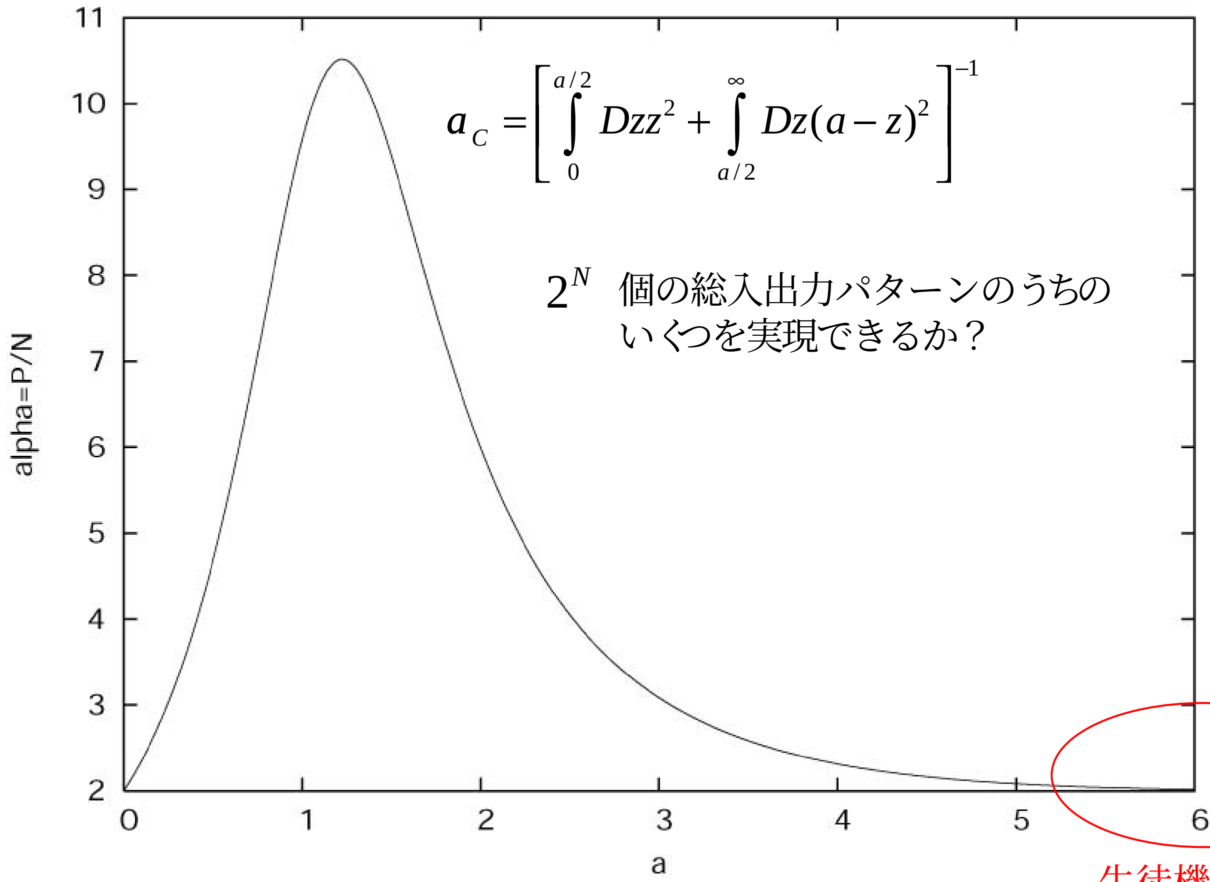
$T_{a\to\infty}(v) = \mathrm{sgn}[v]$　(学習可能となる極限)

$S(u) = \mathrm{sgn}[u], u = \sqrt{N}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}) / |\mathbf{J}|$

⇒　単純パーセプトロン(生徒機械)にとって実現不可能な規則である

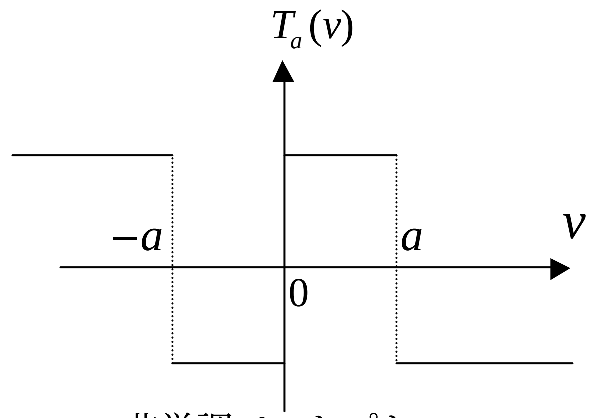
教師機械の記憶容量：補足

レプリカ法による解析によれば



$$a_C = \left[\int_0^{a/2} Dz z^2 + \int_{a/2}^{\infty} Dz (a-z)^2 \right]^{-1}$$

2^N 個の総入出力パターンのうちの
いくつを実現できるか？



非単調パーセプトロン

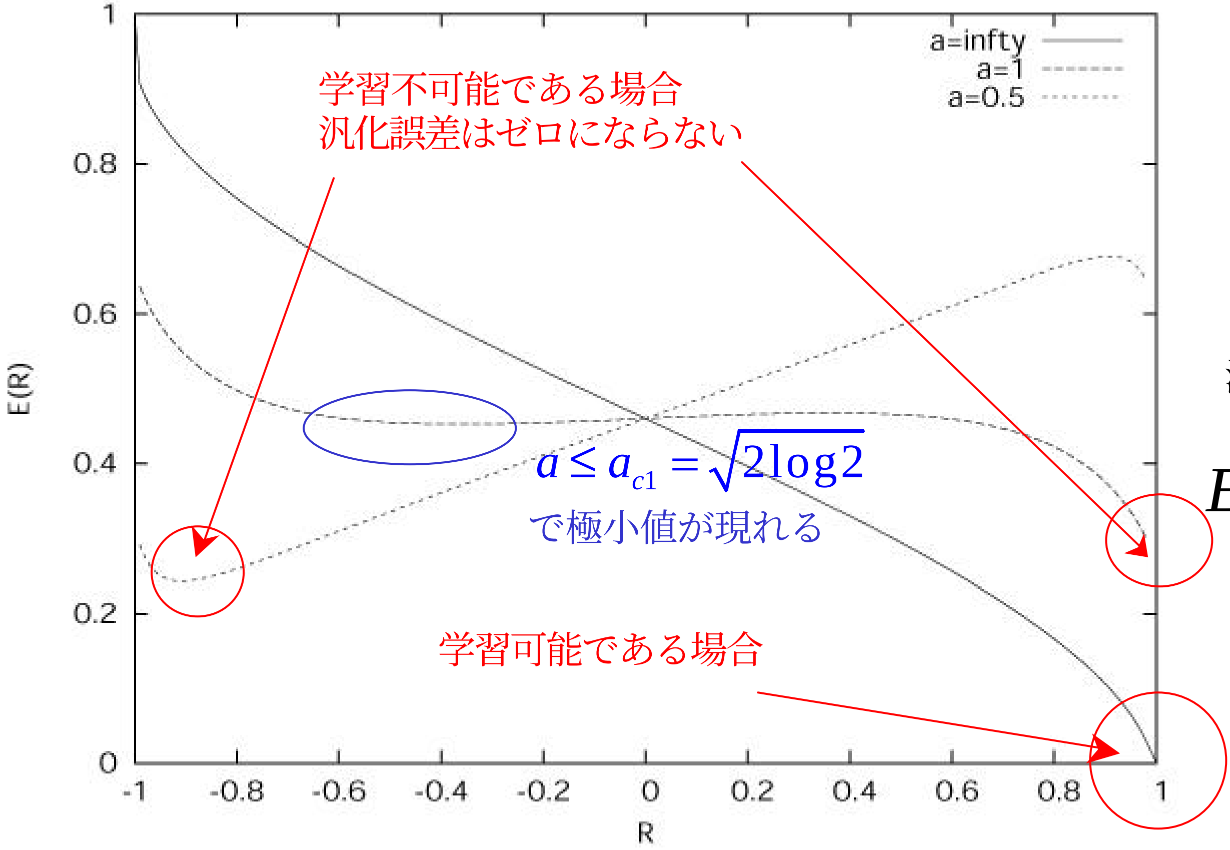
⇒ 教師機械の入出力関係は
生徒機械にとって実現不可能

生徒機械の記憶容量 $2N$

マクロな量の導入と汎化誤差

前回の復習

汎化誤差の学習則に依らない一般的性質



両機械の結合の重なり

$$R = \left(\mathbf{J}^0 \cdot \mathbf{J}\right) / \left|\mathbf{J}^0\right|\left|\mathbf{J}\right|$$

生徒機械の結合の長さ

$$l = \left|\mathbf{J}\right| / \sqrt{N}$$

汎化誤差

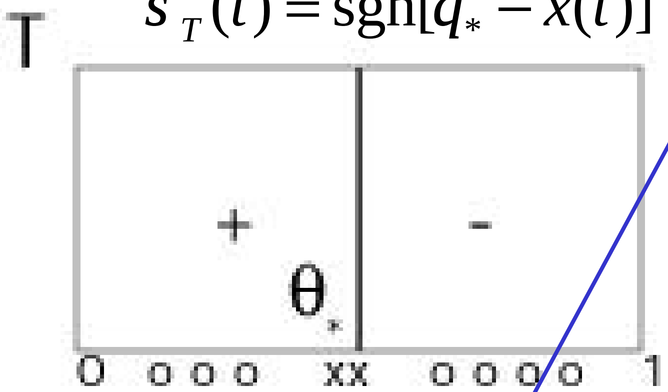
$$E_a(R) = \left\langle \Theta\left(-T_a(v) S(u)\right)\right\rangle$$

汎化誤差の例題数の増加に
ともなう振る舞いは具体的に
学習則を与えることにより明らか
となる

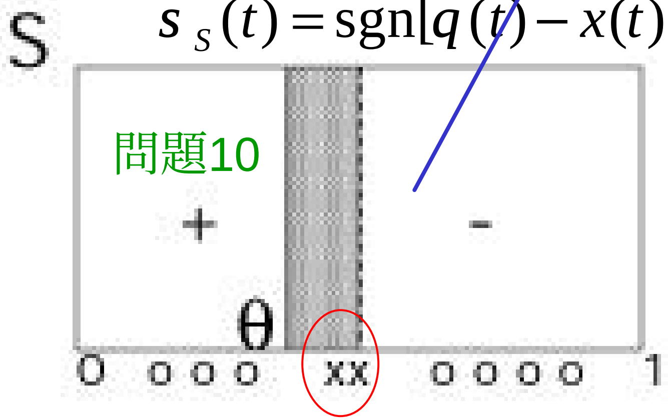
パーセプトロン学習とそのダイナミックス

前回の復習

$$s_T(t) = \mathrm{sgn}[q_* - x(t)]$$



$$s_S(t) = \mathrm{sgn}[q(t) - x(t)]$$



この領域に落ちた入力に対して
間違った結果を出力する

これの高次元版を考える　　　パーセプトロン学習

$$\mathbf{J}^{\mathbf{m+1}} = \mathbf{J}^{\mathbf{m}} - \underline{\Theta(-T_a(v)S(u))}S(u)\mathbf{x}$$

教師/生徒の出力が異なる
場合のみ結合が修正される

マクロな量は次の微分方程式に従う　$P = a\,N$

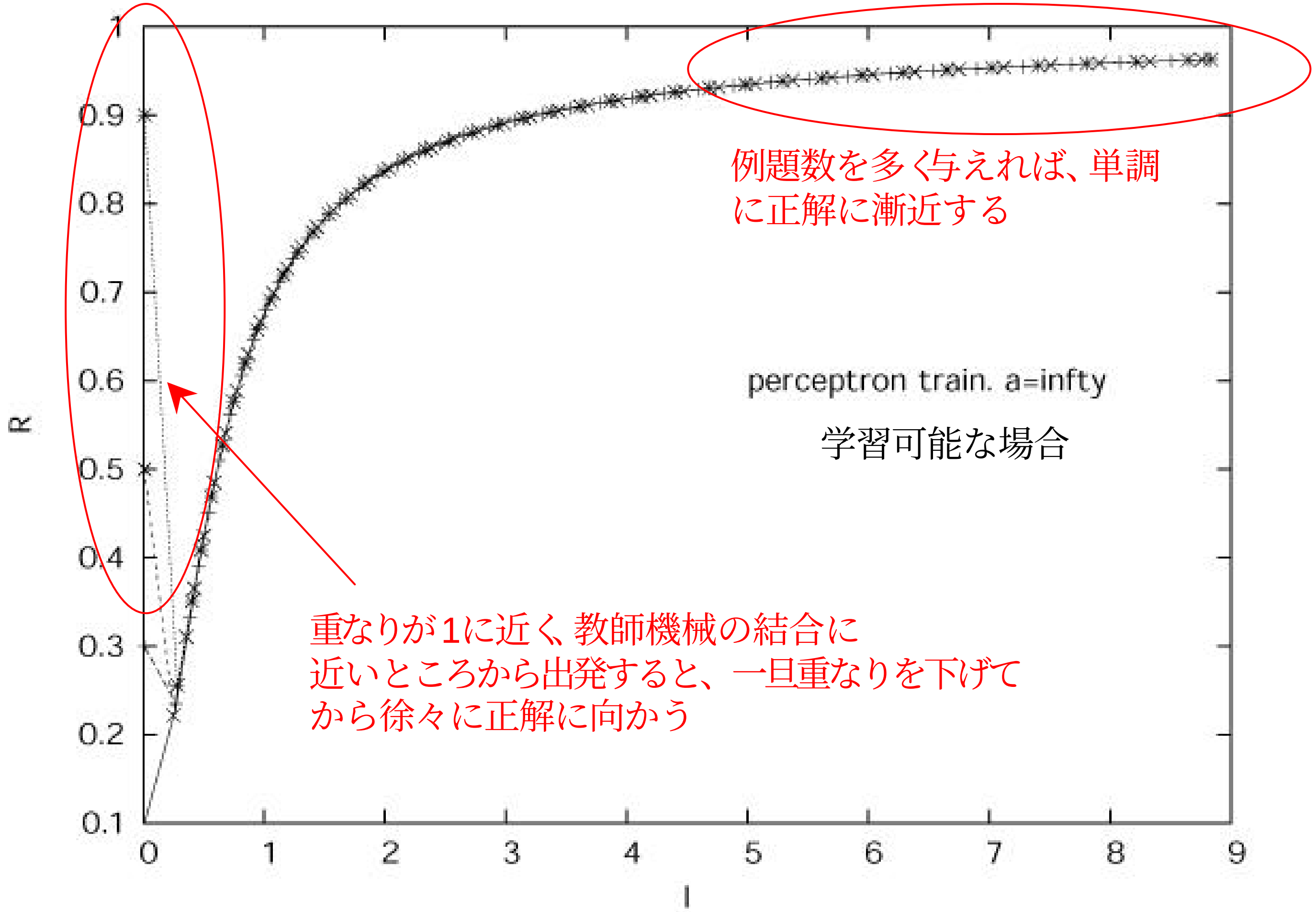
$$2l\frac{dl}{da} = -2l\left\langle \Theta(-T_a(v)S(u))u \right\rangle + \left\langle \Theta(-T_a(v)S(u)) \right\rangle$$

$$l^2\frac{dR}{da} = -\frac{R}{2}\left\langle \Theta(-T_a(v)S(u))v \right\rangle + l(R\left\langle -\Theta(T_a(v)S(u))u \right\rangle$$
$$-\left\langle \Theta(-T_a(v)S(u))v \right\rangle)$$

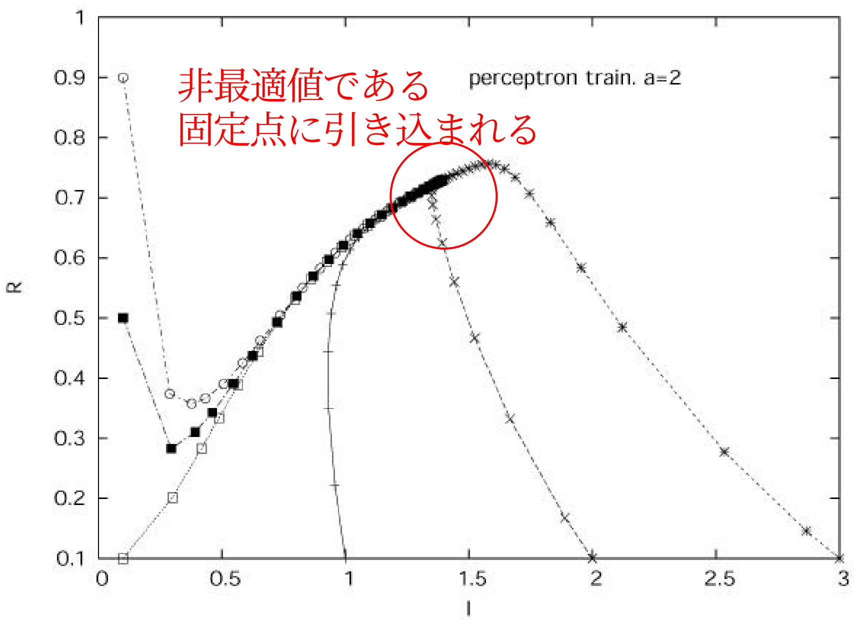
状態更新式

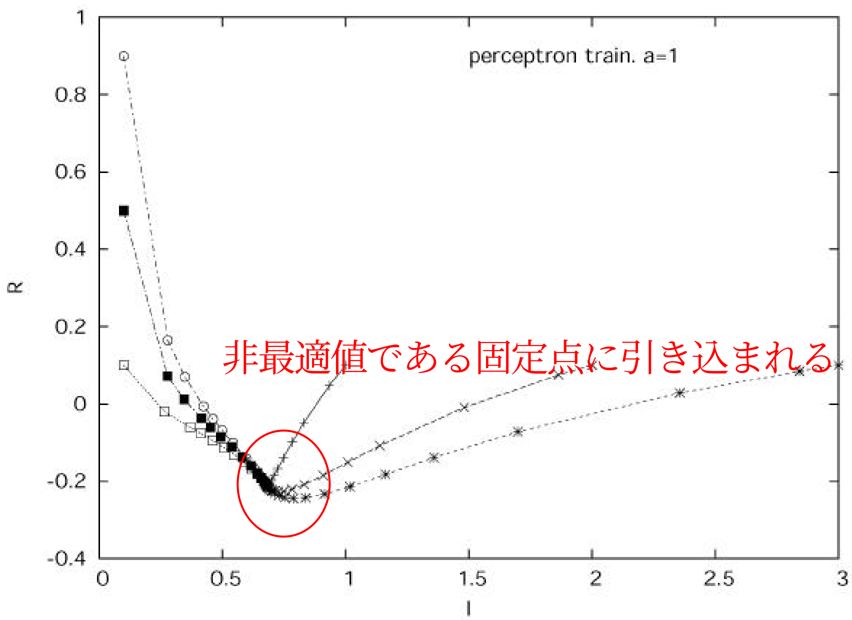
導出の詳細は講義ノート参照

マクロな量のフロー図#1



マクロな量のフロー図#2



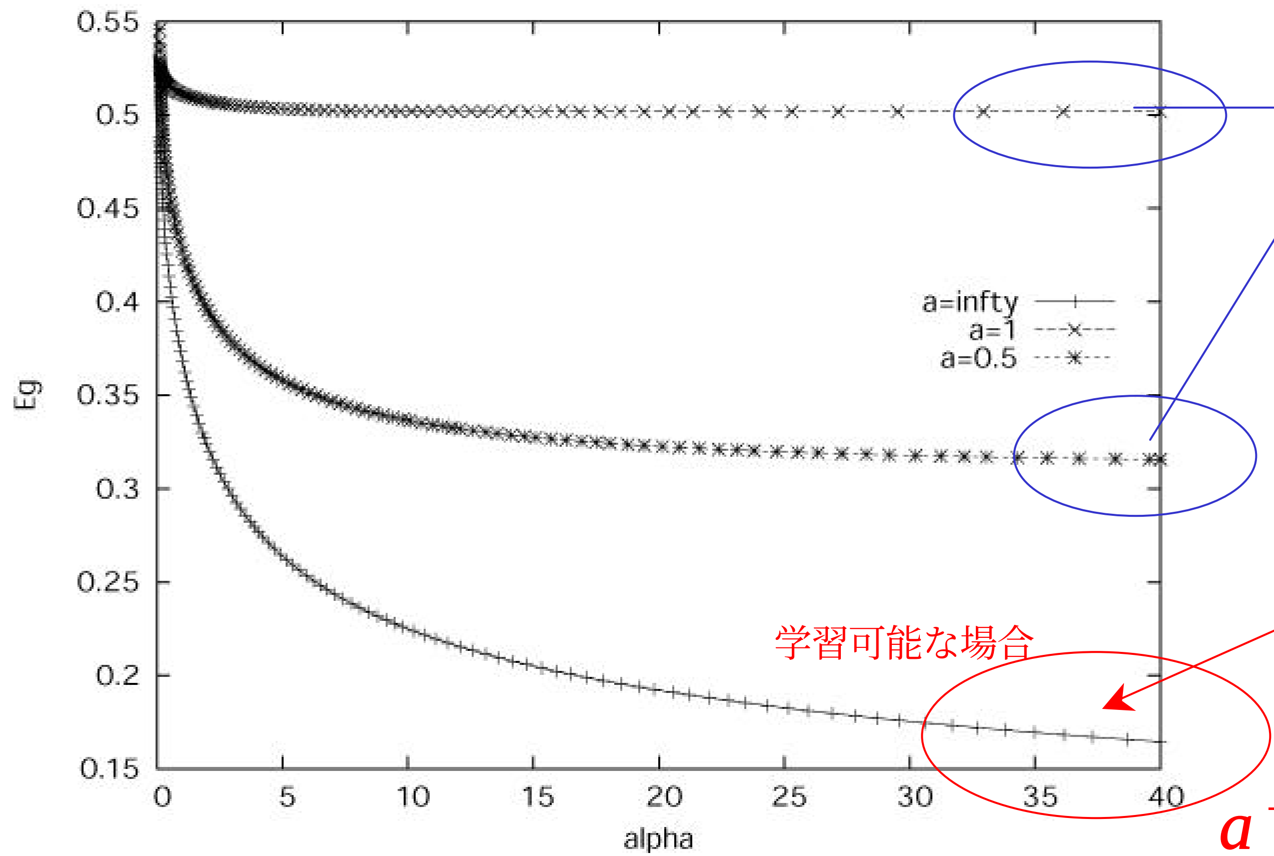


汎化誤差は

$$E_a(R) = \left\langle \Theta(-T_a(v)S(u)) \right\rangle$$

で算出される

パーセプトロン学習の学習曲線



学習不可能な場合、
非最適値に指数関数
的に漸近してしまう

バッチ学習に比べて
精度が悪い
⇒何とか加速できないか？

$a^{-1/3}$ 則に従う

学習レートの導入

パーセプトロン学習に学習レートを導入する

$$\mathbf{J}^{\mathbf{m+1}} = \mathbf{J}^{\mathbf{m}} - \underbrace{g(a)}_{\text{学習レート}}\Theta(-T_a(v)S(u))S(u)\mathbf{x}$$

マクロな発展方程式は

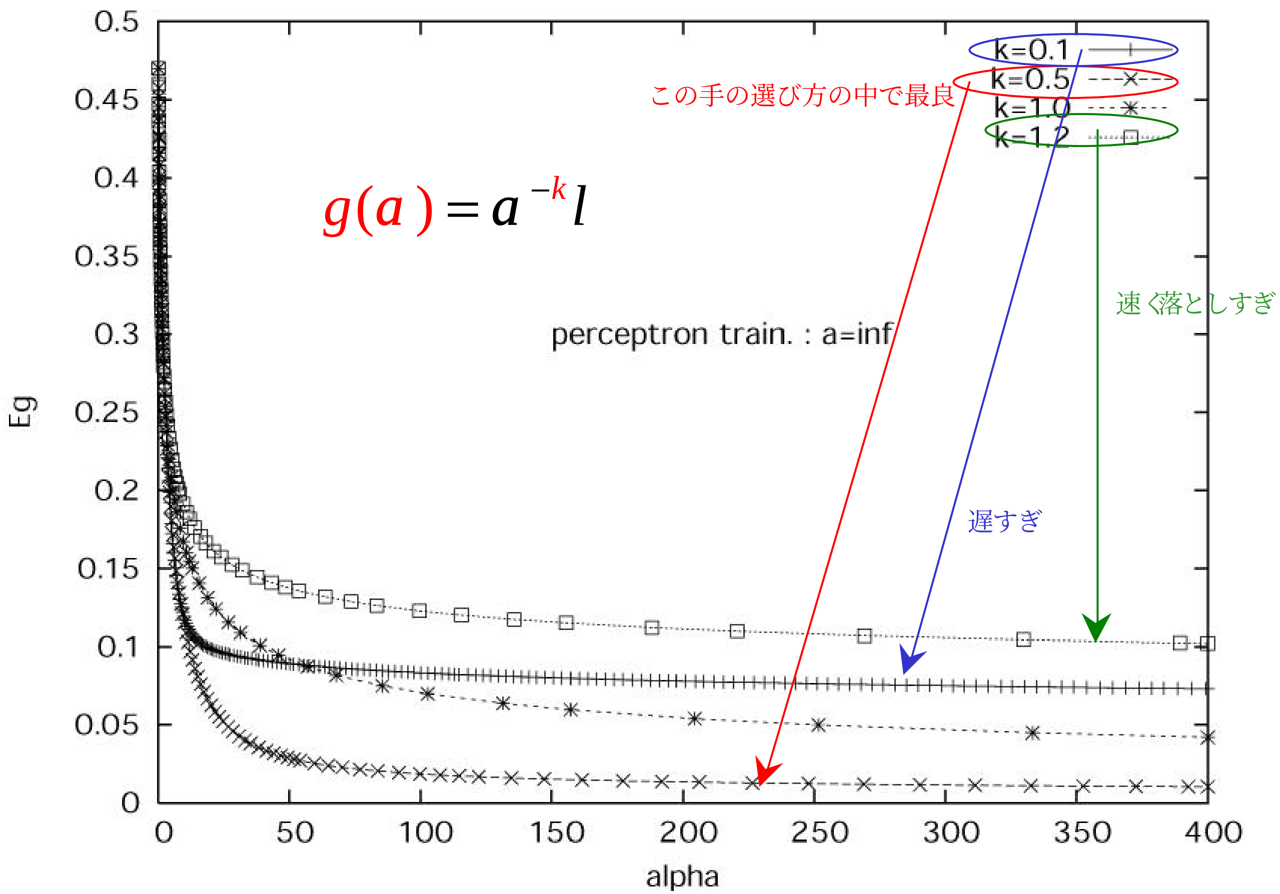
$$\frac{dR}{da} = \frac{1}{l^2}\left[-\frac{R}{2}g(a)^2 E_a(R) + g(a)\left[F_a(R)R - G_a(R)\right]l\right] \equiv L(g(a))$$

$$\frac{dl}{da} = \frac{1}{l}\left[\frac{g(a)^2 E_a(R)}{2} - g(a)F_a(R)l\right]$$

学習レートの例題数に関する「スケジューリング」を考える

$$g(a) = a^{-k}l \qquad \Rightarrow \text{ 様々なkの値に対してパフォーマンスを調べる}$$

ad hoc な学習レートのパフォーマンス



システマティックに
最適な学習レートを
選ぶ方法はないものか？

学習レートの最適化

学習の各ステップで重なりの増加率が最大になるように学習レートを決定する

$$\frac{dR}{da} = \frac{1}{l^2}\left[-\frac{R}{2} g(a)^2 E_a(R) + g(a)\left[F_a(R)R - G_a(R)\right] l \right] \equiv \underline{L(g(a))}$$

学習レートに関する
汎関数を最大化

$$\boxed{g_{opt}(a) = \frac{\left[F_a(R)R - G_a(R)\right] l}{RE_a(R)}}$$

F_a, E_a, G_a, R, l
を介して例題数に依存する

最適な学習レートのスケジューリング

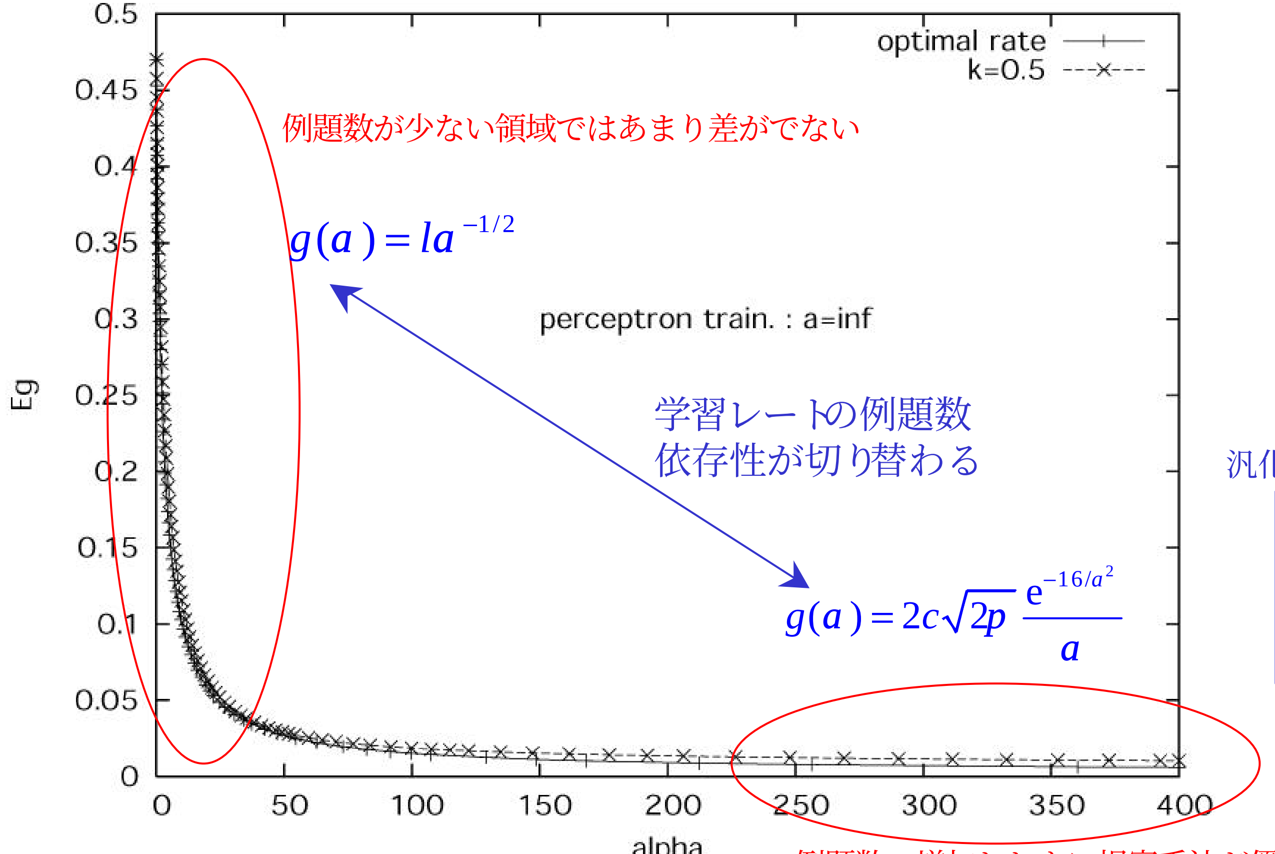
$$\boxed{\begin{aligned} &(1+R)^{-(1+A)/A}(1-R)^{(1-A)/A} R = cl \\ &A = 1 - 2\Delta = 1 - 2e^{-a^2/2} \end{aligned}}$$

マクロな量のフローが陽に書ける

⇒ ad hoc な学習レートの選び方の
最良値と比較する

最適化された学習曲線

学習可能な場合



例題数の増加とともに提案手法が優位になる

汎化誤差の漸近形

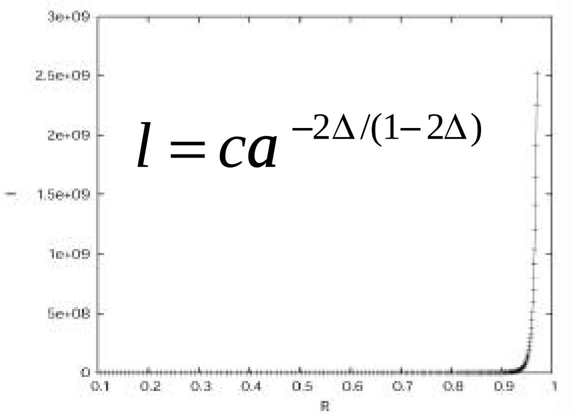
$$e_g=\frac{4}{p}a^{-1}$$

バッチ学習と同じ精度

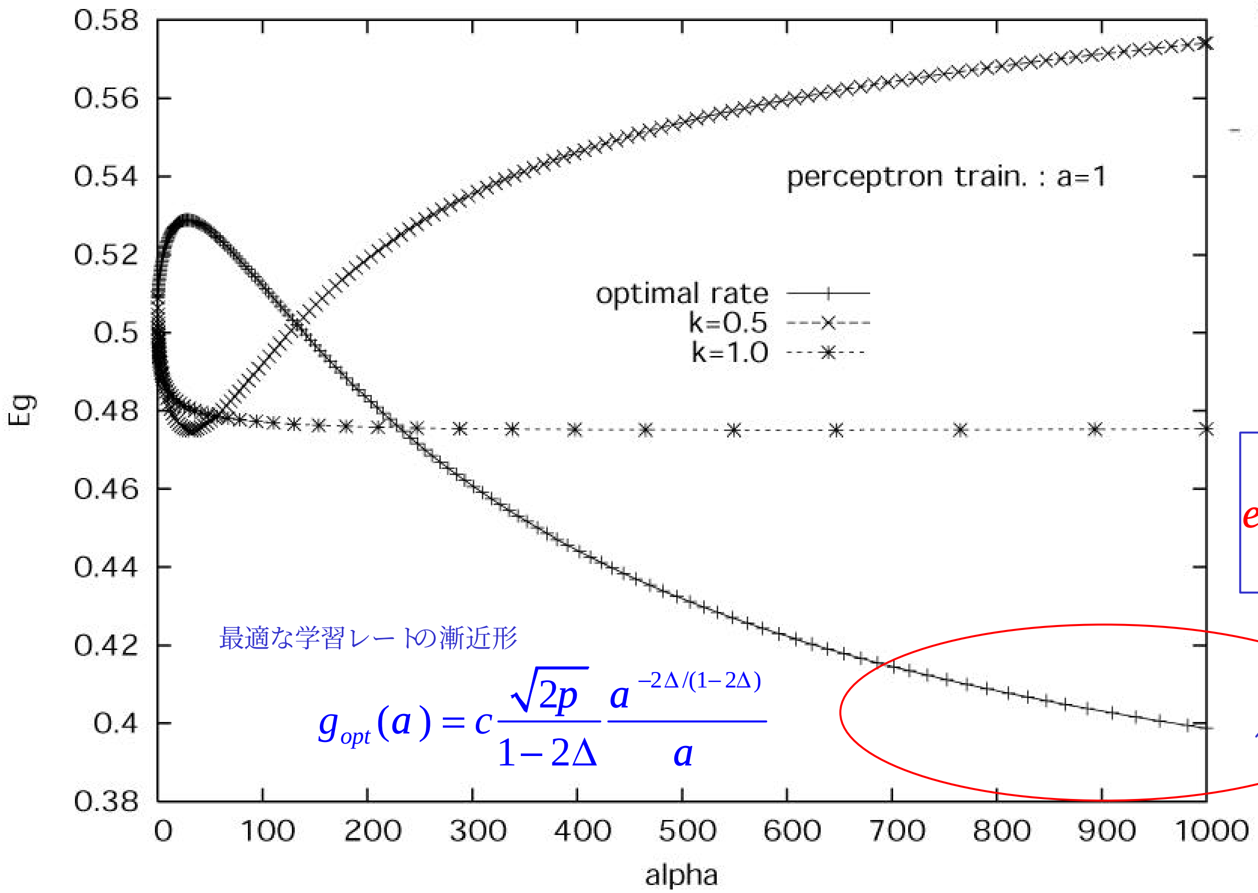
最適化された学習曲線

学習不可能な場合

結合の長さは学習とともに発散



$$l = ca^{-2\Delta/(1-2\Delta)}$$



最適な学習レートの漸近形

$$g_{opt}(a) = c\frac{\sqrt{2p}}{1-2\Delta}\frac{a^{-2\Delta/(1-2\Delta)}}{a}$$

学習曲線の漸近形

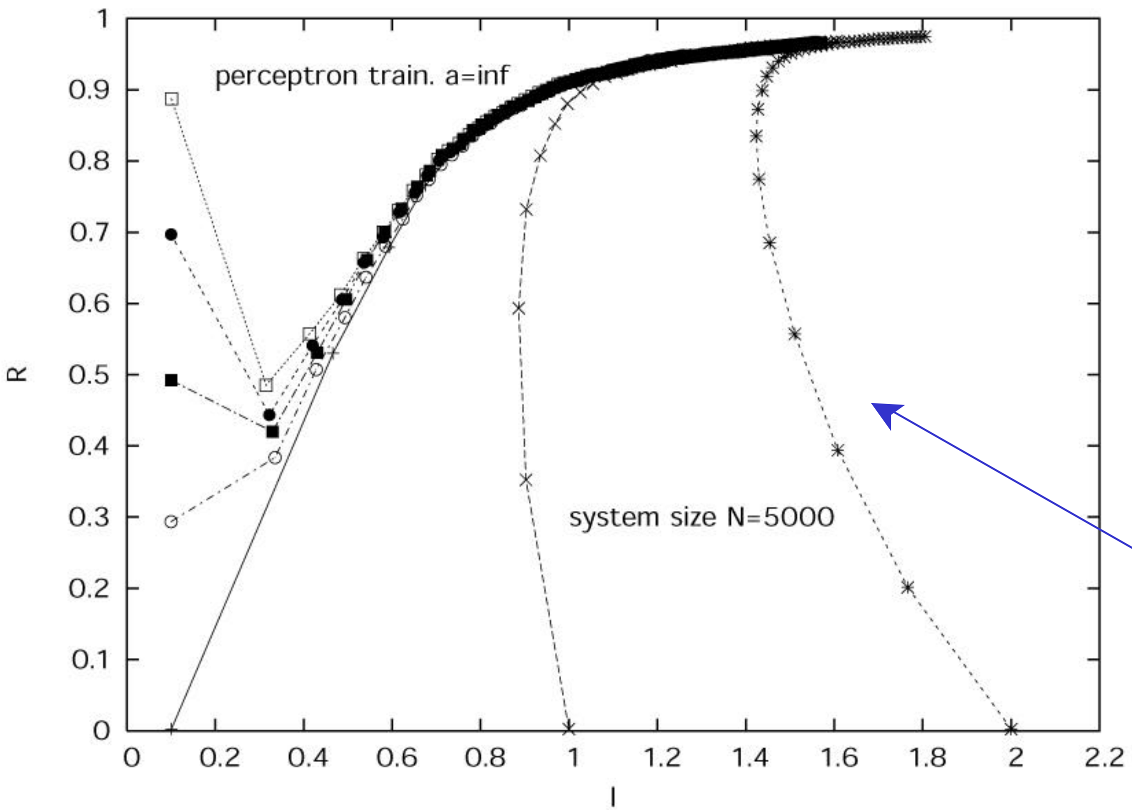
$$\boxed{e_g = \frac{\sqrt{2}}{p}\frac{\sqrt{2H(a)}}{1-2\Delta}\frac{1}{\sqrt{a}} + 2H(a)}$$

オンライン学習の計算機シミュレーション

オンライン・パーセプトロン学習に関するサンプルプログラム

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/KONTON2004/cnline.c

各自がダウンロードし、必要と
あらば修正を加えて使ってください



上掲サンプル・プログラムの
出力結果の一例

課題13

次式の意味で最適化された
オンラインHebb学習をシミュレートせよ

$$\mathbf{J}^{\mathbf{m+1}} = \mathbf{J}^{\mathbf{m}} + g(a)T_a(v)\mathbf{x}$$

$$g(a) = la^{-k}$$