経済学研究 *62-3*
北海道大学 2013. 2

サヴェジ氏の剃刀

園　信太郎

1．サヴェジ氏の剃刀

サヴェジ氏（Savage, Leonard Jimmie, 1917.11.20―1971.11.1）は彼の「基礎論」において一つの態度を貫いており，それは次のように要約できる。

(1)「確率」の基礎づけを問題とする場合，「不確定性に直面している状況での行為の選択」に直接かかわらない「確率」は，ひとまず脇に置く。
(2)「不確定性に直面している状況での行為の選択」に直接かかわる「確率」の探査のみに努力を傾注する。
(3)「不確定性に直面している状況での行為の選択」に直接かかわる「確率」のみが本来の「確率」である。

サヴェジ氏は，「世界」の不確定性に直面している「個人」の行為に規範的思索を傾注する過程で，(1)(2)(3)を自身に課するに至ったのである。このような「確率」に対するサヴェジ氏の判断を，「サヴェジ氏の剃刀」と呼ぶこととする。

サヴェジ氏の剃刀は，「確率」をめぐる議論の混乱に終止符を打つだけの潜在力を持っている。例えば，「偶然とは結局何か」という問は脇に置かれる。このように厄介な問が「確率」概念の探査の過程からそぎ落とされるのである。かくして彼は，個人的確率（personal probability）の概念を提示するに至るのである。

彼が客観論的見解（objectivistic views）や必要性的見解（necessary views）を退けるのは，結局の所このサヴェジ氏の剃刀による。

2．無差別性の非自明性

直径10cmの純金の棒が二本あり，それらの長さが「等しい」とされる際，この「等しい」は数学における＝（イコール，equal）ではなく，「測定の誤差」を考慮に入れた上での「等しい」であるはずである。

異なる事象**A**, **B**に対して，それぞれが「世界」において通用する場合に，共通の賞**c**がもたらされる「くじ」を考えると，くじ**A**とくじ**B**とが「無差別である」とはいかなる事であろうか。よく引用される流儀では，正の微小な額εを利用して，くじ**A**の賞を「**c**及びε」に変形してくじ**B**はそのままとすれば，「その個人」の選好が**A**の方に傾き，**A**，**B**の役割を入れ替えると**B**に傾くのならば，「無差別である」とする流儀である。この流儀は，「二つの「くじ」に「格差」があるとしてもそれがε以下であることはない」，つまり「無差別でないとすれば，「格差」はεを超えることとなる」ことを暗黙の前提としており，ここで定義されるべき「無差別性」が既に利用されている。しかも，個人的選好によってその「存在」が基礎づけられるべき価値尺度が，「正の微小な額」を持ち出す際に既に導入されているのである。

サヴェジ氏は「無差別性の非自明性」を充分に了解しており，「確率」を基礎づける際に，無差別性を安易に持ち出す流儀に強い疑念を持っている。「「異なる」くじが無差別である」ことを自明視することなど到底できないのである。

3．潜在的定量化仮説

特定の一枚のコインの投げ上げを想定するこ

とによって,「世界」に対する分割(partition)を導入することが可能である。「一回の投げ上げ」がもたらし得る「観察結果」が,「うら」か「おもて」かの単純二分岐(simple dichotomy)であるとすると,「世界」の「状態たち」は「うら」か「おもて」かに二分される。「うら」及び「おもて」は各事象(event)と見なせるので,前節で述べたような「くじ」を導入できるのだが,既に注意したように,これらの「くじ」の間に「無差別性」を天下り式に導入してしまうことには問題がある。そのような「無差別性」は,実証的傾向を持つ統計家にとっては受け入れ難いものであろう。

もし,「この世界」のどこかには問題の「無差別性」を満たすコインが「存在する」のだと想定するのならば,この想定は,少なくとも「そのコイン」に関しては,「うら」と「おもて」の「確率」が等価,即ち二分の一であるとの「仮定」と,実質的に同一ではなかろうか。

「たしからしさ」を定量的に把握できる事を,このような「仮定」に基づいて「示す」としても,それは,ほとんど論理の悪循環ではなかろうか。サヴェジ氏は,「無差別性」の様式を通して導入されてしまう「等確率の仮定」,いわば潜在的定量化仮説だが,これをなんとか回避しようとするのである。

4．公準 P6´

上の第2節で導入した「くじ」たちを考え,共通の賞 **c** を指定しておく。「このコイン」を投げ上げるという試行を想定すると,「世界」に対する分割が導入できる。一回の投げ上げでは,前節で述べたように,「世界」は「うら」及び「おもて」に二分割される。n を正の整数とする場合,「世界」は,n 回の投げ上げでは 2^n 個に分割される。ここではあくまでも「分割」のみを問題としており,試行の独立性や観察結果の等確率性は関りが無い。つまり,例えば「このコイン」の存在を認めれば,「世界」がいくらでも「細分」できることのみが重要なのである。

サヴェジ氏は,「くじ **A** よりもくじ **B** が(「その個人」にとって)選好が上ならば,「世界」に対するある分割が存在して,その任意の項 **C** に対して,くじ **A** ∪ **C** よりもくじ **B** の方が選好が上である」という,公準(postulate)を提示するに至るのである。これがサヴェジ氏の **P6´** である。彼の世界観からすれば,事象とは「世界」の「状態たち,states」の集合であり,事象間では通常の集合算を考えることができる。

「くじ **A** よりもくじ **B** は選好が上位である」とは,「定義」によれば,「「くじ **B** がくじ **A** よりも選好が上位には非ず」には非ず」という,基本関係「選好が上位には非ず」を否定することによって導入される,間接的な関係なのだが,サヴェジ氏は,「選好が上位である」を,いわば positive に,直接的に解釈しなおしたのである。

5．定性的確率と等分割補題

「くじ **A** はくじ **B** よりも選好が上位には非ず」ということを,「**A** は **B** よりもより確からしいには非ず」と表現することによって,事象の間に二項関係が導入できるが,これは「その個人」にとっての定性的確率と呼ばれる。「世界」は「状態たち」の総体であり,記号 **S** で表現される。**S** の部分集合が事象である。また,「「**A** は **B** よりもより確からしいには非ず」には非ず」は,「**A** は **B** よりもより確からしい」と表現される。なお,「「**A** は **B** よりもより確からしいには非ず」かつ「**B** は **A** よりもより確からしいには非ず」」は,「**A** と **B** とは確からしさに関して同等である」と略言される。

サヴェジ氏は **P6´** を利用することによって,「任意の事象 **A** に対して,それに対するある分割(**B**, **C**)が存在して,**B** と **C** とは確からしさに関して同等である」を導出する。しかし彼は,この「等分割補題」を導く際に致命的に重要な(数学における)ある原理を暗黙の内に使っている。

それは次の「従属選択の原理,principle of depending choice」である。

$$\forall x \in A \exists y \in AR(x,y) \to \forall z \in A \exists f : \boldsymbol{\omega} \to A(f(0)=z \wedge \forall n \in \boldsymbol{\omega} R(f(n), f(n+1))).$$

ここで R は A 上の二項関係であり，$\boldsymbol{\omega}$ は0から始まる自然数系列である。$\exists f : \boldsymbol{\omega} \to A$ の「よみ」は「$\boldsymbol{\omega}$ から A へのある写像 f が存在して」である。なお $A = \varnothing$ の場合は恒真である。

潜在的定量化仮説を用いずに，**P6´**と従属選択の原理とによって「等分割」の存在を導いているのであり，これは非凡である。

6．定量的確率及びその精密性

等分割補題を利用することによって，前節で導入した（事象間の）定性的確率（qualitative probability）に一致する定量的確率（quantitative probability）の一意的存在が従う。この「一致する」定量的確率とは，任意の事象に対して実数値を対応させる有限加法的確率測度であり，「**A** は **B** よりもより確からしいには非ず」と「**A** に対応するその値が **B** に対応するその値よりも大にはあらず」とが同値となるものであり，結局，事象間の「より確からしいには非ず」を実数間の「よりも大には非ず」に翻訳するもののことである。

この個人的定量的確率を **P** とすると，これは「精密」である。即ち，「任意の事象 **A** と0以上1以下の任意の実数 ρ に対して，**A** のある部分集合 **B** が存在して，**P**（**B**）$= \rho$ **P**（**A**）」を満たすのである。なおこの **P** が「一意」とは，「その個人」を指定すると一意に定まるということである。

サヴェジ氏の公準 **P6´**は，個人的定性的確率が「定性的に精密」であることを表しているが，個人的定量的確率は「定量的に精密」なのである。

7． 条件つき確率

サヴェジ氏は，彼の第2公準 **P2** に基づいて条件つき選好（conditional preference）を導入しているが，「**A** が与えられている場合に，**B** は **C** よりもより確からしいには非ず」と「**B** ∩ **A** は **C** ∩ **A** よりもより確からしいには非ず」とが同値であることが示せる。つまり条件つき選好を利用することによって，「条件つき確率」の「定義」としていかなる様式がふさわしいのかが「わかる」のである。この定義と前節で述べた基本命題により，**A** が「実際上不可能，virtually impossible」ではないのならば，**A** が与えられている場合の条件つき確率 **P**（・|**A**）は，任意の事象 **B** に対して，

$$P(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) = \frac{P(\mathbf{B} \cap \mathbf{A})}{P(\mathbf{A})},$$

となることが従う。多くの書物で（合理的根拠が明示されずに）天下り式に導入されている「定義」が，実は「証明される」のである。

条件つき確率は観察に基づく学習の言わば「根拠」であり，ベイズの法則（Bayes’ rule）がこれより従う。

参考文献

Savage, Leonard Jimmie, The Foundations of Statistics, Second Revised Edition, Dover, New York, 1972. 初版は1954年に Wiley, New York, から出ている。これはサヴェジ氏の「基礎論」である。また，園(2001, 2007)を一瞥して頂ければ幸いである。

園 信太郎，『サヴェジ基礎論覚書』，岩波出版サービスセンター，東京，2001年。

園 信太郎，『サヴェジ氏の思索』，岩波出版サービスセンター，東京，2007年。

2012年7月23日（月）