



Title	中心アファイン極小曲面の射影極小性
Author(s)	古畑, 仁
Citation	福岡大学微分幾何学研究会. 2013年11月1日-4日. 福岡大学セミナーハウス., 1-8
Issue Date	2013-11
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/59514
Type	proceedings (author version)
File Information	Geometry_Fukuoka_1311.pdf

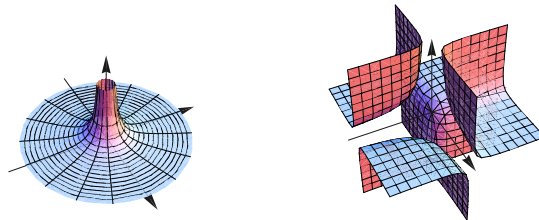


[Instructions for use](#)

中心アファイン極小曲面の射影極小性

古畑 仁 (北海道大学大学院理学研究院)

本講演*では、佐々木武、藤岡敦との共同研究 [3] の一部を紹介した。はめ込み $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が Euclid 空間内の曲面で Gauss 曲率 K が消えないものをあらわすとする。20 世紀初頭に G. Tzitzeica は、 $f(u)$ の接平面と原点との有向距離を $d(u)$ とするとき、 U 上の関数 Kd^{-4} が定数であることは、中心アファイン不変な性質であることを発見した。すなわち、正則線型変換 $A \in GL(3, \mathbb{R})$ に対して、 f がこの性質をもつことと Af がこの性質をもつことは同値である。たとえば、原点中心の球面はこの性質をもっているし、それを変形して得られる楕円面もこの性質をもつことになる。この性質をもつ曲面は、今日では原点を中心とする固有アファイン球面とよばれている。ほかには、一葉双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ や $z(x^2 + y^2) = 1$ であらわされる曲面 (下図左) が、原点を中心とする固有アファイン球面の例となり、豊富にあることが知られている。



<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhashi/book/surfaces/> より

Tzitzeica の発見の時期を考えれば、中心アファイン幾何学において変分問題の研究がなされたのは比較的最近と言ってよい。Wang [10] は、中心アファイン極小はめ込みを定式化し、原点を中心とする固有アファイン球面がその例となることを示した。一方、射影微分幾何学の世界で射影極小曲面が定義されたのはかなり古く、W. Blaschke の有名な

*最後の “Something” を迎えるにあたり、陶山芳彦先生に改めて感謝の意を表します。

本にも記述がみられる．そこには，H. Behnke により，原点を中心とする固有アファイン球面は射影極小であることが主張された旨が書いてある（実際に証明が読めるのは，Sasaki [8] である）．

このように，原点を中心とする固有アファイン球面を含む曲面のクラスとして，中心アファイン極小曲面と射影極小曲面があるわけだが，これらの共通部分は実際にどうなっているのだろうか？ 現在，この問いに対する完全な解答には至っていないが，本稿では定義をできるだけ簡単に復習しつつ，[3] で得られた結果の一部を採録したい．

★

一般に，はめ込み $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を用いて多様体 M^2 上に計量が誘導されれば，その計量に関する面積の変分問題が定式化され，その面積汎関数の極点として，極小はめ込みの概念を得る． \mathbb{R}^3 の幾何学に応じて計量の誘導の仕方が自然に定まり，それに対応して極小はめ込みの概念が定まる．したがって，中心アファイン極小はめ込みと射影極小はめ込みの定義を説明するためには，中心アファイン計量と射影計量の定義を述べればよいことになる．

中心アファイン計量から始めよう．ベクトル空間 \mathbb{R}^3 の標準的なアファイン接続を D とする．はめ込み $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が中心アファインはめ込みであるとは， M^2 の各点 u に対して位置ベクトル $f(u)$ が u での接ベクトル空間 $f_*T_uM^2$ と横断的であることをさす．すなわち，つぎのいわゆる Gauss の公式

$$D_X f_*Y = f_*\nabla_X Y + h(X, Y)(-f)$$

が意味をもつときをいう．ここで， X, Y は M^2 上のベクトル場である．この式で定義される ∇ は M^2 上のアファイン接続となり， h は対称 $(0, 2)$ テンソル場になる． f が非退化であるとは， h が非退化，すなわち計量になるときをいう．本稿では， h が不定値計量である場合を取り扱い，これを f の中心アファイン計量という．定義の仕方から， f に正則線型変換（中心アファイン変換という）をほどこしても中心アファイン計量は不変である．

補題 1. 非退化中心アファインはめ込み $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が中心アファイン極小であるための必要十分条件は, $\text{tr}T = 0$ がなりたつことである. ここで, T はつぎで定義される: h の Levi-Civita 接続を ∇^h とかく. $K := \nabla - \nabla^h$, $T := \frac{1}{2}\text{tr}_h K$ とし, $\mathcal{T} := \nabla^h T$ と定める. \mathcal{T} は Tchebychev 作用素とよばれている. \square

★ ★

射影計量の定義に進もう. これは本来, 射影空間へのはめ込みに対して誘導される計量と理解するのが自然である. D を \mathbb{R}^4 の標準的なアファイン接続とし, Det を D で平行な \mathbb{R}^4 の体積要素とする. はめ込み $F : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ に対して, F の法ベクトル場 ξ が存在して, つぎの余次元 2 の Gauss-Weingarten の公式が意味をもつと仮定する:

$$\begin{aligned} D_X F_* Y &= F_* \nabla_X Y + g(X, Y)\xi + k(X, Y)F, \\ D_X \xi &= -F_* S X + \tau(X)\xi + \rho(X)F. \end{aligned}$$

さらに, これで定まる g が計量であるとき, F を余次元 2 の非退化中心アファインはめ込みという. このとき, Nomizu-Sasaki [7] は, つぎをみたすような ξ が向きをのぞいて一意的に存在することを示した:

$$\begin{aligned} \text{Area}_g(X, Y) &= \text{Det}(F_* X, F_* Y, \xi, F), \\ \text{tr}_g k + \text{tr} S &= 0. \end{aligned}$$

定義と補題 2. 余次元 2 の非退化中心アファインはめ込み $F : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 = (\mathbb{R}^4, D, \text{Det})$ に対して, ∇ と g を上のように定まる ξ を用いて定義したものとする. このとき,

$$G := \frac{1}{8} |\nabla g|_g^2 g$$

と定義する.

(1) \mathbb{R}^4 の体積要素 Det の代わりに D に関して平行な別の体積要素を用いて定義しても, 同じ G が得られる.

(2) 0 にならない M^2 上の関数 ϕ について, F の代わりに ϕF を用いて定義しても, 同じ G が得られる. \square

上のことから， M^2 上の対称 $(0, 2)$ テンソル場 G は， M^2 から 3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3 := (\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) / \sim$ へのはめ込み $[F]$ について定義されていることがわかる． G が非退化になるとき，これを $[F]$ の射影計量とよぶ．

余次元 2 の非退化中心アファインはめ込みに対する ξ の正規化条件とくに 2 つ目は，人工的な印象を与えたかもしれないが，こうして得られる G が古典的に知られたものと一致するように工夫されている．

$f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して， $M^2 \ni u \mapsto \begin{bmatrix} f(u) \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^3$ から定義される G が非退化になるとき，これを f の射影計量とよぶ．

なお， G が退化する場合も重要な例を含んでいて，それをこめて考えるのが自然であるが，ここでは立ち入らないことにする．なお，射影曲面については [9] が詳しい．



さて，我々の目標は，中心アファイン極小曲面の中で，射影極小とみなせるものはどのようなものか，調べることであった．まず，中心アファイン極小曲面についてよい局所表示をとり，それをを用いて射影極小になるための条件をかくという方針をとる．

補題 3．不定値中心アファイン極小曲面 f に対して，各点の近傍でつぎをみたす局所座標系 $(U; x, y)$ と関数 $b, c, \varphi \in C^\infty(U)$ および定数 $c_j \in \mathbb{R}$ が存在する：

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma(x, y) = c_1 x + c_2 y + c_3, \\ f_{xx} = ((\log \varphi)_x + c_1) f_x + b f_y, \\ f_{xy} = c_2 f_x + c_1 f_y - \varphi f, \\ f_{yy} = c f_x + ((\log \varphi)_y + c_2) f_y. \end{cases}$$

ただし， σ は f から定まる関数で，つぎのように与えられているとする：

$$\sigma := -\frac{1}{4} \log(-K d^{-4}).$$

また，方程式系 (1) の可積分条件は，

$$(2) \quad \begin{cases} c_x = -c(\log \varphi)_x - c_2(\log \varphi)_y, \\ b_y = -b(\log \varphi)_y - c_1(\log \varphi)_x, \\ bc = c_1c_2 - \varphi - (\log \varphi)_{xy} \end{cases}$$

で与えられる．

□

補題の (x, y) は，中心アファイン計量 h の漸近座標であることに注意する： $h = 2\varphi dx dy$ ．また， f が中心アファイン極小であることは， $\Delta_h \sigma = 0$ とあらわすことができる．

以下，局所的な議論をしいちいち断らない．不定値中心アファイン極小曲面 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ と $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，

$$b_\lambda := \lambda b, \quad c_\lambda := \frac{c}{\lambda}, \quad \varphi_\lambda := \varphi, \quad (c_1)_\lambda := \lambda c_1, \quad (c_2)_\lambda := \frac{c_2}{\lambda}$$

とすると， $b_\lambda, c_\lambda, \varphi_\lambda, (c_1)_\lambda, (c_2)_\lambda$ は再び可積分条件 (2) をみたす．したがって， $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して，不定値中心アファイン極小曲面の 1 径数族 $f_\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) が構成でき，これを f の随伴族とよぶ．

定理 4．不定値中心アファイン極小曲面でその随伴族がすべて射影極小であるものは，つぎのいずれかと中心アファイン合同である：

(i) Tchebychev 作用素が消える曲面 ([6, 4, 2]) :

(a) 原点中心不定値固有アファイン球面，

(b) $f(x, y) = {}^t(x, y, x^{-a}y^{-b})$, $ab(a+b+1)^{-1} < 0$,

(c) $f(x, y) = {}^t(x, y, (x^2 + y^2)^b \exp(-a \operatorname{Arctan}(xy^{-1})))$,
 $(a^2 + 4b^2)(2b - 1)^{-1} < 0$,

(d) $f(x, y) = {}^t(x, y, -x(a \log x + b \log y))$, $b(a+b)^{-1} > 0$,

(e) $f(x, y) = {}^t(x, y, -x \log x + x^{-1}y^2)$,

(f) $f(x, y) = {}^t(\exp y, A(y) \exp x, B(y) \exp x)$.

ただし， a, b はそれぞれの条件をみたす実数であり， A と B はある関数 θ についての常微分方程式 $X''(y) - X'(y) - \theta(y)X(y) = 0$ の基本解になっている関数である．

(ii) つぎの形の線織面：

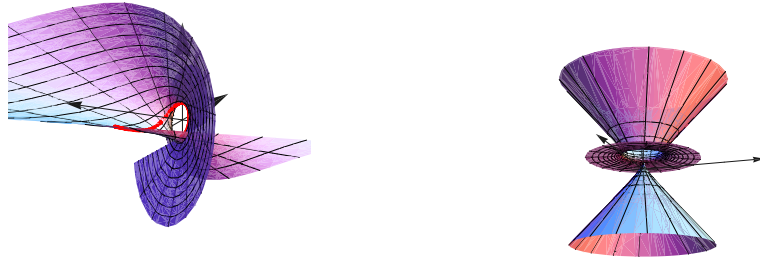
$$f(u, v) = A'(u) + vA(u).$$

ただし, $A = A(u)$ は $\det(A \ A' \ A'') \neq 0$ をみたす \mathbb{R}^3 値関数である.

(iii) つぎの曲面の随伴族:

$$f(x, y) = {}^t \left(\frac{e^{x+y}}{x+y} \cos(x-y), \frac{e^{x+y}}{x+y} \sin(x-y), 1 + \frac{1}{x+y} \right).$$

□



左図は, (ii) の曲面の例で, $A(u) = {}^t(e^u, \cos u, \sin u)$ として得られる. 右図は, (iii) の曲面の例で, (iii) の式の曲面である (これは Fujioka [1] により発見されていた). 定理の証明は, [3] を参照願いたい, つぎの補題を計算することによって得られる.

補題 5. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を不定値中心アファイン極小はめ込みとし, (x, y) を補題 3 の座標とする. このとき, f が射影極小であることの必要十分条件は,

$$c_1^2 c_x + c_2^2 b_y = 0$$

で与えられる.

□

★ ★ ★ ★

最後に付録として, グラフの場合に中心アファイン極小曲面, 射影極小曲面がどのような方程式に支配されているかを掲載しておきたい. 著者は, ここに掲載する複雑な高階の偏微分方程式を直接扱って何かを得る方法をもっていないが, 読者から何かご教示いただくことを期待して計算してみた. \mathbb{R}^2 上の領域上の関数 z に対して, 今までと同

様に,

$$z_j := \partial_j z := \frac{\partial z}{\partial x^j}, \quad z_{ij} := \partial_j \partial_i z := \frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^i}$$

と略記する. $f: \mathbb{R}^2 \supset U \ni (x^1, x^2) \mapsto t(x^1, x^2, z(x^1, x^2)) \in \mathbb{R}^3$ が非退化はめ込みであることは, Hesse 行列 $g_0 := (z_{ij})$ が各点で非退化であることと同値である. 和の記号は省略して, 添字はいずれも 1, 2 を動くこととする.

命題 6. 上の f が中心アファイン極小であるための必要十分条件は, z が次の方程式をみたすことである:

$$-\frac{1}{2}(z - x^k z_k) |\det(z_{ab})|^{-1/2} \partial_i \left(|\det(z_{ab})|^{1/2} z^{ij} \partial_j \log \frac{|\det(z_{ab})|^{1/4}}{z - x^l z_l} \right) = 0.$$

□

これは z の 4 階の方程式で, g_0 の Laplace 作用素を $\Delta, \mu := |\det(g_0)|^{1/4}$ とかくと,

$$\Delta (\log \mu - \log(z - x^l z_l)) = 0$$

とあらわせる. 一般次元の場合にも導出されていて [5] に掲載されている.

命題 7. 上の f が射影極小であるための必要十分条件は, z が次の方程式をみたすことである:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\det(z_{ab})|^{-1/4} \partial_i \left(|\det(z_{ab})|^{1/2} z^{ij} \partial_j \partial_k (z^{kl} \partial_l (|\det(z_{ab})|^{1/4})) \right) \\ & - z^{ij} z_{kl} \partial_i (z^{kp} \partial_p (|\det(z_{ab})|^{1/4})) \partial_j (z^{lq} \partial_q (|\det(z_{ab})|^{1/4})) \\ & + \frac{1}{2} (\partial_k (z^{kl} \partial_l (|\det(z_{ab})|^{1/4})))^2 = 0. \end{aligned}$$

□

これは z の 6 階の方程式で, $\nu^j := z^{jl} \partial_l \mu$ とおくと,

$$\mu \Delta \partial_k \nu^k - 2z^{ij} z_{kl} \partial_i \nu^k \partial_j \nu^l + (\partial_k \nu^k)^2 = 0$$

とかける.

なお, f が原点を中心とする固有アフィン球面であるための必要十分条件は

$$\partial_1 (\log \mu - \log(z - x^l z_l)) = \partial_2 (\log \mu - \log(z - x^l z_l)) = 0$$

であらわされる. 命題6の方程式をみたすことはすぐにわかるが, 命題7の方程式をみたすことはただちにわかるわけではない. また, $\partial_i \nu^j = 0$ がなりたつことと (本稿では定義を説明していないが) f が非固有アフィン球面であることは同値であり, 非固有アフィン球面も射影極小曲面の例になっていることが分かる.

参考文献

- [1] A. Fujioka, Centroaffine minimal surfaces with constant curvature metric, Kyungpook Math. J. **46** (2006), 297–305.
- [2] A. Fujioka, Centroaffine minimal surfaces whose centroaffine curvature and Pick function are constants, J. Math. Anal. Appl. **365** (2010), 694–700.
- [3] A. Fujioka, H. Furuhashi and T. Sasaki, Projective minimality for centroaffine minimal surfaces, to appear in J. Geom.
- [4] H. Furuhashi and L. Vrancken, The center map of an affine immersion, Result. Math. **49** (2006), 201–217.
- [5] A.M. Li, H. Li, and U. Simon, Centroaffine Bernstein problems, Differential Geom. Appl. **20** (2004), 331–356.
- [6] H. Liu and C.P. Wang, The centroaffine Tchebychev operator, Result. Math. **27** (1995), 77–92.
- [7] K. Nomizu and T. Sasaki, Centroaffine immersions of codimension two and projective hypersurface theory, Nagoya Math. J. **132** (1993), 63–90.
- [8] T. Sasaki, On a projectively minimal hypersurface in the unimodular affine space, Geom. Dedicata **23** (1987), 237–251.
- [9] T. Sasaki, Line congruence and transformation of projective surfaces, Kyushu J. Math. **60** (2006), 101–243.
- [10] C.P. Wang, Centroaffine minimal hypersurfaces in \mathbb{R}^{n+1} , Geom. Dedicata **51** (1994), 63–74.

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhashi/>