Title	A realization problem for statistical manifolds
Author(s)	古畑, 仁
Citation	福岡大学微分幾何学研究会. 2011年11月3日-6日. 福岡大学セミナーハウス., 1-7
Issue Date	2011-11
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/59515
Type	proceedings (author version)
File Information	Geometry_Fukuoka_1111.pdf

A realization problem for statistical manifolds

古畑　仁 （北海道大学大学院理学研究院）

Let denote the n dimensional *standard* space of constant Hessian curvature zero by N^n. We give examples of statistical immersions from a domain of N^2 into N^3 of cylinder type. Moreover, we determine all the statistical immersions from N^n into N^{n+1} with vanishing statistical second fundamental form.

本講演*は，２００９年にこの研究集会で報告した内容 [1] の続編にあたる．繰り返しになるが諸概念の復習を簡単にしておこう．

なめらかな n 次元多様体 M とその上のねじれのないアファイン接続 ∇，擬 Riemann 計量 g の組が**統計多様体** (statistical manifold) であるとは ∇g が対称 $(0,3)$ テンソル場になることを言った．さらに，統計多様体 (M,∇,g) が **Hesse 多様体** であるとは ∇ が平坦であることをさす．(∇,g) から M の接束上に自然に構成される Kähler 構造が正則断面曲率一定 $-c(\in\mathbb{R})$ をもつとき，Hesse 多様体 (M,∇,g) は**定 Hesse 曲率** c であるという．すなわち，

$$(\nabla_X K)(Y,Z) = -\frac{c}{2}\left\{g(X,Y)Z + g(X,Z)Y\right\}, \quad X,Y,Z\in\Gamma(TM)$$

がなりたつことをいう (志磨 [7] 参照．符号に注意すること)．ここで，$K=K^{(\nabla,g)}$ は

$$K(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla^g_X Y$$

で定義される $(1,2)$ テンソル場で，∇^g は g の Levi-Civita 接続をあらわす．このとき，計量 g は定曲率 $-c/4$ となることがわかる．

$(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ を統計多様体，$f:M\to\widetilde{M}$ をはめ込みとし，M 上に g と ∇ をつぎで定める：

$$g=f^*\widetilde{g},\quad g(\nabla_X Y,Z)=\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X f_*Y, f_*Z),\quad X,Y,Z\in\Gamma(TM).$$

このとき，(∇,g) は M 上の統計構造になる．これを，f によって $(\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ から誘導された統計構造とよぶ．統計多様体 (M,∇,g) から $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ へのはめ込み f が**統計はめ込み** (statistical immersion) であるとは，f

*西川青季先生退職記念研究集会．西川先生に改めて感謝の意を表します．

によって $(\widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ から誘導された統計構造が (∇, g) に一致するときをいう．

例 1．つぎのように $N^n := ((\mathbb{R}^+)^n, \nabla^n, g_0)$ を定める：

$$(\mathbb{R}^+)^n := \{y = {}^t(y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n \ : \ y^1 > 0, \cdots, y^n > 0\},$$
$$\nabla^n{}_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = -\delta_{ij}(y^j)^{-1}\frac{\partial}{\partial y^j}, \qquad g_0 := g_{E^n}|_{(\mathbb{R}^+)^n} = \sum_{j=1}^n (dy^j)^2.$$

ここで，g_{E^n} は $\mathbb{R}^n$ の Euclid 計量である．このとき，N^n は Hesse 曲率 0 の Hesse 多様体で，接続 ∇^n は完備である． □

この N^n は，Hesse 多様体の幾何学として基本的な対象である．実際，つぎがわかる ([4])．$k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対して，N^n_k を $(\mathbb{R}^{n-k} \times (\mathbb{R}^+)^k, \nabla^{[k]} := \nabla^{g_{E^{n-k}}} \oplus \nabla^k, g_0 = g_{E^n}|_{\mathbb{R}^{n-k}\times(\mathbb{R}^+)^k})$ で定めると，これも Hesse 曲率 0 の Hesse 多様体になる．定め方から，N^n_n は例 1 と同じものをあらわし，N^n_0 は，Euclid 空間にその Levi-Civita 接続を考えたものにほかならない．(M, ∇, g) を Hesse 曲率 0 の n 次元単連結 Hesse 多様体で，g が正定値なものとする．このとき，$k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ が定まり，統計はめ込み $\iota : (M, \nabla, g) \to N^n_k$ が存在する．さらに，∇ が完備ならば $\iota(M) = N^n_k$ である．ι は統計はめ込みという言い方をしているが，次元が等しいので「局所同型写像が存在する」といってもよい．

さらに，情報幾何学的な観点からみても N^n が重要であることを示唆するつぎの事実を紹介しておこう．有限集合 $\Omega := \{1, 2, \ldots, n+1\}$ 上の正の確率密度関数は，$\Delta^n := \{\eta \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{j=1}^n \eta^j < 1\}$ の元 $\eta = {}^t(\eta^1, \ldots, \eta^n)$ をとって

$$p(x, \eta) := \begin{cases} \eta^i, & x = i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ 1 - \sum_{l=1}^n \eta^l, & x = n+1 \end{cases}$$

とあらわすことができる．Δ^n を Ω 上の正の確率密度関数全体 (をあらわすパラメータ空間) と理解すると，Δ^n 上に Fisher 情報計量 g_F と指数型接続 $\nabla^{(e)}$ が自然に定義される．すなわち，$\partial_i := \partial/\partial\eta^i$ とかく

とき，

$$
\begin{aligned}
g_F(\partial_i, \partial_j) &:= \sum_{x\in\Omega} \{\partial_i \log p(x,\eta)\}\{\partial_j \log p(x,\eta)\} p(x,\eta) \\
&= \cdots = (\eta^i)^{-1}\delta_{ij} + (1 - \sum_{l=1}^{n} \eta^l)^{-1}, \\
g_F(\nabla^{(e)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) &= \sum_{x\in\Omega} \{\partial_i\partial_j \log p(x,\eta)\}\{\partial_k \log p(x,\eta)\} p(x,\eta) \\
&= \cdots = -(\eta^i)^{-2}\delta_{ij}\delta_{jk} - (1 - \sum_{l=1}^{n} \eta^l)^{-2}
\end{aligned}
$$

がそれである．このとき，$(\Delta^n, \nabla^{(e)}, g_F)$ は Hesse 曲率 -1 の Hesse 多様体になる．また，

$$
\varphi : \Delta^n \ni \eta \mapsto \begin{bmatrix} 2\sqrt{p(1,\eta)} \\ \vdots \\ 2\sqrt{p(n+1,\eta)} \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}
$$

とおくと，像が原点を中心とする半径 2 の超球面の各座標が正なる部分（第１象限）になる．さらに Hesse 多様体 $(\Delta^n, \nabla^{(e)}, g_F)$ から Hesse 多様体 N^{n+1} への統計はめ込みを与えることがわかる．このように N^{n+1} は基本的な対象であるところの $(\Delta^n, \nabla^{(e)}, g_F)$ を実現する空間として重要な役割を果たしている．

我々の目標は**統計多様体の部分多様体論**を構築することである．アンビエント空間として，まず上の N を採用する．手始めに N^{n+1} の超曲面を調べよう．Euclid 微分幾何学を思い出せば，Hesse 曲率一定の Hesse 多様体から N^{n+1} への統計はめ込みを調べることが最初の課題である．最初の定理は上の φ が次の意味で剛性をもつことを主張する([3])．

定理 2. $f : M \to N^{n+1}$ を超曲面，(∇, g) を f によって誘導される M の統計構造とする．$n > 2$ かつ (M, ∇, g) が Hesse 曲率一定 k の Hesse 多様体ならば，(1) $k = 0$ または (2) $k < 0$ で像 $f(M)$ は原点を中心とする半径 $2(-k)^{-1/2}$ の超球面の各座標が正なる部分の開集合である． □

[3] ではもう少し弱く見える仮定で同様の結果を導いている．証明はEuclid 微分幾何学における球面の剛性定理（局所理論）を用いている．このため条件 $n > 2$ がついているが，本当に必要かどうかは不明である．

定理２によって，Hesse 曲率一定負の Hesse 多様体の N^{n+1} 内での実現はわかったし，Hesse 曲率一定正の Hesse 多様体は N^{n+1} 内に実現できないことがわかった．Hesse 曲率一定零の Hesse 多様体から N^{n+1} への統計はめ込みを調べよう．

$f : (M, \nabla, g) \to N^{n+1} := ((\mathbb{R}^+)^{n+1}, \nabla^{n+1}, g_0)$ を余次元 1 の統計はめ込みとし，n をその単位法ベクトル場とする．アンビエント空間には２つの接続 ∇^{n+1} と ∇^{g_0} があることから，f は２種類の第２基本形式をもつことに注意する．すなわち，つぎで M 上の $(0, 2)$ テンソル場 h と $I\!I$ を定義する ([2] 参照).

$$\begin{aligned} \nabla^{n+1}_X f_* Y &= f_* \nabla_X Y + h(X, Y) n, \\ \nabla^{g_0}_X f_* Y &= f_* \nabla^g_X Y + I\!I(X, Y) n, \quad X, Y \in \Gamma(TM). \end{aligned}$$

$I\!I$ は Euclid 微分幾何学における第２基本形式に他ならない．h を仮に統計第２基本形式と呼んでおこう．$h = I\!I = 0$ ならば，(∇, g) は Hesse 曲率 0 の Hesse 構造になることがすぐにわかる．さらにつぎが得られる．

定理 3. $f : N^n \to N^{n+1}$ を統計はめ込みとする．統計第２基本形式 h が消えるならば，($\natural$) をみたすような $L = (l^\alpha_i) \in M_{n+1\ n}(\mathbb{R})$ と $b = (b^\alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して，f は

$$f^\alpha((y^i)) = e^{b^\alpha} (y^1)^{l^\alpha_1} \cdots (y^n)^{l^\alpha_n}.$$

とかける．ここで，($\natural$) とは，$\alpha = 1, \ldots, n+1$ と $i = 1, \ldots, n$ に対して，(1) $l^\alpha_i(l^\alpha_i - 1) = 0$，(2) rank $L = n$，(3) $l^\alpha_1 + \cdots + l^\alpha_n \leq 1$ をみたすことをさす． □

多少見にくいが，この f は特別に配置された超平面に過ぎない．たとえば，

$$N^2 \ni \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ e^{b^3} \end{bmatrix} \in N^3 \quad \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b^3 \end{bmatrix} \right)$$

や

$$N^2 \ni \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y^1 \\ (\cos\theta) y^2 \\ (\sin\theta) y^2 \end{bmatrix} \in N^3 \quad \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ \log\cos\theta \\ \log\sin\theta \end{bmatrix} \right)$$

$(\theta \in (0, \pi/2))$ を考えてみるとよい．勝手な超平面を与える写像は我々の統計はめ込みではないことに注意せよ．

つぎに，Euclid 空間の定曲率零曲面の例として柱面があることを思い出して，同様のアイディアで例を構成してみよう．

命題 4. f を N^2 の領域 $\mathbb{R}^+ \times I$ から N^3 への写像で

$$\mathbb{R}^+ \times I \ni (s, t) \mapsto \begin{bmatrix} s \\ u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^+)^3$$

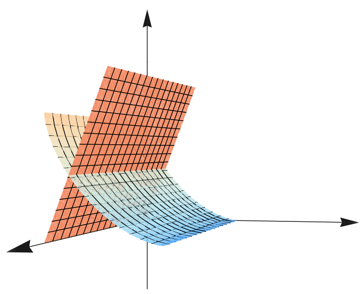
とかけるものとする．f が統計はめ込みであるための必要十分条件は，

$$u'(t)^2 + v'(t)^2 = 1, \qquad \frac{u'(t)^3}{u(t)} + \frac{v'(t)^3}{v(t)} = \frac{1}{t}$$

で与えられる． □

たとえば，つぎのアステロイド風の曲線はこの解を与える（これは胡娜（北海道大）により発見された）．

$$(1 - a^3) u^{2/3} - a(1 - a^3)^{2/3} v^{2/3} = \frac{2}{3} b \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$



(1) $a = 1/2, b = 0$, (2) $a = -2, b = 3/4$

これで解が尽きていると予想されるが，上の方程式を解いて柱状統計はめ込みを決定する問題は，完全に解決されたわけではない．

補　遺

講演当日は時間の関係で説明できなかったが，Hesse 曲率一定正の Hesse 多様体の実現についても述べておきたい．Riemann 幾何学において，双曲型空間を平坦な空間に実現するには，Lorentz 空間内の二次超曲面（二葉双曲面の一連結成分）を採用する方法がよく知られている．これに対応する結果を紹介しよう．簡単のため $i, j = 1, \ldots, n-1$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$，$A, B = 1, \ldots, n+1$ と約束しておく．

例 5．Poincaré 上半空間 $(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+, g := (x^n)^{-2} \sum_\alpha (dx^\alpha)^2)$ 上につぎで接続 ∇ を定義すると，$H^n := (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+, \nabla, g)$ は Hesse 曲率一定 4 の Hesse 多様体である．

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = (x^n)^{-1} (2 \sum_{i,j} \delta^i_\alpha \delta^j_\beta \delta_{ij} + \delta^n_\alpha \delta^n_\beta) \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

□

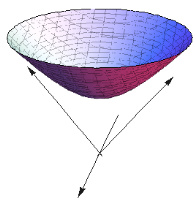
これは 2 次元のときは (大雑把にいうと) 正規分布全体のなす空間とみなせて重要な対象である ([2] 参照)．[4] では Hesse 曲率一定正の Hesse 多様体の分類は完成していない ([5] も参照) ので，この空間 H^n を特徴づけることは興味深い問題と思われる．なお，Hesse 曲率一定正の Hesse 多様体について，坊向伸隆氏と野田知宣氏による研究がある (接続の完備性を仮定しての非存在定理 [6])．

例 6．Lorentz 空間 $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, G_0 := \sum_j (dy^j)^2 - 2dy^n dy^{n+1})$ 上につぎで接続 D を定義すると，$L^{n+1} := (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, D, G_0)$ は Hesse 曲率 0 の Hesse 多様体で，接続 D は完備である．

$$
\begin{aligned}
D_{\frac{\partial}{\partial y^A}} \frac{\partial}{\partial y^B} = (y^{n+1})^{-2} \sum_i \left\{ y^i \delta_{A\,n+1}\delta_{B\,n+1} - y^{n+1}(\delta_{A\,i}\delta_{B\,n+1} + \delta_{A\,n+1}\delta_{B\,i}) \right\} \frac{\partial}{\partial y^i} \\
+(y^{n+1})^{-3} \Bigg[(y^{n+1})^2 \left\{ \sum_{i,j} \delta_{Ai}\delta_{Bj}\delta^{ij} - (\delta_{An}\delta_{B\,n+1} + \delta_{A\,n+1}\delta_{Bn}) \right\} \\
- \sum_i y^i y^{n+1} (\delta_{Ai}\delta_{B\,n+1} + \delta_{A\,n+1}\delta_{Bi}) \\
+ (\sum_j (y^j)^2 + y^n y^{n+1}) \delta_{A\,n+1}\delta_{B\,n+1} \Bigg] \frac{\partial}{\partial y^n} \\
-(y^{n+1})^{-1} \delta_{A\,n+1}\delta_{B\,n+1} \frac{\partial}{\partial y^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

このとき，二葉双曲面の一連結成分を表す標準的な写像は

$$
\psi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto (x^n)^{-1} \begin{bmatrix} -x^1 \\ \vdots \\ -x^{n-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j (x^j)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+
$$



とかけるが，この ψ は H^n から L^{n+1} への統計はめ込みになることがわかる． □

参考文献

[1] 古畑仁，Spaces of nonpositive constant Hessian curvature, 福岡大学微分幾何研究会 (2009 年) 講演録.

[2] Furuhata H., Hypersurfaces in statistical manifolds, Differential Geom. Appl. 27(2009), 420–429.

[3] Furuhata H., Statistical hypersurfaces in the space of Hessian curvature zero, Differential Geom. Appl. 29(2011), S86–S90.

[4] Furuhata H. and Kurose T., Hessian manifolds of nonpositive constant Hessian sectional curvature, Preprint.

[5] 黒瀬俊，定曲率ヘッセ多様体の分類，京都大学数理解析研究所講究録 **1623**(2009), 22–29.

[6] 野田知宣，Hesse 断面曲率一定の Hesse 多様体について，ミニワークショップ「統計多様体の幾何学とその周辺 (3) ／幾何学と諸科学の連携調査」(2011 年北海道大) 講演資料，`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhata/workshop/stat/11/Noda_II.pdf`.

[7] Shima H., Hessian manifolds of constant Hessian sectional curvature, J. Math. Soc. Japan **47**(1995), 735–753.

`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhata/`