放物線は曲っているか — アファイン平面曲線の微分幾何学入門 —

古畑　仁
北海道大学大学院理学研究科数学専攻

わたしたちの数学教室では，夏，高校生向けの講座を企画していて，毎年多くの参加者にいろいろな数学を楽しんでもらっています．私も，微分も行列も習っていない参加者にも気持ちが伝わるように願いながら，微分幾何学の初歩の話をしたことがありました．宣伝になってしまい恐縮ですが，同僚の先生方のいくつかの講義といっしょに，北大数学科編・中村郁監修，北大高校生講座「数学の並木道」（日本評論社）という本になりましたので，ご覧ください．そのときは，図形を分類するとはそもそもどういうことか，からはじめて，微分幾何学におけるいわゆる平面曲線論の基本定理，すなわち，(1) ２つの平面曲線はその曲率関数が等しければユークリッド幾何学的に同じである，(2) 区間上の関数が与えられると，それを曲率関数とする平面曲線が存在する，ということを説明しました．ここで２つの平面曲線 $p_1, p_2 : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ がユークリッド幾何学的に同じであるとは，特殊直交行列 $A \in SO(2) := \{A : 2\times 2$ 行列 $|{}^tAA = E, \det A = 1\}$ (E は単位行列をあらわします) とベクトル $c \in \mathbb{R}^2$ が存在して，

$$p_2(s) = Ap_1(s) + c$$

がすべての $s \in (a,b)$ についてなりたつことをいいます．すなわち，$\mathbb{R}^2$ のユークリッド内積から決まる構造（長さや角度）と向きを保存する変換でうつりあうということを意味しています．ちなみに，平面曲線論の基本定理は，北大の数学専攻の学部生ですと，３年生前期に学ぶ内容です（２年生でも受講が可能なシステムになっています）．

この話を前述の本に掲載したときに，予告編のようにして，いろいろな立場の幾何学がありうること，とくに $\mathbb{R}^2$ のユークリッド内積を使わない曲線の微分幾何学があること，その立場では，ユークリッド幾何学の直線に相当するものが，放物線になってしまうことを述べました．今回は，その話をしてみたいと思います．

1. 等積アファイン幾何学

まず，数学らしく言葉の準備からはじめましょう．

定義１． ２つの平面曲線 $p_1, p_2 : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ が等積アファイン幾何学的に同じであるとは，特殊線形行列 $A \in$

$$SL(2;\mathbb{R}) := \{A : 2 \times 2\,\text{行列} \mid \det A = 1\}$$

とベクトル $c \in \mathbb{R}^2$ が存在して，

$$p_2(t) = Ap_1(t) + c$$

がすべての $t \in (a,b)$ についてなりたつことをいいます．

たとえば，２つの三角形があるとします．三辺の長さがそれぞれ等しければ，ユークリッド幾何学的に同じであることは良く知られています（本当はその並び方も考慮しなければいけません）．もちろん，等積アファイン幾何学的にも２つの三角形は同じです．また，もしも三角形の囲む面積が等しいとすると，これらは等積アファイン幾何学的には同じものですが，ユークリッド幾何学的には同じとは限りません．

等積アファイン幾何学は，平行移動と行列式を保つ一次変換で不変な概念に注目しています．すなわち，平面 $\mathbb{R}^2$ には内積（ユークリッド計量）という構造を考えるのではなく，面積を測る道具であるところの行列式（標準的な面積要素，あるいは標準的なアファイン接続に関して平行な非退化な２形式と言い換えてもよいのですが）という構造を考えます．

2. 等積アファイン幾何学における曲線の長さ

以下，この等積アファイン幾何学の立場で物事を考えます．まず，曲線の長さという概念を用意しましょう．内積がない世界で長さなどあるのでしょうか？

定義 2．平面曲線 $p:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ が局所凸であるとは，

$$\det\left(p'(t)\ p''(t)\right)>0$$

がすべての $t\in(a,b)$ についてなりたつことを言います．

ここで，$'$ は，微分をあらわしています．また，det は 2 つの（縦）ベクトル $a_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}$ と $a_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{bmatrix}$ に対して，通常のように $\det\left(a_1\ a_2\right):=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ を意味しています．

このとき，p の速度ベクトル p' は 0 にならないので，これは立ち止まらない点の運動です．さらに，速度ベクトル p' と加速度ベクトル p'' が平行にならないのですから，この曲線は変曲点を持ちません．

局所凸な曲線 $p:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ が与えられているとします．位置と速度ベクトルの組を $\underline{p}(t):=(p(t),p'(t))$ のようにあらわします．$t_1,t_2\in(a,b)$ に対して，点 $p(t_1)$ を通る $p'(t_1)$ 方向の直線と点 $p(t_2)$ を通る $p'(t_2)$ 方向の直線との交点を $q(t_1,t_2)$ とし，三角形 $p(t_1)q(t_1,t_2)p(t_2)$ を，$\underline{p}(t_1)$ と $\underline{p}(t_2)$ の支持三角形と呼びます．

考えている曲線の仮定から，このような三角形を考えられることに注意します．我々は内積はなくても面積を測る道具 det を持っているので，$\underline{p}(t_1)$ と $\underline{p}(t_2)$ の支持三角形の面積 $S(t_1,t_2)$ を計算してみましょう．

（高校数学の知識で計算できるのですが，今回はあまり長くなるといけないので省略して,）

$$\begin{aligned}
&2S(t_1,t_2)\\
=\ &\det\left(q(t_1,t_2)-p(t_1)\ \ p(t_2)-p(t_1)\right)\\
\vdots\\
=\ &\det\left(p'(t_1)\ p'(t_2)\right)^{-1}\det\left(p'(t_1)\ \ p(t_2)-p(t_1)\right)\det\left(p(t_2)-p(t_1)\ \ p'(t_2)\right).
\end{aligned}$$

つぎに，時刻 t_2 が t_1 に十分近いときを考えます．テーラー展開をして，

$$\begin{aligned}
p(t_2)&=p(t_1)+(t_2-t_1)p'(t_1)+(1/2)(t_2-t_1)^2p''(t_1)+o\left((t_2-t_1)^2\right),\\
p'(t_2)&=p'(t_1)+(t_2-t_1)p''(t_1)+o\left((t_2-t_1)\right)
\end{aligned}$$

が得られますが，これらを上に代入すると，

$$S(t_1,t_2)=\frac{1}{8}(t_2-t_1)^3\det\left(p'(t_1)\ p''(t_1)\right)+o\left((t_2-t_1)^3\right)$$

がなりたちます．

$$d\left(\underline{p}(t_1), \underline{p}(t_2)\right) := 2S(t_1, t_2)^{1/3}$$

とおくと，つぎがわかります．

命題３．局所凸な平面曲線 $p : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ に対して，

$$\lim \sum_i d\left(\underline{p}(t_i), \underline{p}(t_{i+1})\right) = \int_a^b \det\left(p'(t)\ p''(t)\right)^{1/3} dt$$

がなりたちます．ただし，左辺は区間 $[a, b]$ の分割を細かくしてゆく極限を考えています（１年生の積分で学ぶアイディアと同じです）．

そこで，つぎのような記号を導入しましょう．局所凸な平面曲線 $p : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ と $0 \in [a, b]$ に対して，

$$L(p, 0)(\tau) := \int_0^\tau \det\left(p'(t)\ p''(t)\right)^{1/3} dt$$

と定めます．とくに，$L(p, a)(b)$ を $L(p)$ と書くことにします．このとき，

定理と定義４．L は等積アファイン幾何学的な量です．すなわち，２つの局所凸な平面曲線 $p_1, p_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ が等積アファイン幾何学的に同じであったら，$L(p_1) = L(p_2)$ がなりたちます．この $L(p)$ は局所凸な平面曲線 p の等積アファイン弧長と呼ばれます．

この証明は，$p_2 = Ap_1 + c$ （$A \in SL(2; \mathbb{R}), c \in \mathbb{R}^2$）のとき，

$$\begin{aligned}\det\left(p_2'(t)\ p_2''(t)\right) &= \det\left(Ap_1'(t)\ Ap_1''(t)\right) = \det A \det\left(p_1'(t)\ p_1''(t)\right) \\ &= \det\left(p_1'(t)\ p_1''(t)\right)\end{aligned}$$

よりただちにわかりますが，三角形の面積を用いて定義していることを考えても納得できる現象です．

3. 局所凸平面曲線の曲率

さて，詳細は省略しますが，ユークリッド微分幾何学で学ぶのと同様に，パラメータを時刻 t から等積アファイン弧長 s に取り替えて

おくと便利ですので，以後，常にそうすることにします．すなわち，$\det(p'(s)\ p''(s)) = 1$ と仮定します．

局所凸な平面曲線 $p : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ に対して，

$$F : (\alpha, \beta) \ni s \mapsto (p'(s)\ p''(s)) \in SL(2 : \mathbb{R})$$

を p の等積アファイン・フレームといいます．ユークリッド微分幾何学のように，これがどう動くかを調べて，曲線の曲率を定義しましょう．

まず，$1 = \det(p'(s)\ p''(s))$ の両辺を s で微分しますと，

$$\begin{aligned} 0 &= \det(p'(s)\ p''(s))' = \det(p''(s)\ p''(s)) + \det(p'(s)\ p'''(s)) \\ &= \det(p'(s)\ p'''(s)) \end{aligned}$$

より，$p'(s)$ と $p'''(s)$ はつねに平行であること，すなわち，ある実数 $\kappa(s)$ が存在して，$p'''(s) = -\kappa(s)p'(s)$ とかけることがわかります．等積アファイン・フレームの言葉でかくと，つぎのようになります．

定義 5．局所凸な平面曲線 $p : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ に対して，$F : (\alpha, \beta) \to SL(2; \mathbb{R})$ をその等積アファイン・フレームとするとき，

$$F'(s) = F(s) \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

で一意的に定まる関数 κ を p の等積アファイン曲率とよびます．

簡単な考察から，等積アファイン曲率は，$\kappa(s) = \det(p''(s)\ p'''(s))$ で与えられることがわかります（読者のみなさんは，この辺で手を動かしてみてください）．ユークリッド微分幾何学で登場する曲率は２階の微分までしか出てきませんが，これは３階まで登場することにも注意してください．

それから，等積アファイン曲率は，等積アファイン幾何学的な量です．すなわち，２つの局所凸な平面曲線 $p_1, p_2 : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ に対して，その等積アファイン曲率をそれぞれ κ_1, κ_2 とすると，p_1 と p_2 が等積アファイン幾何学的に同じであったら，$\kappa_1 = \kappa_2$ がなりたちます．では，この逆はどうでしょうか？それに解答を与えるのが，つぎの平面等積アファイン曲線論の基本定理です．

定理 6．(1) ２つの局所凸な平面曲線 $p_1, p_2 : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ に対して，その等積アファイン曲率をそれぞれ κ_1, κ_2 とすると，$\kappa_1 = \kappa_2$ がな

りたてば，p_1 と p_2 が等積アファイン幾何学的に同じです．すなわち，$A \in SL(2;\mathbb{R})$ とベクトル $c \in \mathbb{R}^2$ が存在して，$p_2(s) = Ap_1(s) + c$ がすべての $s \in (\alpha, \beta)$ についてなりたちます．

(2) 区間上に関数が与えられるとき，それを等積アファイン曲率とする局所凸な平面曲線が存在します．

証明は参考文献の [3] などをご覧ください．常微分方程式の解の存在と一意性に関する定理を使います．

4. 放物線の曲がり方

簡単な例を調べてゆきましょう．

まず，直線は我々の局所凸な曲線ではありません．直線は，ユークリッド微分幾何学では，曲率が恒等的に消えている曲線として特徴付けられていました．等積アファイン微分幾何学で対応するものは何でしょうか？

例 7．放物線 $p : \mathbb{R} \ni s \mapsto \begin{bmatrix} s \\ s^2/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を調べてみます．等積アファイン・フレームは，$F(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} \in SL(2;\mathbb{R})$ となるので，この s は等積アファイン弧長パラメータです．これを微分すると，

$$\begin{aligned} F'(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= F(s) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるので，等積アファイン曲率は $\kappa(s) = 0$ です．定理 6 をみとめれば，放物線は等積アファイン曲率が恒等的に消えている曲線として特徴付けられることになります．

等積アファイン曲率が恒等的に消えている曲線のつぎに基本的な対象は，等積アファイン曲率が 0 ではなくて一定になっているものです．

もうだいぶ長くなったので，計算は省略して，結果だけを書いておきましょう.

例８．p を局所凸な平面曲線とすると，

(1) p の等積アファイン曲率が $\kappa(s) = k > 0$ であることと，p が囲む面積が $\pi k^{-3/2}$ の楕円（の一部）であることは同値です.

(2) p の等積アファイン曲率が $\kappa(s) = k < 0$ であることと，p の接線と漸近線でつくられる三角形の面積が $(-k)^{-3/2}$ の双曲線（の一部）であることは同値です.

これで馴染みの登場人物が出てきました．なるほど，と思われる結果かもしれません．しかし，この例で等積アファイン曲率の正負を幾何学的に理解するのは難しいかもしれませんので，もう少しだけ解説をしておきます.

２次曲線に対して，平行な弦の中点の軌跡は直線（の一部）になります．放物線のとき，その直線たちは平行で，それ以外のときは，一点で交わります．その交点を２次曲線の中心といいます.

楕円（等積アファイン曲率が正）のとき，中心は加速度方向 $p''(s)$ 方向にあり，双曲線（等積アファイン曲率が負）のとき，中心は加速度方向の反対側，すなわち $-p''(s)$ 方向にあります．放物線のときは，無限遠にあると解釈します．このようにすると，ユークリッド微分幾何学の曲率の解釈との類似性がうかびあがってくるはずです.

もうひとつだけ．一般に，命題３でつかった d を用いると，局所凸な平面曲線 $p : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ に対して，

$$d\left(\underline{p}(\alpha), \underline{p}(\beta)\right) \geq d\left(\underline{p}(\alpha), \underline{p}(s)\right) + d\left(\underline{p}(s), \underline{p}(\beta)\right)$$

が任意の $s \in [\alpha, \beta]$ でなりたつことがわかります．さらに，任意の $s \in [\alpha, \beta]$ で等号がなりたつことの必要十分条件は，p が放物線であることです．この証明は，三角形を描いて比を調べたりする初等幾何学的なものでなかなかおもしろく，数学ファンの高校生も挑戦してみる価値がありそうな問題です.

5. おわりに

ここに紹介した話題は，アファイン微分幾何学とよばれている分野の古典的な部分です．１９００年代の初頭にこの分野特有の現象をチチェイカ（[1]）が発見したといわれます（このとき発見された微分方程式はその後ソリトン理論の観点からも研究されています）．平面曲線だけではなく，空間曲線，空間内の曲面，一般次元のアファイン空間内の超曲面など，ブラシュケたちにより行われた基礎的な研究の成果が [2] にまとめられています.

１９８０年代には，野水克己らが，これらを多様体からのアファインはめ込みの微分幾何学として定式化しました（[3]）．この影響もあり，いろいろな分野との関連もわかるようになりました．情報幾何学やヘッセ幾何学などがそれです．詳しくは，たとえば，[5] 内の黒瀬俊の解説をご覧ください．また，特異点論（[4] 内の泉屋周一と佐野貴志の解説をご覧ください）や画像解析と関わる工学，微分方程式論の研究があります.

この分野は古くからありますが，最近になって，興味を持つ若い研究者も再び増えつつあります．この解説では，[3] であえて捨てられた方法を意識して，アファイン曲線論の紹介をしてみました．古いところから何か新しい輝きを発見できたら，大きな喜びと思っています.

References

[1] G.Tzitzéica, Sur une nouvelle classe de surfaces, Rend. Circ. Mat. Palermo 25(1908), 180-187.
[2] W.Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie II*, Springer, 1923
[3] 野水克己，佐々木武，アファイン微分幾何学，裳華房，1994
[4] 泉屋周一　他，幾何学と特異点，共立出版，2001
[5] 宮岡礼子，小谷元子（編），２１世紀の数学　幾何学の未踏峰，日本評論社，2004