二段階極大化法による　多変数関数の計測

長谷部　正　　渡久地　朝　明

目　　次

Ⅰ　序

経済の生産局面を定量的に解明する目的に生産関数による分析が有力な手法であることは多くの研究者の指摘するところである[1)]。事実，今日まで多くの研究にこの生産関数を適用する分析方法が用いられ，多大な成果が得られている。しかし，こうした分析の殆んどが，生産関数の関数型にコブ・ダグラス型関数やＣＥＳ型関数を用いるものであった。この二つの関数は，実際の推計において簡便且つ容易であるという優れた利点を有するが，いずれも投入要素間に強分離性を前提するものであるために，現実の複雑な要素間の相互関連性を解明する目的に用いるのに必ずしも適切なものといえぬきらいがある。そして，このような難点を改善して生産関数分析の有用性を大きく前進させたのが Christensen et al.[2)] の Transcendental Logarithmic Production Function（以下トランスログ生産関数と略す）であり，近年多くの分析がこれを用いてなされていることは周知の事実であろう[3)]。しかし，このトランスログ生産関数とても，実際の推計に際しては多重共線性による推計値のバイアスを免れるものではなく，それ故に，この関数を用いた従来の分析も多くは二三の変数の相互関係を解明するだけにとどまっている。即ち，本

来多くの経済変数を投入要素として考慮すべきところも，かかる計測上の問題のために，極くわずかの主要変数のみをスペシファイすることにしかならず，折角のこの関数の持つ理論上の長所が充分に活用されずにいたのである。ところが，最近 Fuss[4] がこの厄介な問題の解決策として，弱分離性を前提した生産関数の各パティションと双対的である費用関数の各々のパティションの集計関数を推計して，その推計値を用いて改めて生産関数のパラメーターを計測するいわゆるトランスログ生産関数の二段階計測方法を提案した。Fuss はこの方法を用いて九つもの投入要素をスペシファイして良好な計測結果を得ている。しかし，Fuss の方法には，弱分離的生産関数と弱分離的費用関数とがセルフデュアルではなく，従って，費用関数のパラメーターにより生産関数のパラメーターを推計することの厳密な一致性が得られないという問題が存在する[5]。それ故，本稿では，生産関数と費用関数との双対性を適用せずに直接生産関数を計測するうえに二段階極大化法を適用する方法の可能性とその妥当性を吟味検討することを意図している。

Ⅱ　弱分離性と二段階極大化法

先ず，生産関数における弱分離性は次の様に定義される[6]。

単一生産物の生産関数が(1)式で与えられているとき，n 個の投入要素 $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ が r 個のパティション[7] $\{S_1, S_2, \cdots\cdots, S_r\}$ のいずれかに属しているとする。但し，$r<n$。このとき，任意のパティション S_m に属する任意の二要素 i, j の限界代替率が S_m 以外の任意のパティションに属する任意の要素 k の投入量と独立であるとき，生産関数(1)はこれらのパティションに関して弱分離的であるという。

$$Q=f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \tag{1}$$

記号を用いれば次のように表わせる。

$$\frac{\partial(f_i/f_j)}{\partial x_k}=0, \quad \text{for all } i, j \in S_m, k \notin S_m \tag{2}$$

但し，f_i/f_j は i 要素と j 要素との限界代替率を表わし，x_k は k 要素の投入量を示すものとする。

上述の弱分離性に対して強分離性は次のように定義される。

n 個の投入要素を r 個のパティションに分割したとき，任意のパティショ

ン S_m に属する任意の要素 i と S_m 以外の任意のパティションン S_l に属する任意の要素 j との限界代替率が更に S_m や S_l 以外の任意のパティションンに属する任意の要素 k の投入量と独立であるとき，生産関数(1)はこれらのパティションンに関して強分離的であるという。これを記号で表わせば次のようになる。

$$\frac{\partial(f_i/f_j)}{\partial x_k}=0, \quad \text{for all } i \in S_m,\ j \in S_l,\ k \notin S_m \cup S_l \quad m \neq l \tag{3}$$

上記の二つの分離性を比較して，次のことが明らかであろう。$r=2$ のとき即ち，投入要素が二つのパティションンに分割される場合は両分離性は同じ概念となるが，$r>2$ のときは強分離性は弱分離性より制約の強いものとなり[8]，従って，弱分離性は生産構造を一般的に分析しようと試みる場合は強分離性より望ましい前提条件となる。

次に，弱分離性を前提した生産関数を次式のように表わす[9]。

$$Q=f\{x_{s1}(x_{s1}^{(1)},\ \cdots\cdots),\ \cdots\cdots,\ x_{sr}(x_{sr}^{(1)},\ \cdots\cdots)\} \tag{4}$$

但し，$x_{si}(i=1,\ \cdots\cdots,\ r)$ は r 個のパティションンの集計関数[10]を表わし，$x_{si}^{(k)}$ はパティションンに属する投入要素を示す。

生産関数(4)式は弱分離性の性質から次の性質を持つことがわかる[11]。

(1)産出 Q は r 個の集計関数の関数である。即ち，

$$Q=f(x_{s1},\ x_{s2},\ \cdots\cdots,\ x_{sr}) \tag{5}$$

(2)各集計関数 $x_{si}(i=1,\ \cdots\cdots,\ r)$ は各々のパティションンを構成する投入要素のみの関数である。即ち，

$$x_{si}=g_i(x_{si}^{(1)},\ x_{si}^{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{si}^{(k)}) \tag{6}$$

この二つの性質は次のことを示唆している。即ち，(6)式より各集計関数の推定値を求めて，それを(5)式に代入することによって生産関数のパラメーターを計測する方法が可能となる。このように二段階に分ける方法を用いれば多変数生産関数の推計に常に障害となる多重共線性の問題を軽減することができる。

さて，このように生産関数の計測を二段階に分けて行うことが直接計測する本来の計測方法と同じ推計結果を得るのには，生産関数の各パティションンがその構成要素に関して線形同次であるという条件が必要である。このとき

いわゆる二段階極大化法が成立する。このことを以下に示そう。[12)]

先ず，(5)式を次の費用関数の制約の下で最大にして(8)式の通常の関係を得る。

$$C=\sum_{i=1}^{r}P_{si}x_{si} \tag{7}$$

但し，C は費用，$P_{si}(i=1,\ \cdots\cdots,\ r)$ は要素価格，$x_{si}(i=1,\ \cdots\cdots,\ r)$ は要素投入量を示す。

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{si}}}{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{sj}}}=\frac{P_{si}}{P_{sj}},\ \text{for all}\ i,\ j=1,\ \cdots\cdots,\ r \tag{8}$$

同様に(6)式を各パティションに属する投入要素の費用(9)式の下で最大にすることにより(10)式を得る。

$$C_{si}=\sum_{k=1}^{q}P_{si}{}^{(k)}\cdot x_{si}{}^{(k)} \tag{9}$$

$$\frac{\dfrac{\partial x_{si}}{\partial x_{si}{}^{(l)}}}{\dfrac{\partial x_{si}}{\partial x_{si}{}^{(m)}}}=\frac{P_{si}{}^{(l)}}{P_{si}{}^{(m)}},\ \text{for all}\ l,\ m=1,\ \cdots\cdots,\ q \tag{10}$$

但し，(9)式での q はパティション Si に含まれる要素の数を示す。

ここで，(8)式，(10)式が成立するとき，次の(11)式が成り立つことを示せばよい。

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{si}{}^{(l)}}}{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{sj}{}^{(m)}}}=\frac{P_{si}{}^{(l)}}{P_{sj}{}^{(m)}} \tag{11}$$

(11)式は $i=j$ のときは次式の示すように直ちに成立する。

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{si}{}^{(l)}}}{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{si}{}^{(m)}}}=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{si}}\cdot\dfrac{\partial x_{si}}{\partial x_{si}{}^{(l)}}}{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{si}}\cdot\dfrac{\partial x_{si}}{\partial x_{si}{}^{(m)}}}=\frac{\dfrac{\partial x_{si}}{\partial x_{si}{}^{(l)}}}{\dfrac{\partial x_{si}}{\partial x_{si}{}^{(m)}}}=\frac{P_{si}{}^{(l)}}{P_{si}{}^{(m)}} \tag{12}$$

$i\neq j$ のとき(12)式は(13)式となる。

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{si}{}^{(l)}}}{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{sj}{}^{(m)}}}=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{si}}\cdot\dfrac{\partial x_{si}}{\partial x_{si}{}^{(l)}}}{\dfrac{\partial Q}{\partial x_{sj}}\cdot\dfrac{\partial x_{sj}}{\partial x_{sj}{}^{(m)}}}=\frac{P_{si}\dfrac{\partial x_{si}}{\partial x_{si}{}^{(l)}}}{P_{sj}\dfrac{\partial x_{si}}{\partial x_{sj}{}^{(m)}}} \tag{13}$$

従って(11)式が成り立つためには，次の関係が成立すればよい。

$$P_{si}\frac{\partial x_{si}}{\partial x_{si}^{(l)}}=P_{si}^{(l)} \tag{14}$$

$$P_{sj}\frac{\partial x_{sj}}{\partial x_{sj}^{(m)}}=P_{sj}^{(m)} \tag{15}$$

いま，(9)式の下で(6)式を極大化する必要条件は，

$$\frac{\partial x_{si}}{\partial x_{si}^{(l)}}=\lambda P_{si}^{(l)} \tag{16}$$

である。但し，λ はラグランジュ乗数である。従って次式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{q}\partial x_{si}^{(k)}\frac{\partial x_{si}}{\partial x_{si}^{(k)}}=\lambda\sum_{k=1}^{q}P_{si}^{(k)}\cdot x_{si}^{(k)}=\lambda C_{si}=\lambda P_{si}\cdot x_{si}$$

それ故，(6)式が線形同次であれば，オイラーの定理により以下の関係が成り立つ。

$$x_{si}=\lambda P_{si}\cdot x_{si}$$

$$\therefore \lambda=\frac{1}{P_{si}}$$

これによって $i\neq j$ のときも(11)式が成り立つことがわかる。

以上のことから集計関数がその構成要素に関して線形同次であるという前提がなされるならば，このような二段階計測法が妥当なものとなり，分析手法として有力なものとなる。

III モデルの特定化

いま，(5)式にトランスログを適用した生産関数が次式で与えられているとする。なお，この生産関数は，生産関数についての一般的な諸条件を満足するものとする。

$$l_nQ=f(l_nx_{si},\ \cdots\cdots,\ l_nx_{sr}) \tag{17}$$

(17)式に二次項までのテイラー展開を施せば次式を得る。[13]

$$l_nQ=l_n\alpha_0+\sum_i\alpha_il_nx_{si}+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\gamma_{ij}l_nx_{si}l_nx_{sj} \tag{18}$$

但し，$l_n\alpha_0$ は零次の定数項で，

$$\alpha_i=\frac{\partial l_nQ}{\partial l_nx_{si}},\qquad i=1,\ \cdots\cdots,\ r$$

$$\gamma_{ij}=\frac{\partial^2 l_n Q}{\partial l_n x_{si}\partial l_n x_{sj}}, \qquad i,j=1,\ \cdots\cdots,\ r$$

である。

次に(18)式を $l_n x_{si}$ で偏微分して次式を得る。

$$M_i\left(=\frac{\partial l_n Q}{\partial l_n x_{si}}\right)=\alpha_i+\sum_{j=1}^{r}\gamma_{ij}l_n x_{sj}, \qquad i=1,\ \cdots\cdots,\ r \tag{19}$$

(19)式の M_i は，生産関数が規模に対して収穫一定で，要素市場において均衡条件が成立しているとき，要素 i に帰因する生産量の全生産量に占めるシェアに等しいものとなる。[14] 従って，(19)式は次の制約条件を満足する。

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=1\\&\sum_{i=1}^{r}\gamma_{ij}=0, \qquad j=1,\ \cdots\cdots,\ r\end{aligned} \tag{20}$$

r 個の集計関数にも以上と同様の前提と操作により次式を得る。

$$M_r\left(=\frac{\partial l_n x_{sr}}{\partial l_n x_{sr}^{(k)}}\right)=\beta_i+\sum_{j=1}^{k}\delta_{ij}l_n x_{sr}^{(k)}, \qquad k=1,\ \cdots\cdots,\ q \tag{21}$$

(21)式は(19)式同様に次の制約条件に従う。

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{q}\beta_i=1\\&\sum_{i=1}^{q}\delta_{ij}=0, \qquad j=1,\ \cdots\cdots,\ q\end{aligned} \tag{22}$$

実際の計測の手続きは，第一段階で(21)式の各パラメーターを(22)式の制約の下で計測し，それらの推計値を用いて各々の集計関数の理論値を求め，それを第二段階の計測として(19)式に代入して，(20)式の制約の下で計測することになる。

さて，上記の方法で計測されたパラメーターを用いれば各集計関数間の相互関係や各パティション内の構成要素間の相互関係を示す代替の偏弾力性は次式のように容易に求められる。[15]

$$\begin{aligned}&\sigma_{ii}=\frac{M_{ii}+M_i^2-M_i}{M_i^2}, \qquad i=1,\ \cdots\cdots,\ r\\&\sigma_{ij}=\frac{\gamma_{ij}+M_iM_j}{M_iM_j}, \qquad i,\ j=1,\ \cdots\cdots,\ r\end{aligned} \tag{23}$$

$$\sigma_{sill} = \frac{\beta_{ll} + M_{si}^{(l)2} - M_{si}^{(l)}}{M_{si}^{(l)2}}, \qquad l=1, \cdots\cdots, q$$
$$\sigma_{lm} = \frac{\beta_{lm} + M_{si}^{(l)} \cdot M_{si}^{(m)}}{M_{si}^{(l)} \cdot M_{si}^{(m)}}, \qquad l, m=1, \cdots\cdots, q \tag{24}$$

また，各集計関数の価格弾力性や各パティション内の構成要素の価格弾力性は次式で得られる。

$$E_{ii} = M_i \cdot \sigma_{ii}$$
$$E_{ij} = M_j \cdot \sigma_{ij} \tag{25}$$

$$E_{si}^{(ll)} = M_{si}^{(l)} \cdot \sigma_{sill}$$
$$E_{si}^{(lm)} = M_{si}^{(m)} \cdot \sigma_{silm} \tag{26}$$

Ⅳ 計 測 方 法

上で展開されたトランスログ生産関数モデルを実際に計測する方法について考えてみよう。

先ず，計測すべき生産関数に制約条件が存在するために直接最小自乗法（ＯＬＳ）を適用するのは不適切なので，制約条件が存在しても計測が可能である Zellner[16] の方法（Zellner's Aitken Estimation Method）を用いることとする。[17] この方法を反復して得た推定量は漸近的に最尤推定量に等しくなることは広く知られているところである。[18]

n 本の計測式を行列表記すれば次の様に表わされる。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \tag{27}$$

但し，

y ：$T \times 1$ の従属変数のベクトル

Z_i ：$T \times m$ の独立変数の行列

β_i ：$m \times 1$ の係数ベクトル

U_i ：$T \times 1$ の残差のベクトル

(27)式を更に簡潔に次式で表わす。

$$y=(\mathrm{I_T}\otimes Z)\beta+U \tag{28}$$

但し，$\mathrm{I_T}$ は次数 T の単位行列で，$\otimes$はクロネッカー直積である。

当面の問題は残差平方和

$$(y-X\beta)'\Omega^{-1}(y-X\beta) \tag{29}$$

を線形の制約条件

$$R\beta=0 \tag{30}$$

の下で最小にすることである。

但し，

X ：$\mathrm{I_T}\otimes Z$

R ：制約式の行列

この(29)式と(30)式にラグランジュ未定定数を導入して，

$$\varphi=(y-X\beta)'\Omega^{-1}(y-X\beta)-2\mu'R\beta \tag{31}$$

但し，

$$\Omega=\begin{pmatrix} \sigma_{11}\mathrm{I} & \sigma_{21}\mathrm{I}\cdots\cdots\sigma_{1m}\mathrm{I} \\ \sigma_{12}\mathrm{I} & \sigma_{22}\mathrm{I}\cdots\cdots\sigma_{2m}\mathrm{I} \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ \sigma_{m1}\mathrm{I} & \sigma_{m2}\mathrm{I}\cdots\cdots\sigma_{mm}\mathrm{I} \end{pmatrix}$$

Ω は反復計算において常に一段階前の推計値より得られる残差の分散共分散行列として求められる。Ω の初期値は直接最小自乗法を適用して得られた結果から推計される。$\sigma_{pp'}$ は E $(u_{pt}\,u_{p't})$ を示し，p，$p'=1$，2，……，m で $t=1$，2，……，T である。I は $T\times T$ の単位行列である。(31)式を β と μ について偏微分すると，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=-2X'\Omega^{-1}y+2(X'\Omega^{-1}X)\beta-2R'\mu=0 \tag{32}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}=-2R\beta=0 \tag{33}$$

(32)式に $R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$ を掛けて，

$$\begin{aligned}-2R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y+2R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}X)\beta \\ -2R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R'\mu=0\end{aligned} \tag{34}$$

従って，

$$-R\hat{\beta}+R\beta-R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R'\mu=0 \tag{35}$$

ここで，$\hat{\beta}$ は制約条件がない一般化最小自乗法（ＧＬＳ）より求められたパ

ラメーターの推定値を示す。

(35)式より,

$$\mu=-[R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R']^{-1}R\hat{\beta} \tag{36}$$

(32)式と(36)式から,

$$\begin{aligned}\beta&=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y\\&\quad-(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R'[R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R']^{-1}R\hat{\beta}\\&=\hat{\beta}-(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R'[R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R']^{-1}R\hat{\beta}\end{aligned} \tag{37}$$

従って，推定値 β の分散共分散行列は,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\beta&=(X'\Omega X)^{-1}\\&\quad-(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R'[R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R']^{-1}R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}\end{aligned} \tag{38}$$

として表わせる。そして，計測は(37)式にデーターを適用して反復計算を行うことによりなされる。いわゆる, Iterative Constrained Zellner's Aitken Estimation Method である。但し，この計測方法を既述のモデルのように従属変数があるシェアを示す問題に適用する場合は，計測式の一本が残りの計測式の一次結合として表わされるため，残差の分散共分散行列が特異行列となる。それ故，上記の方法を直接適用せず, Berndt と Christensen[19] のように計測式を一本除いて計測して，最後の計測式のパラメーターは制約条件を用いて求めるという方法によって計測することになる。

V 結　　言

要約すると，本稿は，多変数生産関数を計測する際に常に問題となる多重共線性を軽減する一つの方法として，弱分離性が前提し得る場合には二段階に分けて計測することが可能となることを示した。また，各集計関数がその構成要素に関して線形同次である前提の下では，この二段階計測方法と直接計測法との間に一致性が存在することも示した。更に，実際のモデルとしてトランスログ生産関数を例にとり，これにテイラー展開を施した式を近似的計測式として特定化して，二段階極大化法の活用を考慮した。最後に，この計測式を計測する具体的な方法として, Iterative Constrained Zellner's Aitken Estimation Method の例をかかげた。これら一連の計測体系により計測されるパラメーターは本稿に述べた種々の前提条件が成立する下では極めてバイアスの小さい推計値が得られるものと考えられる。また，この計測

法を適用するために必要な前提も従来における計測法の用いるそれと比較して特に厳しいものとは考えられない上に，弱分離性という，従来の強分離性に比して，より一般的な前提を採用する点からも，分析の対象次第では有力な計測方法であると考えられる。

注　釈

1) 例えば Solow, R. M., "The Production Function and the Theory of Capital" *Review of Economic Studies*, Vol. 23, pp. 101—108, 1956.
2) Christensen, L. R., Jorgenson, D. W. and Lau, L J., "Transcendental Logarithmic Production Frontiers", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 55, pp. 28—45, 1973.
3) 例えば Binswanger, H. P., "A Cost Function Approach to the Measurement of Elasticities of Factor Demand and Elasticities of Substitution", *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 56, pp. 377—386, 1974.
4) Fuss, M. A., "The Demand for Energy in Canadian Manufacturing", *Journal of Econometrics*, Vol. 5, pp. 89—116, 1977.
5) Burgess, D. F., "Duality and Pitfalls in the Specification of Technologies", *Journal of Econometrics*, Vol. 3, pp. 105—121, 1975.
6) Stortz, R.H., "The Utility Tree—A Correction and Further Appraisal", *Econometrica*, Vol. 27, pp. 482—488, 1959.
7) partition の意
8) パティションが二つしかない場合には弱分離性も制約条件として等しいものとなる。Berndt, E. R. and Christensen, L. R., "The Translog Function and the Substitution of Equipment, Structures, and Labor in U. S. Manufacturing 1929—68", *Journal of Econometrics*, Vol. 1, pp. 81—113, 1973.
9) Goldman, S. M. and Uzawa, H., "A Note on Separability in Demand Analysis", *Econometrica*, pp. 387—398, 1964.
10) aggregator function の意
11) Goldman, S.M. and Uzawa, H., op. cit.
12) Green, H. A. J., Aggregation in Economic Analysis, Princeton University Press, pp. 25—27, 1964.
13) Binswanger, H. P., op. cit.
14) Fuss, M. A., op. cit.

15) Allen, R. G. D., Mathematical Analysis for Economists, St. Martin's Press, pp. 503—508, 1938.
16) Zellner, A., "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Reggresion and Tests for Aggregation Bias", *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 57, pp. 348—368, 1962.
17) Theil, H., Principles of Econometrics, North-Holland Publishing Company, pp. 294—317, 1971.
18) Kmenta, J. and Gilbert, R. F., "Small Sample Properties of Alternative Estimators of Seemingly Unrelated Reggression", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 63, pp. 1180—1200, 1968.
19) Berndt, E. R. and Christensen, L.R., op. cit.