経済学研究 *56-1*
北海道大学 2006.6

家計財と公共財に関する家族の自発的供給行動

田　中　藍　子

1．はじめに

本稿では，便益の及ぶ範囲の異なる２種類の公共財：通常の公共財と家計財を自発的に供給するときの均衡値を比較する。本稿で述べる通常の公共財とは，経済に存在するすべての消費者に便益が及ぶ純粋公共財のことである。通常の公共財を自発的に供給する例として，社会福祉団体への寄付行為が考えられる。ある消費者が社会福祉団体へ寄付を行えば，寄付によって社会福祉の水準が向上するだろう。社会福祉水準の向上は，その社会に存在するすべての消費者に認識され，享受されるものであるから，純粋公共財の性質を有すると考えられる。伝統的な公共財の自発的供給モデルにおいては，公共財は１つ，または複数存在している場合でも，すべて純粋公共財であることが仮定されている。しかし，実際には家族の中だけでは純粋公共財として作用するが，他の家計には特に外部性を及ぼさないような財がたくさん存在するだろう。例えば，自家用車，住居，本やＣＤなどは家族で共用されることの多い財である。Chen and Woolley（2001）は，このような財を家計財（household goods）と呼び，夫婦間で非協力的に供給するモデルを提示し，夫婦間で適切な所得移転を行えばパレート最適が達成されうることを示した[1)]。

本稿のモデルでは，子の効用を考慮するような利他的な親と，親の効用を考慮しない利己的な子１人ずつを含む集団を１家族として，２人２家族モデルを考える。４人はそれぞれ２種類の公共財に自発的な供給を行う。１つは通常の公共財（以下では，単に「公共財」と表現する）で，これは２家族４人全体に純粋公共財として作用するものである。もう１つは家計財で，供給者が属する家族２人にのみ純粋公共財として作用するようなクラブ財である。このとき，対数型効用関数を仮定して[2)]，親が子に対して所得移転を行っても，パレート最適が達成されないことを示す。

利他的な親が利己的な子に所得移転を行う場合，子が利己的であるにもかかわらず，家族にとって最適な行動をとることをいう Rotten-Kid Theorem（放蕩息子の定理：Becker（1974））[3)]が成立しているかどうかは，公共財の自発的供給モデルにおいても研究されている。Bergstrom（1989）は譲渡可能効用関数であれば Rotten-Kid Theorem が成立することを示した。Cornes and Silva

---

1）ただし，Chen and Woolley（2001）は互いの効用を考慮する夫婦を仮定した。

2）対数型効用関数を用いた先行研究には， Stark, O. and Falk（1988）などがある。

3）Rotten-Kid Theorem の証明については釜田（2000）を参照。
親と子両方の所得が子の行動の関数となっていて，かつ，親が子の行動を所与として観察した後に遺産等の所得移転を行う場合，子が家族の総所得を最大化する行動をとり，結果的にパレート最適が達成されることをいう。公共財の自発的供給問題については，子の行動を観察後に親が子に対する所得移転を行うような２段階ゲームのサブゲーム完全均衡解が，もし親が家族の予算制約のもとで選べるならば選ぶであろう親にとっての最適な解と一致することをいう。

(1999) は，譲渡可能効用関数でなくても，子の行動が純粋公共財の供給などであれば，一般的な効用関数でも Rotten-Kid Theorem が成立することを示した。本稿の結果としては，Rotten-Kid Theorem が成立する。さらに，親の行動をみこして子が私的財を過剰消費するような Samaritan's Dilemma（サマリア人のジレンマ：Buchanan (1975)）は発生しないことが示される。

本稿の目的は，便益の及ぶ範囲の異なる公共財を各々が自発的に供給するとき，次の 4 つの均衡値を比較・検討することである。1 つめは，基準値となるパレート最適配分である。これは，仮想的な社会計画者が，社会厚生（ここでは 4 人の効用関数の総和）を最大化するよう経済の全資源を配分するときの解で，第 3 章 1 節で導出する。2 つめに，家族単位で行動するときのナッシュ均衡を第 3 章 2 節で考える。各家族が，家族の厚生を最大化するよう家族全体の資源を配分するときの解がこれにあたる。3 つめとして，各主体が同時決定するときのナッシュ均衡を第 3 章 3 節で分析する。最後に，第 3 章 4 節で 2 段階ゲームを提示し，そのサブゲーム完全均衡を導出する。

2．モデル

2 つの家族（家族 1 と家族 2）が存在し，各家族は，親 1 人と子 1 人の 2 人で構成されるものと想定する。家族 $i\,(i=1,2)$ 内で，親は y_i^p，子は y_i^c という所得を持つものとする。各主体は，所得を y_i^k，私的財の消費 x_i^k，家計財への供給 h_i^k，および公共財への供給 $g_i^k\,(i=1,2, k=p,c)$ へ配分する。さらに，それぞれの親は自分の子に対して非負の所得移転 $\pi_i\,(i=1,2)$ を行うものとする。公共財 G は，各主体によって私的に供給されるものとし，$G=g_1^p+g_1^c+g_2^p+g_2^c$ とする。家計財 $H_i\,(i=1,2)$ は，家族 i に関するクラブ財であり，家族 i の親と子によって私的に供給されるものとし，$H_i=h_i^p+h_i^c$ とする。

親は利他的で，親の消費水準からの効用と同時に子の効用からも効用を得るが，子は利己的で，子の消費水準のみから効用を得るものと仮定する。家族 i の子の効用関数は

$$u_i^c=u(x_i^c,H_i,G)=\ln x_i^c+\theta\ln H_i+\eta\ln \mathrm{G},\qquad i=1,2 \tag{1}$$

とし，$\theta>0, \eta>0$ とする。θ は家計財に対する選好の強さ，η は公共財に対する選好の強さを示すパラメータであるが，本稿では特に各パラメータの大小関係については仮定しない。子の予算制約式は，

$$y_i^c+\pi_i=x_i^c+h_i^c+g_i^c,\qquad i=1,2 \tag{2}$$

とする。簡単化のために，私的財，公共財，および家計財の価格はすべて 1 とする。家族 i の親の効用関数は，

$$\begin{aligned}U_i^p&=u(x_i^p,H_i,G)+\alpha u_i^c\\&=\ln x_i^p+\alpha\ln x_i^c+(1+\alpha)\theta\ln H_i+(1+\alpha)\eta\ln \mathrm{G},\qquad i=1,2\end{aligned} \tag{3}$$

とする。親が子の効用を考慮する強さは，$\alpha\in(0,1)$ と仮定する。この範囲に α があることは，親が利己的ではなく，かつ自分の消費水準以上には子の効用を考慮しないことを意味する。親の予算

制約式は,

$$y_i^p = \pi_i + x_i^p + h_i^p + g_i^p, \qquad i = 1,2 \tag{4}$$

で表される。

3．ベンチマークと 3 つの均衡

3．1　パレート最適配分

次の最大化問題を解く。

(A1)
$$\max_{x_1^p, x_1^c, x_2^p, x_2^c, H_1, H_2, G} \quad W = U_1^p + u_1^c + U_2^p + u_2^c$$
$$\text{s.t.} \quad Y = x_1^p + x_1^c + x_2^p + x_2^c + H_1 + H_2 + G$$

ただし，$Y = y_1^p + y_1^c + y_2^p + y_2^c$。1 階条件より，次のような解を導出できる。

$$x_1^{p*} = x_2^{p*} = \frac{Y}{2(2+\alpha)(1+\theta+\eta)},$$

$$x_1^{c*} = x_2^{c*} = \frac{(1+\alpha)Y}{2(2+\alpha)(1+\theta+\eta)},$$

$$H_1^* = H_2^* = \frac{\theta Y}{2(1+\theta+\eta)},$$

$$G^* = \frac{\eta Y}{1+\theta+\eta}. \tag{A1−1}$$

(A1−1)で表された解 $(x_1^{p*}, x_2^{p*}, x_1^{c*}, x_2^{c*}, H_1^*, H_2^*, G^*)$ が，パレート最適配分となる。この解を以下の節でおこなう分析の基準とし，上付きの＊で表すことにする。私的財についてみると，$x_1^{p*} : x_1^{c*} = 1 : 1+\alpha$ となっている。これは家族 1 についてみると，親の私的財消費水準 x_1^p は親のみが考慮するのに対し，子の私的財消費水準 x_1^c は子が考慮すると同時に親が α の強さで考慮するためである。家計財や公共財については以下の関係式が成立する。

$$\frac{\partial u/\partial H_i}{\partial u/\partial x_i^p} + \frac{\partial u/\partial H_i}{\partial u/\partial x_i^c} = \frac{1}{2+\alpha} + \frac{1+\alpha}{2+\alpha} = 1, \qquad i = 1,2,$$

$$\frac{\partial u/\partial G}{\partial u/\partial x_1^p} + \frac{\partial u/\partial G}{\partial u/\partial x_1^c} + \frac{\partial u/\partial G}{\partial u/\partial x_2^c} + \frac{\partial u/\partial G}{\partial u/\partial x_2^p} = 2\left(\frac{1}{2(2+\alpha)} + \frac{1+\alpha}{2(2+\alpha)}\right) = 1$$

2 本の式のうち，上の式は家計財に関する式である。左辺は家計財と私的財の間の限界代替率を家族 1 の親と子について足し合わせたものである。右辺は家計財と私的財の間の限界費用の比に等しい。したがって，この式はサミュエルソン条件が成立していることを示している。下の式は公共財に関する式であるが，同様にサミュエルソン条件が成立している。

3．2　家族単位のナッシュ均衡

本節では，家族1と家族2が，それぞれ公共財を自発的に供給する非協力ゲームに直面している状況を考える。このとき，家族1の最大化問題は，

$$\text{(A2)}\qquad \max_{x_1^p, x_1^c, H_1, g_1} \quad W_1 = U_1^p + u_1^c$$

$$\text{s.t.}\quad y_1 = x_1^p + x_1^c + H_1 + g_1$$

$$g_1 \geq 0$$

となる。ただし，$y_1 = y_1^p + y_1^c$，$g_1 = g_1^p + g_1^c$。同様にして家族2も最適化を行う。

一家族が公共財をどれだけ供給するかは，相手の家族が行うであろう供給量に依存する。g_2 は家族1にとっては所与なので，(A2)の予算制約式の両辺に加えることができる。このとき，家族1は G を暗に決定していると考えられるので，家族1の最大化問題は以下のように書き換え可能になる。

$$\text{(A2')}\qquad \max_{x_1^p, x_1^c, H_1, G} \quad W_1 = U_1^p + u_1^c$$

$$\text{s.t.}\quad y_1 + g_2 = x_1^p + x_1^c + H_1 + G$$

ただし，$g_2 = g_2^p + g_2^c$。$y_1 + g_2$ は家族1の「社会的所得（social income）」になる。Becker（1974）は，個人がある環境に属することによって，その環境からもたらされる所得が，社会的所得であると説明した。ここでは，y_1 は家族1が保有する所得で，さらに家族2が供給する公共財として g_2 が家族1にもたらされている。$(\tilde{x}_1^p, \tilde{x}_1^c, \tilde{H}_1, \tilde{G})$ を，家族2の公共財供給 g_2 に対する最適応答としよう。このとき，家族1の実際の選択 g_1 は，$\tilde{G} - g_2$ に等しくなる。家族2についても同様のことがいえるので，(A2')を家族2についても解くと，その Kuhn-Tucker 条件から公共財供給の最適反応関数が以下のように導出される。

$$\tilde{g}_1(g_2) = -\frac{1+\theta}{1+\theta+\eta} g_2 + \frac{\eta}{1+\theta+\eta} y_1 \tag{5}$$

$$\tilde{g}_2(g_1) = -\frac{1+\theta}{1+\theta+\eta} g_1 + \frac{\eta}{1+\theta+\eta} y_2 \tag{6}$$

図1は，(5)，(6)式を所得分布に対応させて表したものである。2本の最適反応関数の交点が，それぞれの所得分布に対応したナッシュ均衡になる。(a) $y_1 \leq \frac{1+\theta}{1+\theta+\eta} y_2$ のとき，家族1は全く供給せず，家族2がすべて供給する。（b）$\frac{1+\theta+\eta}{1+\theta} y_2 > y_1 > \frac{1+\theta}{1+\theta+\eta} y_2$ のときは，家族1，2ともに厳密に正の供給を行う内点解となる。（c）$y_1 \geq \frac{1+\theta+\eta}{1+\theta} y_2$ のときは家族1がすべて供給し，家族2はまったく供給しない。一般性を失うことなく（c）のケース（$g_2 = 0$）から端点解を導出すると[4)]，

$$\tilde{x}_1^p = \frac{y_1}{(2+\alpha)(1+\theta+\eta)} \geq \frac{Y}{(2+\alpha)(2+2\theta+\eta)} > x_1^{p*},$$

$$\tilde{x}_1^c = \frac{(1+\alpha) y_1}{(2+\alpha)(1+\theta+\eta)} \geq \frac{(1+\alpha) Y}{(2+\alpha)(2+2\theta+\eta)} > x_1^{c*},$$

$$\tilde{H}_1 = \frac{\theta y_1}{1+\theta+\eta} \geq \frac{\theta Y}{2+2\theta+\eta} > H_1^*,$$

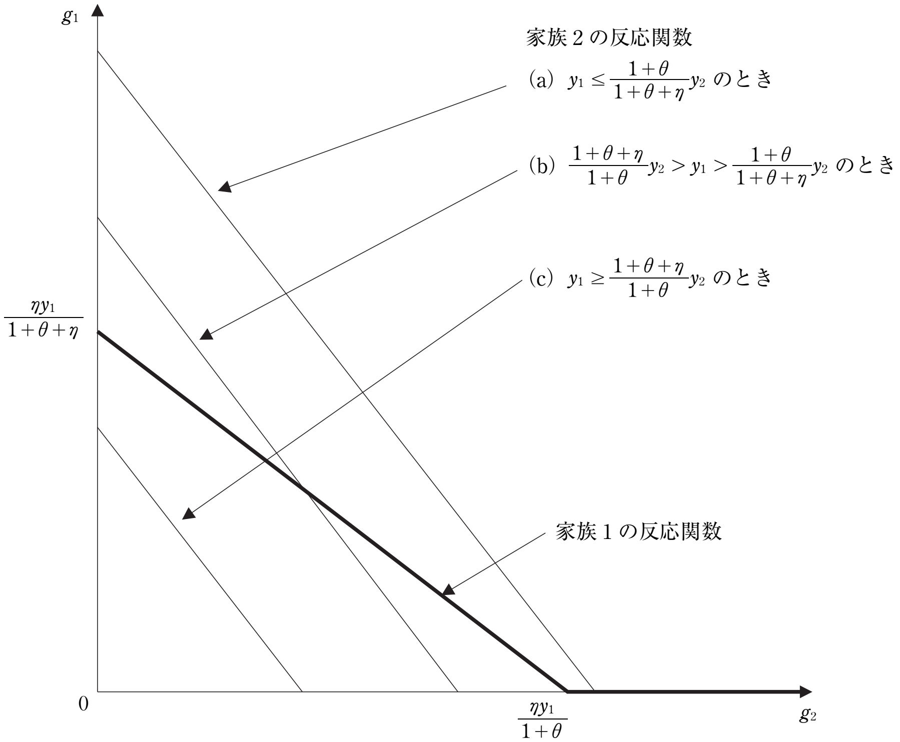


図１　公共財の供給に関する家族１と２の反応関数

$$\tilde{x}_2^p = \frac{y_2}{(2+\alpha)(1+\theta)},$$

$$\tilde{x}_2^c = \frac{(1+\alpha)y_2}{(2+\alpha)(1+\theta)},$$

$$\tilde{H}_2 = \frac{\theta y_2}{1+\theta},$$

$$\tilde{G} = \frac{\eta y_1}{1+\theta+\eta} \geq \frac{\eta Y}{2+2\theta+\eta}. \qquad \text{(A2－1)}$$

$G^* = \frac{\eta Y}{1+\theta+\eta}$ なので，$Y \geq y_1$ であるから，端点解 $\tilde{G}$ はパレート最適解よりは小さい。総所得 Y を一定にするような所得再分配を考えよう。供給者である家族１の所得 y_1 を増加させるように所得を再分配すれば，公共財の供給量は増加する。これは Bergstrom, Blume and Varian (1986) の定理４（ii）:「再分配前に供給を行っている人々の所得を増加させるような任意の所得再分配

4) (A2－1)式中の不等号は，（c）$y_1 \geq \frac{1+\theta+\eta}{1+\theta}y_2$ のケースが，$y_1 \geq \frac{1+\theta+\eta}{2+2\theta+\eta}Y$ と同値であることから表されている。

は，必ず公共財の総供給量を増加させる」に対応している。（ｃ）のケースにおいては，再分配後も $y_1 \geq \dfrac{1+\theta+\eta}{1+\theta}y_2$ である場合には，供給者である家族１から供給しない家族２へ所得を再分配してもパレート改善にはならない。公共財の総供給量が減少するばかりか，家族１の家計財，私的財消費量がすべて減少し，家族１の厚生が下がってしまうからである。（ｂ）のケースから内点解を導出すると，

$$\tilde{x}_1^p = \tilde{x}_2^p = \frac{Y}{(2+\alpha)(2+2\theta+\eta)} > x_1^{p*},$$

$$\tilde{x}_1^c = \tilde{x}_2^c = \frac{(1+\alpha)Y}{(2+\alpha)(2+2\theta+\eta)} > x_1^{c*},$$

$$\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2 = \frac{\theta Y}{2+2\theta+\eta} > H_1^*,$$

$$\tilde{g}_1 = \frac{(1+\theta+\eta)y_1 - (1+\theta)y_2}{2+2\theta+\eta},$$

$$\tilde{g}_2 = \frac{(1+\theta+\eta)y_2 - (1+\theta)y_1}{2+2\theta+\eta},$$

$$\tilde{G} = \frac{\eta Y}{2+2\theta+\eta}. \tag{A2－2}$$

公共財総量について，内点解は端点解よりも大きくはならない。内点解が成立するときは，家族１と家族２の所得格差が小さいことを要する。これは Bergstrom，Blume and Varian（1986）の定理５（iii）:「選好が同じとき，ナッシュ均衡では，所得を均等化するような再分配は，公共財総供給量を増加させない」に対応していると考えられる。以上の結果を以下にまとめる。

結果１．**家族単位のナッシュ均衡においては，公共財の総供給量は，所得格差がある一定のレベルを超えると，格差が大きいほど大きくなるが，パレート最適値よりは小さい。しかし，公共財を厳密に正のレベルで供給する家族の私的財および家計財の消費量は，パレート最適値よりも大きくなる。**

結果１は非協力ゲームの枠組みとよく対応しているようにみえる。家族単位のゲームでは，家計財もその家族で消費される私的財の１つとみなすことができるので，標準的な公共財私的供給モデルとして分析することが可能である。ここで求めた内点解のケースと端点解のケース（ｃ）について，家族の厚生を比較すると，以下の結果が得られる[5)]。

結果２．**総所得が一定のとき，家族単位のナッシュ均衡を考える。公共財を供給する家族の厚生は，供給しない家族の厚生よりも高くなる。一方の家族だけが公共財を供給するとき，供給する家族と供給しない家族の所得格差がある一定のレベルまでは，両家族が供給するときに比べて社会厚生は大きくなるが，所得格差がある一定のレベルを超えると，社会厚生は小さくなる。公共財を供給しない家族の厚生は，所得格差が大きいほど下がる。**

結果2が生じる主な要因として，供給者である家族1の所得が相対的に大きくなっていくとき，公共財への供給が大きくなることが考えられる。しかし，公共財を供給しない家族2については，所得格差が大きくなるとき，Appendix A に示したように厚生が低下する。このことは，家族2の私的財や家計財消費量減少による厚生のロスを，公共財消費量増加による厚生の上昇では補いきれないことを示唆している。本稿では家計財や公共財への相対的な選好の強さについては特に仮定していない。したがって，公共財への選好がどれほど強くても，供給しない家族の厚生ロスが必ず発生することが示されている。家族1のみが公共財を供給している状態から，ある一定のレベルまで所得格差が拡大するとき，供給者である家族1の厚生増加が供給しない家族2の厚生ロスを上回る。所得格差がある一定のレベルを超えると，家族1の厚生増加を家族2の厚生ロスが上回る，ということになる。

3.3　ナッシュ均衡

本節では，各主体が，各自の予算制約の下で各自の効用最大化を同時に行うときのナッシュ均衡を考える。家族 $i(i=1,2)$ の子は次のような最大化問題

(A3－c)
$$\max_{x_i^c, h_i^c, g_i^c} \quad u_i^c = \ln x_i^c + \theta \ln H_i + \eta \ln \mathrm{G}$$
$$\text{s.t.} \quad y_i^c + \pi_i = x_i^c + h_i^c + g_i^c,$$
$$h_i^c \geq 0,$$
$$g_i^c \geq 0$$

に直面している。これを解くと，他人の公共財供給 $G_{-ci}(=G-g_i^c)$ と親の戦略 (h_i^p, π_i) に対する家族 i の子の最適反応関数は，

$$\hat{h}_i^c(h_i^p, G_{-ci}, \pi_i) = \frac{\theta(y_i^c + \pi_i + G_{-ci}) - (1+\eta)h_i^p}{1+\theta+\eta}, \tag{7}$$

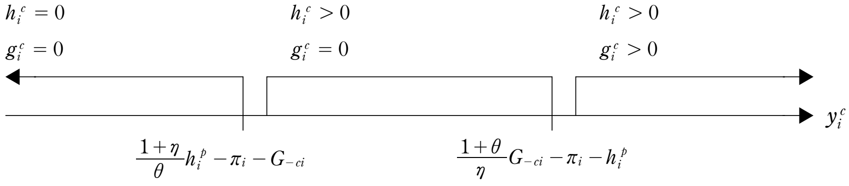
$$\hat{g}_i^c(h_i^p, G_{-ci}, \pi_i) = \frac{\eta(y_i^c + \pi_i + h_i^p) - (1+\theta)G_{-ci}}{1+\theta+\eta} \tag{8}$$

となる[6]。(7)，(8)より，図2のように子の最適応答が導出できる[7]。

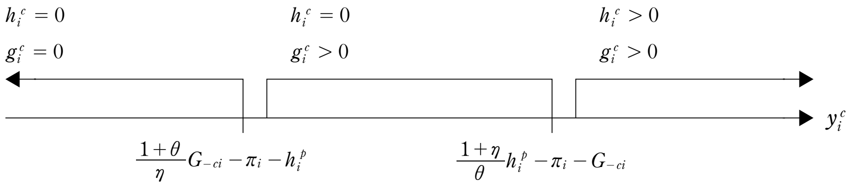
家族 $i(i=1,2)$ の親は次のような最大化問題

(A3－p)
$$\max_{x_i^p, h_i^p, g_i^c, \pi_i} \quad U_i^p = \ln x_i^p + \alpha \ln x_i^c + (1+\alpha)\theta \ln H_i + (1+\alpha)\eta \ln G$$
$$\text{s.t.} \quad y_i^p = x_i^p + h_i^p + g_i^p + \pi_i,$$
$$h_i^p \geq 0,$$
$$g_i^p \geq 0,$$
$$\pi_i \geq 0$$

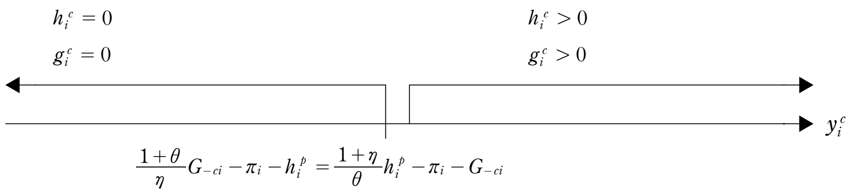
5）結果2の導出については Appendix A を参照。
6）最適反応関数の導出については Appendix B を参照。
7）最適応答の導出については Appendix C を参照。



（ⅰ）$\eta h_i^p<\theta G_{-ci}$ のとき



（ⅱ）$\eta h_i^p>\theta G_{-ci}$ のとき



（ⅲ）$\eta h_i^p=\theta G_{-ci}$ のとき

図2　子の最適応答

に直面している。これを解くと，家族 $j(j\neq i)$ の戦略 g_j，子の戦略 h_i^c，g_i^c に対する家族 i の親の最適反応関数は，

$$\hat{h}_i^p(h_i^c,g_i^c,g_j)=\frac{\theta(y_i+g_j)}{1+\theta+\eta}-h_i^c, \tag{9}$$

$$\hat{g}_i^p(h_i^c,g_i^c,g_j)=\frac{\eta y_i-(1+\theta)g_j}{1+\theta+\eta}-g_i^c, \tag{10}$$

$$\hat{\pi}_i(h_i^c,g_i^c,g_j)=\frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+\theta+\eta)}(y_i+g_j)-y_i^c+h_i^c+g_i^c \tag{11}$$

となる。(9)，(10)，(11)より，図3のように親の最適応答が導出できる。子の最適応答とあわせてナッシュ均衡を考えると，子だけが家計財に正の供給を行うような均衡，子だけが公共財に正の供給を行うような均衡は存在しない[8)]。また，親子がともに公共財に正の供給を行うような均衡は存在しない[9)]。したがって，ナッシュ均衡では，子は家計財にも公共財にも供給しない。

結果 3．**子だけが家計財に正の供給を行うようなナッシュ均衡，子だけが公共財に正の供給を行うようなナッシュ均衡は存在しない。親子ともに家計財に正の供給を行うようなナッシュ均衡，親子ともに公共財に正の供給を行うようなナッシュ均衡は存在しない。**

結果 3 は Cornes and Itaya (2004) が示した結果に一致しているように見える。彼らは，複数の純粋公共財に自発的供給を行うようなモデルを示し，個人間で公共財 1 と公共財 2 の限界代替率が等しくなるときは望ましい公共財総量が個人間で一致し，その総量が供給されるようないかなる組み合わせも均衡になりうることを示した[10)]。本稿では家計財と公共財の限界代替率が家族内で等しくなっているが，親子がともに正の供給を行うような均衡が存在しない。これは公共財供給が他の家族に対して所得移転の役割を果たしているからであると考えられる。家計財についても親子とも正の供給を行うような均衡が存在しないことは，親が子に対して利他的であることも大きい。家計財と公共財については親子間で限界代替率が一致するが，私的財と家計財の限界代替率や私的財と公共財の限界代替率は親子間で一致しないためである。

結果 3 から，家計財と公共財に供給しているパターンは表 1 のようになる。家族 1 が（Ⅰ）のとき，家族 2 が（Ⅰ）であれば両家族が公共財に厳密に正の供給をおこなう。家族 1 が（Ⅰ）のとき，家族 2 が（Ⅱ）であれば，家族 1 だけが公共財に供給する。家族 1 が（Ⅱ）のとき，家族 2 が（Ⅰ）であれば，家族 1 は公共財に供給せず，家族 2 だけが供給する。それぞれのケースにおいて，親からの所得移転の有無によって親と子の私的財の消費量は変化するが，家計財と公共財の消費量は変わらない。ナッシュ均衡を求めると以下のようになる。

表 1　家族の供給パターン

	g_i^p	g_i^c	h_i^p	h_i^c
（Ⅰ）	+	0	+	0
（Ⅱ）	0	0	+	0

0 は「供給しない」，+は「厳密に正の供給をする」ことを示す。

家族 1 が（Ⅰ），家族 2 が（Ⅱ）のケース；家族 1 だけが公共財に供給するケース

$$G = g_1 = \frac{\eta}{1+\theta+\eta} y_1,$$

$$H_1 = \frac{\theta}{1+\theta+\eta} y_1,$$

$$H_2 = \frac{\theta}{1+\theta+\eta} \left(y_2 + \frac{\eta}{1+\theta+\eta} y_1 \right),$$

8) Appendix D を参照。

9) Appendix E を参照。

10) 予算制約 $x_i + g_1^i + g_2^i = y_i$ のもとで $u_i(x_i, G_1, G_2) = x_i G_1^{\alpha_i} G_2^{\beta_i}$ を最大化するとき，個人にとって望ましい公共財1と公共財2の消費比率 $\left(\frac{G_2}{G_1}\right)_i^*$ を求めることができる。$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_j}{\beta_j}$ ならば 2 人は公共財 1 と 2 に対して等しい総量を望む。$\frac{\alpha_i}{\beta_i} > \frac{\alpha_j}{\beta_j}$ ならば $\left(\frac{G_2}{G_1}\right)_i^* > \left(\frac{G_2}{G_1}\right)_j^*$ であり，結果，ナッシュ均衡で 2人の限界代替率は一致せず，端点解が生じることを示した。

3-a－3-d：$\eta(1+\alpha)(y_i^c - g_i^c) - (\alpha+\theta+\theta\alpha)G_{-pi} > 0$ のとき

$\boxed{\text{3-a}}$

$h_i^p = 0$	$h_i^p > 0$	$h_i^p > 0$	$h_i^p > 0$
$g_i^p = 0$	$g_i^p = 0$	$g_i^p > 0$	$g_i^p > 0$
$\pi_i = 0$	$\pi_i = 0$	$\pi_i = 0$	$\pi_i > 0$

① ② ③ y_i

$\boxed{\text{3-b}}$

$h_i^p = 0$	$h_i^p = 0$	$h_i^p > 0$	$h_i^p > 0$
$g_i^p = 0$	$g_i^p > 0$	$g_i^p > 0$	$g_i^p > 0$
$\pi_i = 0$	$\pi_i = 0$	$\pi_i = 0$	$\pi_i > 0$

② ① ③ y_i

$\boxed{\text{3-c}}$

$h_i^p = 0$	$h_i^p = 0$	$h_i^p = 0$	$h_i^p > 0$
$g_i^p = 0$	$g_i^p > 0$	$g_i^p > 0$	$g_i^p > 0$
$\pi_i = 0$	$\pi_i = 0$	$\pi_i > 0$	$\pi_i > 0$

② ③ ① y_i

$\boxed{\text{3-d}}$

$h_i^p = 0$	$h_i^p = 0$	$h_i^p = 0$	$h_i^p > 0$
$g_i^p = 0$	$g_i^p = 0$	$g_i^p > 0$	$g_i^p > 0$
$\pi_i = 0$	$\pi_i > 0$	$\pi_i > 0$	$\pi_i > 0$

③ ② ① y_i

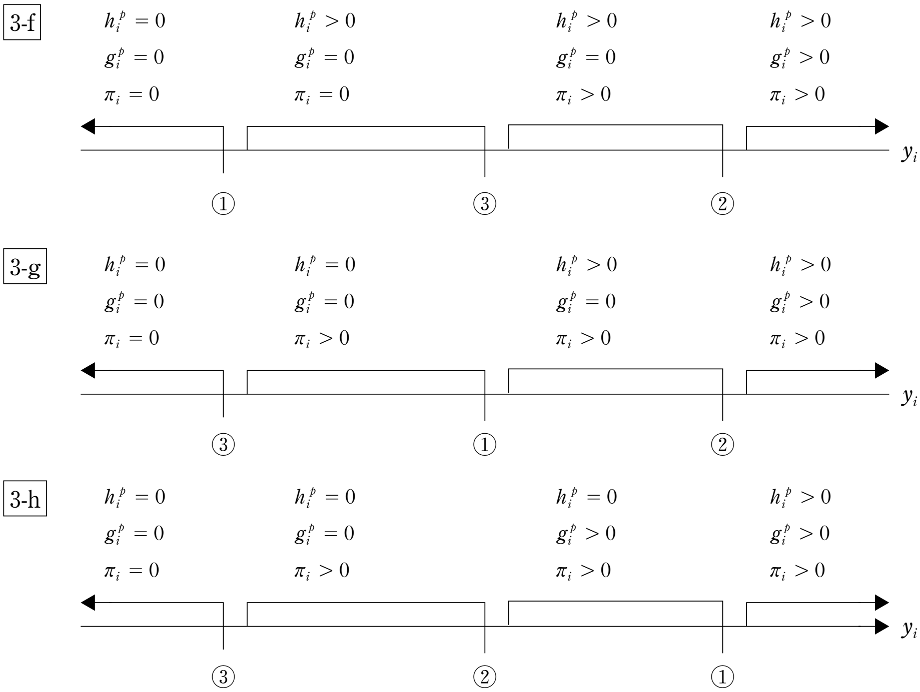
3-e－3-h：$\eta(1+\alpha)(y_i^c - g_i^c) - (\alpha+\theta+\theta\alpha)G_{-pi} < 0$ のとき

$\boxed{\text{3-e}}$

$h_i^p = 0$	$h_i^p > 0$	$h_i^p > 0$	$h_i^p > 0$
$g_i^p = 0$	$g_i^p = 0$	$g_i^p > 0$	$g_i^p > 0$
$\pi_i = 0$	$\pi_i = 0$	$\pi_i = 0$	$\pi_i > 0$

① ② ③ y_i

図 3　親の最適応答



①$=\dfrac{1+\theta+\eta}{\theta}h_i^c-g_j$,

②$=\dfrac{(1+\theta)g_j+(1+\theta+\eta)g_i^c}{\eta}$,

③$=\dfrac{(1+\alpha)(1+\theta+\eta)}{\alpha}(y_i^c-h_i^c-g_i^c)-g_j$

図 3　親の最適応答の続き

あ）$\pi_1>0$ のとき

$$x_1^p=\frac{y_1}{(1+\theta+\eta)(1+\alpha)},$$

$$x_1^c=\frac{\alpha}{(1+\theta+\eta)(1+\alpha)}y_1,$$

$$\pi_1=\frac{\alpha}{(1+\theta+\eta)(1+\alpha)}y_1-y_1^c。$$

い）$\pi_1 = 0$ のとき

$$x_1^p = \frac{y_1}{1+\theta+\eta} - y_1^c,$$

$$x_1^c = y_1^c。$$

う）$\pi_2 > 0$ のとき

$$x_2^p = \frac{1}{(1+\theta+\eta)^2(1+\alpha)}\left[(1+\theta+\eta)(1+\eta+\alpha\eta)y_2 - \eta(\alpha+\theta+\alpha\theta)y_1\right],$$

$$x_2^c = \frac{\alpha}{(1+\theta+\eta)^2(1+\alpha)}\left[(1+\theta+\eta)y_2 + \eta y_1\right],$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha}{(1+\theta+\eta)(1+\alpha)}\left(y_2 + \frac{\eta}{1+\theta+\eta}y_1\right) - y_2^c。$$

え）$\pi_2 = 0$ のとき

$$x_2^p = \frac{1+\eta}{1+\theta+\eta}y_2 - y_2^c - \frac{\theta\eta}{(1+\theta+\eta)^2}y_1,$$

$$x_2^c = y_2^c。 \tag{A3－1}$$

家族1が（Ⅰ），家族2が（Ⅰ）のケース；両家族が公共財に供給するケース

$$G = g_1 + g_2 = \frac{\eta}{2+2\theta+\eta}Y,$$

$$H_1 = H_2 = \frac{\theta}{2+2\theta+\eta}Y,$$

あ）$\pi_1 > 0$ のとき

$$x_1^p = \frac{Y}{(2+2\theta+\eta)(1+\alpha)},$$

$$x_1^c = \frac{\alpha}{(2+2\theta+\eta)(1+\alpha)}Y,$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha}{(2+2\theta+\eta)(1+\alpha)}Y - y_1^c。$$

い）$\pi_1 = 0$ のとき

$$x_1^p = \frac{Y}{2+2\theta+\eta} - y_1^c,$$

$$x_1^c = y_1^c。$$

う）$\pi_2>0$ のとき

$$x_2^p=\frac{Y}{(2+2\theta+\eta)(1+\alpha)},$$

$$x_2^c=\frac{\alpha}{(2+2\theta+\eta)(1+\alpha)}Y,$$

$$\pi_2=\frac{\alpha}{(2+2\theta+\eta)(1+\alpha)}Y-y_2^c。$$

え）$\pi_2=0$ のとき

$$x_2^p=\frac{Y}{2+2\theta+\eta}-y_2^c,$$

$$x_2^c=y_2^c。\qquad (A3-2)$$

これらをまとめたものが図４である。図４は，各均衡が生じるための所得分布条件を表している。図の１番目の数直線は家族１の子の所得が家族１の総所得に占める割合をとったものであり，２番目の数直線は家族２の子の所得が家族２の総所得に占める割合をとったものである。親の私的財消費量が厳密に正であるという条件から，子の所得は家族の総所得に対してある一定のレベルよりも小さいことが要求され，親が所得移転を行うときは，子の所得がそのレベルよりもさらに小さいときになる。３番目と４番目の数直線は，経済全体の所得に対して家族１と家族２の総所得がそれぞれどれだけの割合を占めるかを表している[11)]。図４はいずれも家族１が公共財に供給している状態であり，比較的高い所得を占めていることがわかる。

図4－1は家族１の親だけが公共財に供給しているケースをあらわす。このとき，家計財と公共財の総供給量は，家族単位のナッシュ均衡の端点解と比べると，下限については一致し，上限については小さくなる。上限が小さくなるのは子が家計財にも公共財にも供給しない条件（図２（ⅰ）のケース）と家族２の親の私的財消費量が正であるという条件から導かれる。家族１について，親が所得移転をおこなうとき，親の私的財消費量の下限値は家族単位のナッシュ均衡の端点解の下限値より大きくなり，子の私的財消費量の下限値は家族単位のナッシュ均衡の端点解の下限値より小さくなる。親子の私的財消費量の比は，家族単位のナッシュ均衡解が $1:1+\alpha$ であるのに対して，このケースのナッシュ均衡では $1:\alpha$ であるため，家族の厚生最大化は実現しない。(A3－1)のあ）で求めたように，親の所得移転は子の私的財消費量と子の初期賦存との差になる。子の私的財消費量は親の私的財消費量の α 倍であり，あきらかに親より小さい。これは，親が子の私的財消費を α 倍で考慮していることと，子の所得が親から所得移転を受けるほど小さいためと考えられる。親が所得移転をおこなわないとき，子の私的財消費量の下限値と上限値の間に家族単位のナッシュ均衡の端点解の下限値があることがわかる。家族２について，親が所得移転をおこなうとき，親の私的財消費量の上限値は家族単位のナッシュ均衡の端点解の上限値より大きくなり，子の私的財消費量の上限値は家族単位のナッシュ均衡の端点解の下限値より小さくなる。親子の私的財消費量の比

11）図4－2は３番目の数直線で家族１，家族２の総所得を共通にしてあらわした。

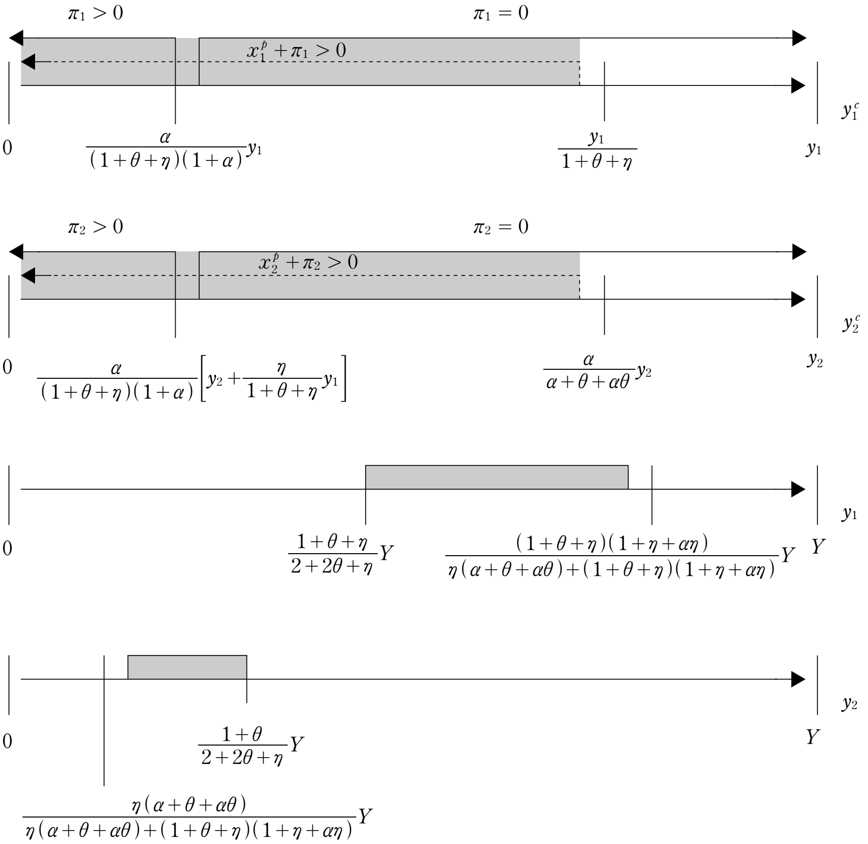


図4−1　家族１が(Ⅰ)，家族２が(Ⅱ)のときの所得分布

は，家族単位のナッシュ均衡解が$1:1+\alpha$であるのに対して，このケースのナッシュ均衡ではあきらかに異なるため，家族の厚生最大化は実現しない。

図4−2は両家族の親が公共財に供給しているケースをあらわす。このとき，家計財と公共財の総供給量は家族単位のナッシュ均衡の内点解と一致する。親が所得移転をおこなうときは，家族単位のナッシュ均衡の内点解と比べると，親の私的財消費量は大きくなり，子の私的財消費は小さくなるため，家族の厚生最大化も実現しない。(A3−2)のあ）で求めたように，親の所得移転は子の私的財消費量と子の初期賦存との差になる。子の私的財消費量は親の私的財消費量のα倍であり，あきらかに親より小さい。これは，親が子の私的財消費をα倍で考慮していることと，子の所得が親から所得移転を受けるほど小さいためと考えられる。親が所得移転をおこなわないとき，図4−2より，子の私的財消費量は所得移転をおこなうときよりも大きくなる。このとき，子の私的財消費量の下限値と上限値の間に家族単位のナッシュ均衡の内点解があることがわかる。

3．4　サブゲーム完全均衡

本節では，サブゲーム完全均衡を分析するため，次のような２段階ゲームを考える。各家族$i(i=1,2)$で，

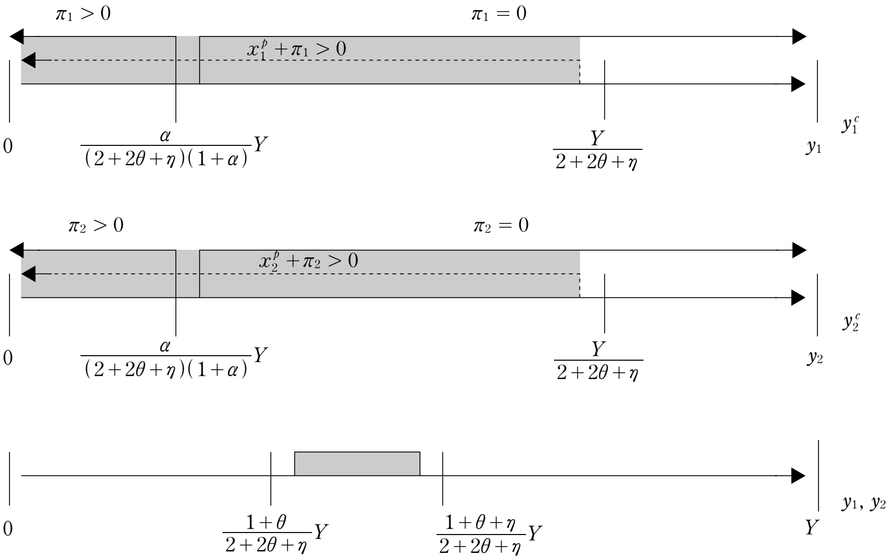


図4－2　家族１が(Ｉ)，家族２が(Ｉ)のときの所得分布

第１期：子が(h_i^c, g_i^c)を決定する。

第２期：親が自分の子の行動(h_i^c, g_i^c)を観察したうえで，

(h_i^p, g_i^p, π_i)を決定する。

親子はともに他の家族の公共財供給 g_j については所与として行動する。第２期の親の最大化問題は(A3－p)で，反応関数(9)－(11)が導出される。これらの反応は，第１期の子の行動(h_i^c, g_i^c)の影響をうける。子は，このような親の反応を考慮してふるまう。このとき子の最大化問題は，

$$\text{(A4－c)} \qquad \max_{h_i^c, g_i^c} \quad u_i^c = \ln(y_i^c - h_i^c - g_i^c + \hat{\pi}_i) + \theta \ln(h_i^c + \hat{h}_i^p) + \eta \ln(g_i^c + g_j + \hat{g}_i^p)$$

$$\text{s.t.} \quad h_i^c \geq 0, \quad g_i^c \geq 0$$

となる。Kuhn-Tucker 条件は，

$$\frac{\partial u_i^c}{\partial h_i^c} = \frac{1}{y_i^c - h_i^c - g_i^c + \hat{\pi}_i}\left(-1 + \frac{\partial \hat{\pi}_i}{\partial h_i^c}\right) + \frac{\theta}{h_i^c + \hat{h}_i^p}\left(1 + \frac{\partial \hat{h}_i^p}{\partial h_i^c}\right) \leq 0, \ h_i^c\left(\frac{\partial u_i^c}{\partial h_i^c}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_i^c}{\partial g_i^c} = \frac{1}{y_i^c - h_i^c - g_i^c + \hat{\pi}_i}\left(-1 + \frac{\partial \hat{\pi}_i}{\partial g_i^c}\right) + \frac{\eta}{g_i^c + g_j + \hat{g}_i^p}\left(1 + \frac{\partial \hat{g}_i^p}{\partial g_i^c}\right) \leq 0, \ g_i^c\left(\frac{\partial u_i^c}{\partial g_i^c}\right) = 0$$

であらわされる。これに親の反応である $\frac{\partial \hat{\pi}_i}{\partial h_i^c} = \frac{\partial \hat{\pi}_i}{\partial g_i^c} = 1$，$\frac{\partial \hat{h}_i^p}{\partial h_i^c} = \frac{\partial \hat{h}_i^p}{\partial g_i^c} = -1$ を代入すると $\frac{\partial u_i^c}{\partial h_i^c} = 0$，$\frac{\partial u_i^c}{\partial g_i^c} = 0$ になるため，$h_i^c > 0$，$g_i^c > 0$ となることがわかる。しかし，実際にどのような値をとるか

は，この１階条件からは特定化できない。親の反応関数とあわせて考えると，$\hat{H}_i=\dfrac{\theta(y_i+g_j)}{1+\theta+\eta}$，$\hat{g}_i=\dfrac{\eta y_i-(1+\theta)g_j}{1+\theta+\eta}$ をみたすような組み合わせ $(h_i^p,\ h_i^c)$，$(g_i^p,\ g_i^c)$ は，$h_i^c=0$，$g_i^c=0$ を除いてすべてナッシュ均衡になりうる。π_i は，$(h_i^c,\ g_i^c)$ の組み合わせに対応して(11)式をみたすように決まる。もし $\hat{H}_i$ と $\hat{g}_i$ のほとんどを子が供給していても，π_i を増加させることによって x_i^c が補われ，x_i^p はその分低下する。第２期に親が適切に所得移転を行うことにより，家計財と公共財については家族の効用を最大化する解 $(\tilde{H}_i,\ \tilde{g}_i)$ と一致することがわかる。(2)に(11)を代入すれば x_i^c，(4)に(9)－(11)を代入すると x_i^p が求められる。サブゲーム完全均衡では，

$$\hat{x}_1^p=\hat{x}_2^p=\frac{Y}{(1+\alpha)(2+2\theta+\eta)}>\frac{Y}{(2+\alpha)(2+2\theta+\eta)}=\tilde{x}_1^p,$$

$$\hat{x}_1^c=\hat{x}_2^c=\frac{\alpha Y}{(1+\alpha)(2+2\theta+\eta)}<\frac{(1+\alpha)Y}{(2+\alpha)(2+2\theta+\eta)}=\tilde{x}_1^c,$$

$$\hat{H}_1=\hat{H}_2=\frac{\theta Y}{2+2\theta+\eta}=\tilde{H}_1,$$

$$\hat{G}=\frac{\eta Y}{2+2\theta+\eta}=\tilde{G}. \tag{A4}$$

となる。

　これをみると，私的財については家族単位のナッシュ均衡と一致せず，両家族の親が公共財に供給し，かつ，子に所得移転をおこなうナッシュ均衡と一致することがわかる。親が消費する私的財は，$\tilde{x}_1^p$ よりも大きくなってしまう。しかし，$\hat{x}_1^c$ は $\tilde{x}_1^c$ より小さいばかりか，α が比較的小さい値をとるときは $x_1^{c^*}$ よりも小さくなってしまう[12)]。これは Samaritan’s　Dilemma が発生していないことを意味する。Samaritan’s Dilemma とは，親の所得移転をみこして子が私的財を過剰に消費することをいう。$\hat{x}_1^c<\tilde{x}_1^c$ であるから，明らかに逆のことが起きている。部分ゲーム完全均衡でなぜこのようなことが発生するのか，より詳細な分析が必要である。さらに，本稿では Rotten-Kid Theorem が成立する[13)]。Cornes　and　Silva（1999）は，子の行動が純粋公共財の性質を持つのであれば，Rotten-Kid　Theorem が成立することを示した。本稿のモデルでは，子の行動のうち h_1^c は家族１にとって純粋公共財であるが，g_1^c は家族２への所得移転ともなりうる。このことが，パレート最適が成立しない主な要因であると考えられる。

結果４．**子が先に行動するような２段階ゲームのサブゲーム完全均衡では，公共財総供給量と家計財の総供給量は家族単位のナッシュ均衡の内点解と一致する。しかし，子の私的財消費は家族単位のナッシュ均衡の内点解よりも小さくなり，「先行者の不利益」が発生してしまい，Samaritan’s Dilemma が生じない。**

12）Appendix　F を参照。

13）Rotten-Kid　Theorem の成立については Appendix　G を参照。

4．おわりに

効用関数を対数型に特定化し，私的財，家計財，公共財に対する選好を個人間で等しくした簡単なモデルを用いて，公共財供給のモデルにおいてよくとりあげられる4つの均衡：パレート最適（ベンチマーク），家族の効用を最大化する均衡，ナッシュ均衡，部分ゲーム完全均衡を導出した。その結果，公共財が1財のモデルで予想されることである，「部分ゲーム完全均衡と家族の効用最大化解が一致する」は成立しなかった。さらに，3つの解のどの値においてもパレート最適に一致する値は導かれなかった。このことは，2人2家族のモデルでパレート改善を達成するためには，政府による家族間の所得移転が必要であることを示唆している。これから研究するにあたっては，よりモデルを一般化し，政策の及ぼす効果にも注目することが必要と考える。

＊本稿の執筆にあたっては，北海道大学大学院経済学研究科の板谷淳一教授，ゼミ生の山口 力氏，北海道大学大学院の教員の方々に多くの貴重なコメントをいただきました。中京大学の釜田公良教授は，多くの重要かつ詳細なコメントをくださいました。心から感謝いたします。言うまでもなく，本稿に関する誤りなどは，すべて筆者の責に帰します。

Appendix A

(A2－2)を家族の厚生関数に代入すると，内点解のときの家族の厚生関数が以下のように得られる。上付きのINは内点解，COは端点解をあらわす。

$$\tilde{W}_1^{IN}=\tilde{W}_2^{IN}=(1+\theta+\eta)(2+\alpha)[\ln Y-\ln(2+2\theta+\eta)]-(2+\alpha)\ln(2+\alpha)$$

$$+(1+\alpha)\ln(1+\alpha)+(2+\alpha)(\theta\ln\theta+\eta\ln\eta)$$

(A2－1)についても同様におこなうと，端点解のときの家族の厚生関数が以下のように得られる。

$$\tilde{W}_1^{CO}=(1+\theta+\eta)(2+\alpha)[\ln y_1-\ln(1+\theta+\eta)]-(2+\alpha)\ln(2+\alpha)$$

$$+(1+\alpha)\ln(1+\alpha)+(2+\alpha)(\theta\ln\theta+\eta\ln\eta)$$

$$\tilde{W}_2^{CO}=(1+\theta)(2+\alpha)[\ln y_2-\ln(1+\theta)]-(2+\alpha)\ln(2+\alpha)+(1+\alpha)\ln(1+\alpha)$$

$$+(2+\alpha)(\theta\ln\theta+\eta\ln\eta)+\eta(2+\alpha)[\ln y_1-\ln(1+\theta+\eta)]$$

$$\tilde{W}_1^{IN}-\tilde{W}_1^{CO}=(1+\theta+\eta)(2+\alpha)[\ln Y-\ln y_1-\ln(2+2\theta+\eta)+\ln(1+\theta+\eta)]$$

y_1 に端点解の下限 $y_1=\dfrac{1+\theta+\eta}{2+2\theta+\eta}Y$ を代入すると，$\tilde{W}_1^{IN}-\tilde{W}_1^{CO}=0$ になる。$\tilde{W}_1^{CO}$ を全微分すると，

$$d\tilde{W}_1^{CO}=(1+\theta+\eta)(2+\alpha)\frac{1}{y_1}dy_1$$

になる。したがって，$y_1 > \dfrac{1+\theta+\eta}{2+2\theta+\eta}Y$ では，あきらかに $\tilde{W}_1^{IN} - \tilde{W}_1^{CO} < 0$。また，

$$\tilde{W}_2^{IN} - \tilde{W}_2^{CO} = (2+\alpha)[(1+\theta+\eta)\,〔\ln Y - \ln(2+2\theta+\eta)〕 - (1+\theta)\ln y_2$$

$$+(1+\theta)\ln(1+\theta) - \eta \ln y_1 + \eta \ln(1+\theta+\eta)]$$

についても端点解の境界を代入すると，$\tilde{W}_2^{IN} - \tilde{W}_2^{CO} = 0$ になる。$\tilde{W}_2^{CO}$ を全微分すると，

$$d\tilde{W}_2^{CO} = (2+\alpha)\left[(1+\theta)\frac{1}{y_2}dy_2 + \eta\frac{1}{y_1}dy_1\right]$$

になる。このとき $dy_1 = -dy_2$ となるよう所得を再分配すると，

$$d\tilde{W}_2^{CO} = (2+\alpha)\left[-(1+\theta)\frac{1}{y_2} + \eta\frac{1}{y_1}\right]dy_1$$

になる。$y_1 > \dfrac{1+\theta+\eta}{2+2\theta+\eta}Y$ のとき，$-(1+\theta)\dfrac{1}{y_2} + \eta\dfrac{1}{y_1} = \dfrac{-(1+\theta+\eta)y_1 + \eta Y}{y_1(Y-y_1)} < 0$ より，$d\tilde{W}_2^{CO} / dy_1 < 0$. したがって，端点解の境界から y_1 が増加するとき，非供給者である家族 2 の厚生は下がり，$y_1 > \dfrac{1+\theta+\eta}{2+2\theta+\eta}Y$ の範囲では，$\tilde{W}_2^{IN} - \tilde{W}_2^{CO} > 0$ になる。$(\tilde{W}_1^{CO} + \tilde{W}_2^{CO}) - (\tilde{W}_1^{IN} + \tilde{W}_2^{IN})$ について考える。内点解であり続ける限り，公共財の総供給量および家計財，私的財の消費レベルは変わらない。したがって，$\tilde{W}_1^{IN} + \tilde{W}_2^{IN}$ は $dy_1 = -dy_2$ となるよう所得を再分配しても，再分配後も内点解であり続けるならば変化しない。端点解のときの社会厚生 $\tilde{W}_1^{CO} + \tilde{W}_2^{CO}$ を全微分すると，

$$d(\tilde{W}_1^{CO} + \tilde{W}_2^{CO}) / dy_1 = (2+\alpha)\left[(1+\theta+2\eta)\frac{1}{y_1} - (1+\theta)\frac{1}{y_2}\right]$$

$$= \left[\frac{(1+\theta+2\eta)Y - 2(1+\theta+\eta)y_1}{y_1(Y-y_1)}\right](2+\alpha)$$

とあらわせる。上式の右辺について，$y_1 = \dfrac{1+\theta+2\eta}{2(1+\theta+\eta)}Y$ のときに 0 になる。したがって，

$$\frac{1+\theta+\eta}{2+2\theta+\eta}Y \le y_1 < \frac{1+\theta+2\eta}{2(1+\theta+\eta)}Y \text{ のときは } d(\tilde{W}_1^{CO} + \tilde{W}_2^{CO}) / dy_1 > 0,$$

$$\frac{1+\theta+2\eta}{2(1+\theta+\eta)}Y \le y_1 < Y \text{ のときは } d(\tilde{W}_1^{CO} + \tilde{W}_2^{CO}) / dy_1 < 0$$

になる。端点解のときは，所得格差がある一定のレベルを超えるまでは社会厚生は大きくなるが，さらに所得格差が大きくなると社会厚生は小さくなる。

Appendix B

最大化問題(A3－p)の予算制約式に x_i^p を代入すると，次のように書き換えられる。

$$\max_{h_i^p, g_i^p, \pi_i} \quad U_i^p = \ln(y_i^p - \pi_i + h_i^p - g_i^p) + \alpha\ln(y_i^c + \pi_i - h_i^c - g_i^c)$$
$$+ (1+\alpha)\theta\ln H_i + (1+\alpha)\eta\ln G$$

$$\text{s.t.} \quad h_i^p \geq 0,$$
$$g_i^p \geq 0,$$
$$\pi_i \geq 0$$

とすると， Kuhn-Tucker 条件は，

$$\frac{\partial U_i^p}{\partial h_i^p} = -\frac{1}{y_i^p - \pi_i - h_i^p - g_i^p} + \frac{\theta(1+\alpha)}{H_i} \leq 0, \quad h_i^p \frac{\partial U_i^p}{\partial h_i^p} = 0,$$

$$\frac{\partial U_i^p}{\partial g_i^p} = -\frac{1}{y_i^p - \pi_i - h_i^p - g_i^p} + \frac{\eta(1+\alpha)}{G} \leq 0, \quad g_i^p \frac{\partial U_i^p}{\partial h_i^p} = 0,$$

$$\frac{\partial U_i^p}{\partial \pi_i} = -\frac{1}{y_i^p - \pi_i - h_i^p - g_i^p} + \frac{\alpha}{y_i^c + \pi_i - h_i^c - g_i^c} \leq 0, \quad \pi_i \frac{\partial U_i^p}{\partial \pi_i} = 0$$

となる。この条件から，$MRS_{Hxp}^{pi} = 1$ ならば $h_i^p > 0$，$MRS_{Hxp}^{pi} \leq 1$ ならば $h_i^p = 0$ であることがわかる（g_i^p, π_i についても同じことがいえる。ここではすべての価格の財は 1 であるから，相対価格も全て 1 になる）。反応関数(9)－(11)は，$\dfrac{\partial U_i^p}{\partial h_i^p} = 0$，　$\dfrac{\partial U_i^p}{\partial g_i^p} = 0$，$\dfrac{\partial U_i^p}{\partial \pi_i} = 0$ とおいて導出したものである。子についても(A3－c)の予算制約式を x_i^c に代入して，Kuhn-Tucker 条件から(5)，(6)を導出できる。

Appendix C

最適応答は以下のように導出した。
子について，最適反応関数(7)，(8)から，

$h_i^c > 0 ; y_i^c > \dfrac{1+\eta}{\theta} h_i^p - \pi_i - G_{-ci}$ のとき

$g_i^c > 0 ; y_i^c > \dfrac{1+\theta}{\eta} G_{-ci} - \pi_i - h_i^p$ のとき

したがって，次のように場合分けができる。

ア）$h_i^c > 0$ かつ $g_i^c > 0$ のケース

$$y_i^c > \frac{1+\eta}{\theta} h_i^p - \pi_i - G_{-ci} \text{ かつ } y_i^c > \frac{1+\theta}{\eta} G_{-ci} - \pi_i - h_i^p$$

のときに成り立つ。

y_i^c の下限が $\dfrac{1+\eta}{\theta} h_i^p - \pi_i - G_{-ci} ; \eta h_i^p > \theta G_{-ci}$ のとき

y_i^c の下限が $\dfrac{1+\theta}{\eta}G_{-ci}-\pi_i-h_i^p$;$\eta h_i^p<\theta G_{-ci}$ のとき

y_i^c の下限が $\dfrac{1+\eta}{\theta}h_i^p-\pi_i-G_{-ci}=\dfrac{1+\theta}{\eta}G_{-ci}-\pi_i-h_i^p$;$\eta h_i^p=\theta G_{-ci}$ のとき

イ）$h_i^p=0$ かつ $g_i^c=0$ のケース

$$y_i^c\leq\frac{1+\eta}{\theta}h_i^p-\pi_i-G_{-ci} \text{ かつ } y_i^c\leq\frac{1+\theta}{\eta}G_{-ci}-\pi_i-h_i^p$$

のときに成り立つ。

y_i^c の上限が $\dfrac{1+\eta}{\theta}h_i^p-\pi_i-G_{-ci}$;$\eta h_i^p<\theta G_{-ci}$ のとき

y_i^c の上限が $\dfrac{1+\theta}{\eta}G_{-ci}-\pi_i-h_i^p$;$\eta h_i^p>\theta G_{-ci}$ のとき

y_i^c の下限が $\dfrac{1+\eta}{\theta}h_i^p-\pi_i-G_{-ci}=\dfrac{1+\theta}{\eta}G_{-ci}-\pi_i-h_i^p$;$\eta h_i^p=\theta G_{-ci}$ のとき

ウ）$h_i^p=0$ かつ $g_i^c>0$ のケース

$$\frac{1+\eta}{\theta}h_i^p-\pi_i-G_{-ci}\geq y_i^c>\frac{1+\theta}{\eta}G_{-ci}-\pi_i-h_i^p$$

のときに成り立つ。このとき $\eta h_i^p>\theta G_{-ci}$ が必要である。

エ）$h_i^p>0$ かつ $g_i^c=0$ のケース

$$\frac{1+\theta}{\eta}G_{-ci}-\pi_i-h_i^p\geq y_i^c>\frac{1+\eta}{\theta}h_i^p-\pi_i-G_{-ci}$$

のときに成り立つ。このとき $\eta h_i^p<\theta G_{-ci}$ が必要である。

以上ア）－エ）により，子の最適応答が導出され，図 2 にあらわすことができる。親についても同様にして，$\dfrac{1+\theta+\eta}{\theta}h_i^c-g_j\neq\dfrac{(1+\theta)g_j+(1+\theta+\eta)g_i^c}{\eta}\neq\dfrac{(1+\alpha)(1+\theta+\eta)}{\alpha}(y_i^c-h_i^c-g_i^c)-g_j$，$\dfrac{1+\theta+\eta}{\theta}h_i^c-g_j\neq\dfrac{(1+\alpha)(1+\theta+\eta)}{\alpha}(y_i^c-h_i^c-g_i^c)-g_j$ のケースについて図 3 をあらわした。

Appendix D

$h_i^c>0$，$g_i^c>0$，$h_i^p=0$，$g_i^p=0$ のケースを考える。

家計財について(7)より $H_i=\dfrac{\theta(y_i^c+\pi_i+G_{-ci})}{1+\theta+\eta}$，(9)より $\dfrac{\theta(y_i+g_j)}{1+\theta+\eta}-H_i\leq0$ が得られる。H_i はともに等しいので，以下を満たす。

$$y_i^c+\pi_i+G_{-ci}\geq y_i+g_j$$
$$\pi_i\geq y_i^p$$

しかし，親の予算制約式(4)：$y_i^p=\pi_i+x_i^p+h_i^p+g_i^p$ と，効用最大化条件より $x_i^p>0$ でなければならない。したがって，$h_i^c>0$ かつ $h_i^p=0$ は不適。

公共財について(8)より $g_i=\dfrac{\eta(y_i^c+\pi_i)-(1+\theta)g_j}{1+\theta+\eta}$，(10)より $\dfrac{\eta y_j-(1+\theta)g_j}{1+\theta+\eta}-g_i\leq0$ が得られる。g_i はともに等しいので，以下を満たす。

$$y_i^c+\pi_i\geq y_i$$

$$\pi_i \geq y_i^p$$

家計財と同様の理由で，$g_i^c > 0$ かつ $g_i^p = 0$ は不適。

Appendix E

$h_i^c > 0$，$g_i^c > 0$，$h_i^p > 0$，$g_i^p > 0$ のケースを考える。

家計財について(7)より $H_i = \dfrac{\theta(y_i^c + \pi_i + G_{-ci} + h_i^p)}{1+\theta+\eta}$，(9)より，$H_i = \dfrac{\theta(y_i + g_j)}{1+\theta+\eta}$ が得られる。H_i はともに等しいので，以下を満たす。

$$y_i^c + \pi_i + G_{-ci} + h_i^p = y_i + g_j$$

$$\pi_i + g_i^p + h_i^p = y_i^p$$

しかし，親の予算制約式(4)：$y_i^p = \pi_i + x_i^p + h_i^p + g_i^p$ と，効用最大化条件より $x_i^p > 0$ でなければならない。したがって，$h_i^c > 0$ かつ $h_i^p > 0$ は不適。

公共財について(8)より $g_i = \dfrac{\eta(y_i^c + \pi_i + h_i^p + g_i^p) - (1+\theta)g_j}{1+\theta+\eta}$，(10)より $g_i = \dfrac{\eta y_i - (1+\theta)g_j}{1+\theta+\eta}$ が得られる。g_i はともに等しいので，以下を満たす。

$$y_i^c + \pi_i + g_i^p + h_i^p = y_i$$

$$\pi_i + g_i^p + h_i^p = y_i^p$$

家計財と同様の理由で，$g_i^c > 0$ かつ $g_i^p > 0$ は不適。

Appendix F

(A1－1)，(A4)より，

$$\hat{x}_1^c - x_1^{c^*} = \frac{\eta(1+\alpha)^2 - 2(1+\theta+\eta)}{2(1+\alpha)(2+\alpha)(1+\theta+\eta)(2+2\theta+\eta)} Y$$

になる。$(1+\alpha)^2 < 2$，すなわち，$\alpha \in \left(0, -1+\sqrt{2}\right)$ という比較的小さい値のとき，θ や η の大小関係に関わらず $\hat{x}_1^c - x_1^{c^*} < 0$。

Appendix G

Rotten-Kid Theorem が成立するのは，以下の最大化問題の解が(A4)と一致するとき；

$$\max_{x_i^p, h_i^p, g_i^p, \pi_i} \quad U_i^p = \ln x_i^p + \alpha \ln x_i^c + (1+\alpha)\theta \ln H_i + (1+\alpha)\eta \ln G$$

$$\text{s.t.} \quad y_i = x_i^p + x_i^c + H_i + g_i$$

$$g_i \geq 0$$

Kuhn-Tucker 条件から，(5)，(6)と同じ反応関数が求められる。子の公共財供給が正であることから内点解であることが要求され，家族 1 と家族 2 の公共財供給量を求めることができ，上記の最大化問題の解は私的財，家計財，公共財について(A4)と一致する。(A4)はサブゲーム完全均衡解なので，親が家族の総所得のもとで親の効用を最大化する解と，サブゲーム完全均衡解が一致することから，Rotten-Kid Theorem が成立する。

参考文献

Becker, G. S.［1974］“A theory of social interactions.” *Journal of Political Economy*, Vol. 82, pp. 1063－93.

Bergstrom, T.［1989］“A fresh look at the rotten kid theorem and other household mysteries.” *Journal of Political Economy*, Vol. 97, pp. 1138－59.

――――――, Blume, L. and Varian, H.［1987］“On the private provision of public goods.” *Journal of Public Economics*, Vol. 29, pp. 25－49.

Buchanan, M.［1975］“The Samaritan's dilemma.” *Altruism, Morality, and Economic Theory* (ed. E. S. Phelps), New York : Russel Sage Foundation.

Chen, Z. and Woolley, F.［2001］“A Cournot-Nash Model of family decision making.” *Economic Journal*, Vol. 111, pp. 722－748.

Cornes, R. and Itaya, J.［2004］“Models with two or more public goods.” Work shop of economics at Hokkaido University.

――――― and Silva, E.［1999］“Rotten kids, purity and perfection.” *Journal of Political Economy*, Vol. 107, pp. 1034－40.

釜田公良［2000］『世代間所得移転政策と家族の行動』勁草書房.

Stark, O. and Falk, I.［1988］“Transfers, empathy formation, and reverse transfers.” *American Economic Review*, Vol. 88, pp. 271－276.

Warr, P.［1983］“The private provision of public good is independent of the distribution of income.” *Economic Letters*, Vol. 13, pp. 207－11,.