経済学研究 *56－1*
北海道大学 2006.6

＜研究ノート＞

ダンツィークの統計学への貢献

田 中 嘉 浩

1．ダンツィーク小史

ジョージ・ダンツィーク（George Bernard Dantzig）は1914年11月8日にオレゴンのポートランドに生まれた。ダンツィークの父トビアス・ダンツィーク（Tobias Dantzig）は有名な未解決問題のポアンカレ予想を初めとする多くの天才的業績で知られたアンリ・ポアンカレ（Henri Poincaré）の下で勉強したこともある数学者であり，ダンツィークはジョージ・バーナード・ショーの様な大作家になることを願ってジョージ・バーナードと，弟はポアンカレに肖ってヘンリーと名付けられた。

ダンツィークは中学で代数科目で落第したが，それ以降は回復し，高校時代には数学でトップの成績になる程秀でていた。この頃彼の父は数千の幾何の問題を与え続けている。

ダンツィークは父親のいるメリーランド大学の数学科を1936年に卒業し，同年夏にメリーランドでアンネ・シュムナーと結婚した。その後大学院はミシガン大学に行き1938年に数学で修士号を修得した。

ダンツィークは修士号修得後にワシントンの労働統計局に就職したが，そこで後に偉大な経済学者になるフリードマン（M. Friedman）の後任の仕事をすることになり，当時ロンドンのユニヴァーシティ・カレッジにいたネイマン（Jerzy Neyman）の論文の一つを読んで評論を書いた関係でカリフォルニア大学バークレー校に行ったネイマンの下でPh.D.を目指すことになった。

彼自身が[9]に，

・・・My thesis was on two famous unsolved problems in mathematical statistics which I mistakenly thought were a homework assignment and solved.・・・

と書いている様に，或る日ダンツィークがネイマンの授業に遅れて行ったことがあったが，黒板に未解決問題2問が書いてありそれを宿題と間違えて解いてしまったのがネイマンに認められて *The Annals of Mathematical Statistics* の2本の論文[4]，[13]になり，そのまま後に博士論文になった。本稿では次節以降にその2問についての紹介を主題にする。

ダンツィークのバークレーでの博士課程の研究は第2次世界大戦の為に一旦中断され，真珠湾攻撃以降は彼はワシントンの空軍本部の統計管理戦闘分析部門にいた。終戦後に彼はバークレーにPh.D.を得る為に戻って1946年に得たが，数学科の研究助手の申し出を低い給与と空軍からの引き留めの為に断った。

彼は空軍（Air Force）の監査官の数学顧問になっており，彼のペンタゴン時代は1946年から1952年である。ペンタゴン時代に直接には訓練と物資供給の活動を時間的に展開する計画工程を機械化する目的で1947年に彼が形付けたのが線形計画問題とその解法のシンプレックス法である。1947年には彼は当時コールズ財団のクープマンス（T.J. Koopmans）を訪ねて考案したばかりの線形計画モデルを説明しに

行っているが，クープマンスのその後の資源配分の理論と線形計画法の応用に直結したといえる。彼は同年にプリンストン高等研究所（The Institute for Advanced Study）にいたジョン・フォン・ノイマン（John von Neumann）にも線形計画のモデルと定式化を説明に行き，双対定理とその証明のアウトラインを示されたと彼は述べている[2]。彼がそれを線形構造に於ける計画（Programming in a Linear Structure[1)]）と名付け，1948年にウィスコンシン大学で開かれた計量経済学会で講演した時に，ホテリング（H. Hotelling）教授から，「でも我々はみんな世界が非線形だと知っている（“*But we all know the world is nonlinear*”）」と厳しく批評された時に，フォン・ノイマン教授が代わりに，「線形計画の公理を満たす応用があれば使えばよい。そうでなければ使わなければよい」と弁護したという逸話を彼自身が書き残している[9]。彼自身が線形計画の定式化，解法と応用に専念した最も飛躍の有った時期である。

1952年からランド研究所[2)]（RAND Corporation）の研究数学者になったダンツィークはランド在任時には大規模線形計画[7]やウォルフ（P. Wolfe）と共著の分解原理[14]，[15]等の大きな結果を残している。

1960年からダンツィークはカリフォルニア大学バークレー校の経営工学科の教授になったが，１年以内にオペレーションズ・リサーチ・センター（Operations Research Center）を設立してその局長になった。彼が大著『線形計画法とその周辺』（*Linear Programming and Extensions* [8]）を著したのもこの時期であり，それはジョンソン（E. Johnson），ウェッツ（R. Wets），コトル（R. Cottle）等の博士論文の跳躍台になった。

1966年からダンツィークはスタンフォード大学の計算機科学科とオペレーションズ・リサーチ学科に加わることになったが，主に後者に忠誠を尽くされている。OR学科に数理計画の方向を構築するのに専念する一方で，彼は経営工学学会（TIMS[3)]；The Institute of Management Sciences）の会長に選出され，90年代に渡る迄活発に研究活動を続けた。スタンフォード大学にシステム最適化研究所（SOL; Systems Optimization Library）を創設し，国際応用システム分析研究所（IIASA；International Institute for Applied Systems Analysis）との関係を強くしたこと，サーティ（T.L. Saaty[4)]）と共著で『コンパクト・シティ』（*Compact City* [10]）を書いたことも特筆されることである。この時代，特に1975年から80年代後半に渡って，彼はPILOTと呼ばれる大規模マクロ経済モデル[5)]に研究の意欲を注いでいる。彼の共著論文に依れば，PILOTの目的は「新旧の技術がアメリカ経済成長に与える影響，及び経済状態や経済政策が技術革新や現代化を促進するペースにどう影響するかを査定すること」とある。

1975年にカントロビッチ（L.V. Kantorovich）とクープマンス（T.C. Koopmans）が線形計画に関する研究でノーベル経済学賞を得たのには数理計画学会は驚き，ダンツィークに対する公平を欠くかもしれない扱いを軌道修正しようとしたが無駄だった。しかしながらダンツィークは同年に国家科学賞（National Medal of Science）及びフォン・ノイマン理論賞（John von

1）Linear Programmingという表記は彼自身はクープマンスに帰するのが常だったがフォン・ノイマンが計量経済学会の発言で用いたという記述も信憑性が無い訳ではない。

2）当時のランド研究所にはフルカーソン（D.R. Fulkerson），シャプレイ（L.S. Shapley），ベルマン（R. Bellman）等がいた。

3）後にアメリカOR学会（ORSA；The Operations Research Society of America）と合併してアメリカ経営科学・経営工学会（INFORMS；Institute for Operations Research and Management Sciences）になっている。

4）階層化意思決定法（AHP）で有名である。

5）彼はW. Leontiefの仕事[18]を絶賛している。

Neumann Theory Prize）を授与されている。晩年には彼の名を冠したダンツィーク賞（Dantzig Prize）がSIAMと数理計画学会（MPS；Mathematical Programming Society）の合同で，ダンツィーク博士論文賞（Dantzig Dissertation Award）がアメリカ経営科学・経営工学会に依って設立されている。

2．2つの問題

2．1　第1の問題

n 個の変数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ が未知の同じ平均 ξ，未知の同じ標準偏差 σ の正規分布に従っている。この時に，

$H_0:\xi=\xi_0$（定数）；σ（つまり母集団の分散 σ^2）に関しては何も仮定しない。（Studentの仮説）

を満たしているとする。

仮説が偽の時に仮説を受容することを第2種の過誤というが，それをしない確率，即ち，仮説が偽の時に仮説を棄却する確率を示す関数を検出力関数(power function)といい，$\beta(\xi,\sigma)$ で表す。

ここで，$t>t_\alpha$ 又は $|t|>t_\alpha$ のどちらかの検定を t 検定（Studentの検定）という。

t 検定の最適性は，

(1)　その検定力関数が σ の値に依らずに $\xi=\xi_0$ で最小値を持つ。

(2)　同じ有意水準と性質(1)を持つ同じ仮説の他のどんな検定でもその検出力関数（power function）$\beta'(\xi,\sigma)$ が t 検定の $\beta(\xi,\sigma)$ を超えない。

ことにある。

ところで，$\xi=\xi_0$ という t 検定をする際に，$\xi-\xi_0=\Delta$ が十分大きい時に，仮説 H_0 が棄却される可能性がかなり大きいことが望ましい。しかしながら検出力関数が n や Δ だけでなく，σ にも依存するために，相当な困難を生じることがある。通常 σ の値は全く未知であるから，t 検定が適切でない様な例外的な場合には他の検定を適用するかもしれない。

そういう検定を探す考え方は，[4]に引用されたP.L.スウ博士の未公刊論文にある様に，検定力関数が，検定される仮説に明記されないパラメータと独立であること，である。彼はその論文の中で他の事の中で一般線形仮説の λ 検定が最も検定力があり，その検定力関数が λ 検定と同じ引数に依っていて他のパラメータに依っていないことを証明した。こういう状況から，Studentの仮説の検定を工夫して検定力関数が σ と独立になる様にできるかという問題がでてくる。

Dantzig [4]は σ だけに独立な検定が存在しないことを示しているが，この結果はまた別のやり方で最初にStudentにより示された t 検定が改良不可能であることを示していることになる。

パラメータ θ に依って与えられた初等的確率法則 $p(E\,|\,\theta)$ に関して，θ がどんな値でも $P\{E\in w\,|\,\theta\}=\alpha$ ならば，領域 w を全標本空間 W のサイズ α の相似（similar）という。

第1の結果は次の定理に纏められている。

定理1　[4]　領域 w が存在し，σ の値が何であれ，

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\int\ldots\int_w e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\xi_0)^2}\,dx_1dx_2\cdots dx_n\equiv\alpha,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\int\ldots\int_w e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\xi_1)^2}\,dx_1dx_2\cdots dx_n\equiv\beta,$$

但し，$x_0\neq x_1,\alpha,\beta$ は定数，が成立するならば，

$$\alpha=\beta$$

である。■

定理1は σ の値に独立な検定力関数が存在す

れば，それはξにも独立であることを示している。

[4]には，例として，S_nを観測値$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$の標準偏差，S_{n-1}を観測値$(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$の標準偏差，とした時に相似な領域wは，不等式$(S_{n-1}/S_n)\geq C$がξ，σの値が何であれ，

$$P\{(S_{n-1}/S_n)\geq C\mid \xi,\sigma\}$$

が定数になる$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$で与えられ得ることが述べられている。こういう領域に関しては平均に関する（正規分布を仮定する）検定は仮説を受容されることも棄却されることも有るので適切でない。

2．2　第2の問題

統計的仮説検定の理論に於いて，Neyman and Pearson [22]に証明された次の補題は基本的である。

補題1　[22]　$f_1(x),\ldots,f_{m+1}(x)$を有限次元ユークリッド空間上Rで定義された$m+1$個のボレル可測関数で，$\int_R |f_i(x)|dx<\infty$, $i=1,\ldots,m+1$, を満たすとする。更に，$c_1,\ldots,c_m$，m個の定数，$\mathcal{S}$をRのボレル可測部分集合のクラスとし，

$$\int_S f_i(x)dx=c_i,\quad i=1,\ldots,m.$$

を満たすとする。最後に$\mathcal{S}_0$を，

$$\int_{S_0} f_{m+1}(x)dx \geq \int_S f_{m+1}(x)dx,\quad \forall S\in \mathcal{S}_0$$

を満たす$\mathcal{S}$の全ての要素S_0からなる$\mathcal{S}$の部分集合とする。Sを$\mathcal{S}$の要素とし，m個の定数$k_1,\ldots,k_m$が存在して，

$$f_{m+1}(x)\geq k_1f_1(x)+\cdots+k_mf_m(x),\ x\in S, \tag{1}$$

$$f_{m+1}(x)\leq k_1f_1(x)+\cdots+k_mf_m(x),\ x\notin S, \tag{2}$$

が成立するならば，Sは$\mathcal{S}_0$の要素である。　▮

上の補題は$\mathcal{S}$の要素Sはまた$\mathcal{S}_0$の要素にもなる十分条件を与えている。

この結果には，

(1)　$\mathcal{S}$が非空の時には必ず$\mathcal{S}_0$が非空であるか？

(2)　補題1の十分条件の必要性はどうか？（(1)，(2)を測度0の集合上で成立しなくてもいいとする明白な弱め方はともかく）

という重要な2つの問題が残っている。

Dantzig and Wald [13]はこの2つの問題に対して，(1)には肯定的証明を与え，(2)には緩い制約の下で補題1の十分条件と一致する，必要十分条件を与えている。

<u>(1)の肯定的証明</u>

各関数f_iは次の等式

$$\mu_i(S)=\int_S f_i(x)dx,\quad i=1,\ldots,m+1$$

に依って定義される有限な測度$\mu_i(S)$を決める。任意の測度集合Sに対して$\mu(S)=(\mu_1(S),\ldots,\mu_{m+1}(S))$とする。

Lyapunov [19]に依ってμの値域Mは$m+1$次元Euclid空間Eの有界閉凸部分集合であることが証明されている。LをEの$m+1$成分に平行で点$(c_1,\ldots,c_m,0)$を通る直線とする。$\mathcal{S}$が非空と仮定すれば，LとMの共通部分は空でない。Lyapunovの定理からM^*は有限閉区間（1点にもなり得る）になる。$\mu(S)$がM^*の上端の点になる様な部分集合Sが存在する。明らかにSは$\mathcal{S}_0$の要素である。　▮

<u>(2)に関する必要十分条件</u>

νを$\mu_1,\ldots,\mu_m$に関する測度とし，$(\mu_1(S),\ldots,\mu_m(S))$で定義すると，Lyapunovに依る結果からその値域Nはm次元Euclid空間の界閉凸部分集合になる。

定理2　[13]　$c=(c_1,\ldots,c_m)$がNの内点ならば，$\mathcal{S}_0$の要素Sが$\mathcal{S}_0$の要素になる必要十分条

件は，起き得る測度0の集合上を除外して(1)，(2)が成立する m 個の定数 $k_1,...,k_m$ が存在することである。■

$c=(c_1,...,c_m)$ が N の境界点の時には次の様になる。$(\xi=\xi_{1,...,}\xi_m)$ を実数値の成分からなる少なくとも1つは0でない m 次元ベクトルとする。N の全ての点 $(g_1,...,g_m)$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{m}\xi_i g_i \leq \sum_{i=1}^{m}\xi_i c_i$$

が成立する時に ξ を点 $c=(c_1,...,c_m)$ に関して最大（maximal）という。

ベクトルの集合 $\{\xi_i\}(i=1,...,r;r>1)$ は集合 $\{\xi_i\}(i=1,...,r-1)$ が点 $c=(c_1,...,c_m)$ に関して最大で，ξ^r の全ての成分が0にはならず，N の，

$$\sum_{j=1}^{m}\xi_j^i g_j=\sum_{j=1}^{m}\xi_j^i c_j,\ \ i=1,...,r-1$$

を満たす全ての点 $(g_1,...,g_m)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{m}\xi_j^\gamma g_j \leq \sum_{j=1}^{m}\xi_j^\gamma c_j$$

が成立する時に点 $c=(c_1,...,c_m)$ に関して最大(maximal)という。ベクトルの集合 $\{\xi_i\}(i=1,...,r;r>1)$ は，$\{\xi_i\}(i=1,...,r;r>1)$ が点 c に関して最大で，点列 $(\xi^1,...,\xi^r)$ と1次独立且つ $(\xi^1,...,\xi^r,\xi^{r+1})$ が c に関して最大となる $\{\xi^{r+1}\}$ が存在しないならば，点 $c=(c_1,...,c_m)$ に関して完全最大集合（complete maximal set）という。

補題2　[13]　$c=(c_1,...,c_m)$ が N の境界点ならば，正整数 r と点 c に関する完全最大集合 $(\xi^1,...,\xi^r)$ が存在する。■

補題3　[13]　$(\xi^1,...,\xi^r)$ が $c=(c_1,...,c_m)$ に関する最大集合，$\nu(S)=c$ ならば，次の2条件は全ての x（起き得る測度0集合を除いて）で満たされる。

a）$x\in R$ が $\sum_{j=1}^{m}\xi_j^i f_j(x)=0,\ i=1,...,u-1$ および $\sum_{j=1}^{m}\xi_j^u f_j(x)>0,\ u=1,...,r$ を満たすならば，$x\in S$ である。

b）$x\in R$ が $\sum_{j=1}^{m}\xi_j^i f_j(x)=0,\ i=1,...,u-1$ および $\sum_{j=1}^{m}\xi_j^u f_j(x)<0,\ u=1,...,r$ を満たすならば，$x\notin S$ である。■

補題4　[13]　$(\xi^1,...,\xi^r)$ を $c=(c_1,...,c_m)$ に関する完全最大集合，T を $\sum_{j=1}^{m}\xi_j^i g_j=\sum_{j=1}^{m}\xi_j^i c_j$，$i=1,...,r$ を満たす N の全ての点の集合とする。その時，T は有界閉凸集合，c は T の内点である。■

これらの準備の下に次の定理が証明されている。

定理3　[13]　$c=(c_1,...,c_m)$ が N の境界点で，$(\xi^1,...,\xi^r)$ が c に関する完全最大集合ならば，S_0 の要素 S が S_0 の要素になる必要十分条件は，（起き得る測度0の集合上を除外して）m 個の定数 $k_1,...,k_m$ が存在して，

$$\sum_{j=1}^{m}\xi_j^i f_j(x)=0,\ \ i=1,...,r$$

が成立する点集合 R' 上で，全ての点 $x\in R'$ に対して，(1)，(2)が成立することである。■

3．統計的推測理論との関連

20世紀初頭のゴセット（W.S. Gosset（“Student”））の t 分布に関する研究に端を発して，1920年代にフィッシャー（R.A. Fisher）の標本分布論，最尤法，有意性検定，実験計画法等の理論構築[17]の下で，標本分布に依存する精密な推定・検定の方法論が確立された。1930年代には特に1933年のネイマン－ピアソンの基本定理（Neyman-Pearson 's[6] fundamental lemma）[21]を軸として過誤確率を最小化する

最適な有意性検定を目指す統計的仮説検定理論が展開された。統計的検定論はフィッシャー理論を支持する立場（Fisherian）とネイマン－ピアソン理論を支持する立場（Frequentist）に大別され，それに異なる観点から主観確率に基くベイズ理論を支持する立場（Bayesian）の 3 つの学派に分けて考えることができる。

ダンツィークの第 1 の問題の論文[4]は，対立仮説（alternative hypothesis），第 2 種の過誤（error of the second kind），検出力（power）を明示的に用いながら t 検定の最適性を補強した意味で，第 2 の問題の論文[13]はネイマン－ピアソンの基本定理以降に複合仮説の下で最強力検定の条件件を模索する過程の結果の一つに必要性を追加した意味で，ネイマン－ピアソン理論の発展に役立ったといえる。

ネイマン－ピアソン理論は特にベル研のドッジ－ローミック（H.F. Dodge and H.G. Romig）に端を発する抜取調査との親和性があり，少なくとも品質管理（Quality Control）の方法に対する貢献度が高いことで重要である。

4．おわりに

ダンツィークの研究歴を見ると，最も重視される線形計画の定式化や金字塔のシンプレックス法は戦後に留まった空軍時代に為されたものであり，もしも第 2 次世界大戦がなかったならば，おそらく空軍と関係なく，統計学を中心としたかなり異なった研究方向・内容になっていたと思われる。これはバークレー時代の遅刻が原因で本稿で述べた統計学の当時の未解決問題を解決した経緯と同様に興味深い。しかしながら仮に異なった方向になろうが，彼の潜在力通りにやはり重要な成果を上げられていたことは間違いない。

彼は人間的にも優れており，微笑を絶やさず弟子に慕われていて[20]，1990 年代以降ですら研究に多くの時間を割きながら[11]，[12]，弟子や同僚との時間を常に大切にされていたと言われている。

2005 年 5 月 13 日（金）に「線形計画法の父」ダンツィークがパロ・アルトの自宅で糖尿病と心血管系の合併症で静かに息を引き取った。享年 90 歳だった。奇しくも同じく線形計画に対して初めての多項式時間の解法である楕円体法を発見したハチアン（L.G. Khachian）が 4 月 29 日（金）に突然の心臓麻痺で亡くなられてから僅か 2 週間後のことであった。

6）ネイマン（J. Neyman）もピアソン（E.S. Pearson）も近代統計学の礎を築いたカール・ピアソン（Karl Pearson）のロンドン大学に於ける弟子であり，ピアソンは息子である。

参考文献

[1] 赤平昌文（2003），『統計解析入門』，森北出版.

[2] D.J. Albers, G.J. Alexanderson, C. Reid Eds.（1990）*More Mathematical People－Contemporary Conversations*, Boston, Harcourt Brace Jovanovich,（好田訳 [1993],『アメリカの数学者たち』,青土社）.

[3] R.W. Cottle（2006），“George B. Dantzig: a legendanry life in mathematical programming,” *Mathematical Programming*, 105, 1－8.

[4] G.B. Dantzig（1940），“On the non-existence of tests of “Student's” hypothesis having power functions independent of σ”, *The Annals of Mathematical Statistics*, 11, 186－192.

[5] ＿＿＿＿＿（1949），“Programming in a linear structure”, *Econometrica*, 17, 73－74.

[6] ＿＿＿＿＿（1949），“Programming of interdependent activities Ⅱ, mathematical model”, *Econometrica*, 17, 200－211.

[7] ＿＿＿＿＿（1955），“Upper bounds, secondary constraints, and block triangularity in linear programming”, *Econometrica*, 23, 174－183.

[8] ＿＿＿＿＿（1963），*Linear Programming and Extensions*, Princeton, Princeton Univ. Press,（小山訳 [1983],『線形計画法とその応用』，ホルト・

サウンダース・ジャパン).

[9] __________(1991), "Linear programming", in J. K. Lenstra et al. Eds., *History of Mathematical Programming－A Collection of Personal Reminiscences*, Amsterdam, CWI and North-Holland.

[10] G.B. Dantzig and T.L. Saaty (1973), *Compact City*, San Francisco, Freeman.

[11] G.B. Dantzig and M.N. Thapa (1977), *Linear Programming 1: Introduction*, New York, Springer.

[12] __________ and __________(2003), *Linear Programming 2: Theory and Extensions*, New York, Springer.

[13] G.B. Dantzig and A. Wald (1951), "On the fundamental lemma of Neyman and Pearson", *The Annals of Mathematical Statistics*, 22, 87－93.

[14] G.B. Dantzig and P. Wolfe (1949), "Decomposition principle for linear programs", *Operations Research*, 8, 101－111.

[15] __________ and __________(1961), "The decomposition algorithm for linear programming", *Econometrica*, 29, 767－778.

[16] G.B. Dantzig and M. Wood (1949), "Programming of inter-dependent activities Ⅰ, general discussions", *Econometrica*, 17, 193－199.

[17] R.A. Fisher (1922), "On the mathematical foundations of theoretical statistics", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Ser. A 222, 309－368.

[18] W. Leontief (1951), *The Structure of the American Economy*, New York, Oxford Univ. Press.

[19] A. Lyapnov (1940), "Sur les functions-vecteurs complètement additives", *Izvestiya Acad. Nauk SSSR. Ser. Mat*. 4, 465－478.

[20] T.L. Magnanti (2005), "He made powerful ideas seem simple", *OR/MS Today*, August 2005.

[21] J. Neyman and E.S. Pearson (1933), "On the problem of most efficient test of statistical hypothesis", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Ser. A 231, 289－337.

[22] __________ and __________(1936), "Contributions to the theory of testing statistical hypothesis", *Stat. Res. Memoirs*, 1, 1－37.