Title	数学的帰納法について : 数学教育の立場からの考察
Author(s)	山口, 格
Citation	教授学の探究, 5, 105-116
Issue Date	1987-03-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/13544
Type	bulletin (article)
File Information	5_p105-116.pdf

数学的帰納法について——数学教育の立場からの考察

山　口　　　格
（室蘭工業大学）

§1. は じ め に

実数のさまざまな性質を概観するには，実数の公理からスタートするのが近道である。これは実数の基本的な性質を完備な順序体という形に整理して，それを公理として，さまざまな実数の必要な性質を公理から導くのである。この方法は，自然数，整数，有理数と定義して来て，切断または基本列などを用いて実数を構成する立場より簡便なのである。そのような公理的方法の一例として，ディュドネ（J. Dieudonné）の公理をあげておく[1]。

実数の公理

実数体とは，集合 $\mathbf{R}$ でつぎの公理をみたすように

1° $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への 2 つの写像 $(x, y)\to x+y$ および $(x, y)\to xy$ と，

2° $\mathbf{R}$ の要素の間の関係 $x\leq y$（$y\geq x$ とも書く）

の定義されているもののことである；

（Ⅰ） $\mathbf{R}$ は体である。すなわち，

（Ⅰ.1） $x+(y+z)=(x+y)+z$

（Ⅰ.2） $x+y=y+x$

（Ⅰ.3） 任意の $x\in\mathbf{R}$ について，$0+x=x$ となる要素 $0\in\mathbf{R}$ がある。

（Ⅰ.4） 各 $x\in\mathbf{R}$ にたいし，$x+(-x)=0$ となるような，$-x\in\mathbf{R}$ がある。

（Ⅰ.5） $x(yz)=(xy)z$

（Ⅰ.6） $xy=yx$

（Ⅰ.7） 任意の $x\in\mathbf{R}$ について，$1\cdot x=x$ となる，$\mathbf{R}$ の要素 $1\neq 0$ がある。

（Ⅰ.8） $\mathbf{R}$の各 $x\neq 0$ にたいし，$xx^{-1}=1$ となるような，$x^{-1}\in\mathbf{R}$（$1/x$ と書くこともある）がある。

（Ⅰ.9） $x(y+z)=xy+xz$

（Ⅱ） $\mathbf{R}$ は順序体である。すなわち，つぎの公理がなりたつ；

（Ⅱ.1） $x\leq y$ で $y\leq z$ なら $x\leq z$

（Ⅱ.2） “$x\leq y$ and $y\leq x$” は $x=y$ と同値。

（Ⅱ.3） $\mathbf{R}$ の要素 x，y は $x\leq y$ か $y\leq x$ のどちらかである。

（Ⅱ.4） $x\leq y$ なら $x+z\leq y+z$

（Ⅱ.5） $0\leq x$ で $0\leq y$ なら $0\leq xy$

（Ⅲ） $\mathbf{R}$ はアルキメデス順序体である。すなわちつぎのアルキメデスの公理をみたす。

任意の実数 $0<x$ および $0\leq y$ にたいし，$y\leq nx$ となる整数 n が存在する。

（Ⅳ） $\mathbf{R}$ は区間縮小公理をみたす；

閉集合列（$[a_n, b_n]$）が，各 n について $a_n\leq a_{n+1}$，$b_{n+1}\leq b_n$ のとき，この列の共通部分は空で

ない。

このような実数の公理系はヒルベルトに端を発するのであるが[2]，(I)と(II)の部分はどの実数の公理系も変りはない。(III)と(IV)の部分は連続の公理とよばれているものでさまざまな同値の形がある。ところでこのディュドネの公理系には一つの著しい特徴がある。それは(III)と(IV)に整数があらわれることである。従ってディュドネにあっては，整数は実数とは別個に存在する対象と考えられていることがわかる。さらに次のような命題の証明を考えよう。(この命題はディュドネの本で，実数の公理のすぐあとにある命題である。)

命題　Rの任意の有限集合Aは最大要素 b と最小要素 a を持つ。(すなわち，$x \in A$ にたいし $a \leq x \leq b$)。

証明　Aの要素の個数 n についての帰納法を用いる。$n=1$ については明らか。c をAの要素とするとき，$B=A-\{c\}$ とすると，Bは $n-1$ 個の要素を持つので，最小の a' と最大の b' がある。$a' \leq c \leq b'$ なら，a' はAで最小だし，b' はAでも最大となる。$b' \leq c$ なら c がAで最大で a' が最小である。$c \leq a'$ なら c がAで最小で b' が最大である。

この証明では公理の(II. 1)，(II. 3)と数学的帰納法を用いている。数学的帰納法は実数の公理から導かれたものでなく，自然数とともに，実数の公理とは別個のものとして考えられているのである。

数学教育で，実数に関連する問題を扱うとき，実数の公理をよりどころにして問題を論じても，自然数と数学的帰納法は抜け落ちてしまうのである。以上の理由で，数学的帰納法について今回は考察の対象にとり上げた。自然数については別の機会に述べるつもりである。

§ 2. 数学的帰納法における問題点

数学的帰納法は現在の高等学校のカリキュラムでは「基礎解析」の数列の部分で扱われている。例えばある教科書には次のような記述がある。

「一般に，与えられた命題が任意の自然数 n について成り立つかどうかを，自然数の１つ１つについて直接確かめることは，自然数は無数にあるから不可能なことである。

そこで，自然数が1，2，3…と順に並んでいるという性質を利用して，ある命題がすべての自然数 n について成り立つことを確かめる一般的方法について考えよう。」として，例を

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdots Ⓐ$$

にとり

(1)　$n=1$ のとき　Ⓐの左辺＝右辺＝1

(2)　k を自然数とし，$n=k$ のとき，Ⓐが成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにもⒶが成り立つ，(以下略) として，

「上の証明(1)から

　　$n=1$ のときⒶが成り立つ

このことと(2)によって $n=1+1$ のとき，すなわち

　　$n=2$ のときⒶが成り立つ

更にこのことと(2)によって，$n=2+1$ のときすなわち

　　$n=3$ のときⒶが成り立つ

このように順に考えていくと

$n=4$, 5, 6…のときにもⒶが成り立つ,

よって任意の自然数 n についてⒶが成り立つといえる。

このように，自然数 n に関するある命題が与えられていて

[1] その命題が $n=1$ のとき成り立つ

[2] 任意の自然数を k とするとき，その命題が $n=k$ のとき成り立つと仮定すると $n=k+1$ のときにも成り立つ。

という2つのことが証明されるとき

[3] その命題は任意の自然数 n について成り立つ

と結論できる。このような証明の方法を数学的帰納法という。」

このように高等学校の教科書では数学的帰納法は，「ある命題がすべての自然数 n について成り立つことを確かめる一般的方法」または「証明の方法」と述べられている。

このような説明は正しくないとは言えないが，意味がはっきりしないところもある。それは，[1] $n=1$ [2] $n=k \Longrightarrow n=k+1$ ならば [3] すべての自然数について成り立つ，と結論づけられるのは何故かというところがはっきりしていないからである。上記の教科書では「$n=4$, 5, 6…のときにも」とか「自然数が1，2，3，…と順に並んでいるという性質を利用して」という風にこの問題を説明している。すべてはどうやら…の部分にあるようである。このやり方で仮に $n=1$ から始めて，順次すべての場合を確かめることは出来るのか。これは明らかに物理的に不可能でないのか。このような生徒の疑問にどのようにこたえたらよいのであろうか。

§3. 自然数の性質と数学的帰納法

数学的帰納法を証明法として導入したのはパスカル（Pascal 1623－1662）といわれている。1654年頃パスカルは“パスカルの3角形”の証明を行うべく，数学的帰納法を用いたのである[3)]。またベルヌイ（J. Bernoulli）も1686年に数学的帰納法を用いたことが彼の全集第1巻にみられる。フェルマー（P. Fermat）は1630年代にこの方法を多用している。これらの人達は数学的帰納法の発見者と見てよいであろう。

これらの先駆者たちは，“自然数全体”の姿を数学的形式に形づくる推論として数学的帰納法を考えていたのである。

このように数学的帰納法は，はじめは，すべての自然数について成立することがらを証明するための方法として使用されていたのである。数学的帰納法を x についての述語 $P(x)$ に対し

（I） $P(1)$ が成り立つ

（II） 任意の自然数 k に対して $P(k)$ が成り立つことを仮定すれば，$P(k+1)$ が成り立つ

このとき

（＊） “すべての自然数 x に対して，$P(x)$ が成り立つ”

と記述するとき，（I），（II）を示すことが（＊）の証明になるということは，自然数の性質に依存しているからなのである。高等学校では自然数をきちんと教えていないので，このことが明らかに思えたり，そうでなかったりするのである。これはけっして明らかなことでないことが，順序数についての超限帰納法などと対比してみると明らかになるのである。

歴史的には，数学的帰納法は，すべての自然数について成立することがらを証明するための方法として考えられたのであるが，後になって，これは“自然数の全体”という概念を表現す

る性質であることがはっきり認識されるようになった。自然数の公理系として有名な“Peanoの公理系”は1895年に，ペアノによって定式化された[4]。

(1) 0は自然数である

(2) nが自然数のとき，n'も自然数である

(3) n, mが自然数で，$n'=m'$ならば$n=m$である。

(4) $n'=0$となるような自然数nは存在しない。

(5) $A(x)$を自然数xについての述語とする。このとき，

(I) $A(0)$が成り立つ

(II) 任意の自然数kに対して，$A(k)$が成り立つことを仮定すれば$A(k')$が成り立つ。

の二つが証明されれば，すべての自然数nに対して，$A(n)$が成り立つ。

以上の(1)〜(5)によってペアノは自然数を規定したのである。n'はnの次の自然数を表す，つまり$n+1$である。(5)は数学的帰納法であって，“すべての自然数”という概念を規定しているのである。

このようにPeanoの公理系によれば，数学的帰納法とは，まさに自然数の性質そのものなのである。したがって，自然数上の変数xについての述語$P(x)$に対し

すべての自然数nに対して$P(n)$が成り立つ

という命題を証明するには，公理(5)により，数学的帰納法を用いればよいのである。

§4. 自然数の整列性と数学的帰納法

整数論の書物では，自然数全体の集合Nの次の性質を出発点にすることがある。(例えばA. WeilのNumber Theory for Beginnersもそうである。)

命題 1. Nの任意の空でない(有限または無限)部分集合Aはただ一つの最小数を含む。(ここで，lがAの最小数であるとは，$l\in A$であり，任意の$a\in A$に対して$l\leqq a$であることを意味する。)

この命題1を出発点にして整数論の最も基本的な次の定理が導かれる。

定理 1. 任意の整数aと整数$b>0$に対して

$$a=bq+r \qquad 0\leqq r<b$$

となる整数q, rがただ一組存在する。

証明の一部として$a=bq+r$, $0\leqq r<b$となる整数q, rが存在することを$a\geqq 0$の場合について書いてみる。$a\geqq 0$のとき，$(a+1)b>a$であるから，aより大きいmb ($m\in N$)の形の自然数全体の集合$A=\{mb \mid mb>a\geqq 0,\ m\in N\}$は空集合ではない。したがって命題1より，Aは最小数を含み，その最小数は$(q+1)b$, $q+1\in N$, の形に表される。$(q+1)b$はaより大きいmb($m\in N$)の形の整数の中で最小のものであるから$qb\leqq a<(q+1)b$が成り立つ。このとき，$r=a-qb$とおけば，$0\leqq r=a-qb<b$, $a=qb+r$である。

一般にMを全順序集合とするとき，Mの任意の空でない部分集合Sに対して，min Sがいつも存在するならば，Mは整列集合であるという。命題1は自然数全体の集合Nが整列集合であるということを述べている。このNの整列性を用いると，更に次の定理が導かれる。

定理 2. 0と1の間に整数はない。

証明　もし$0<c<1$なる整数cが存在したとすると，そのような整数の集合Cには最小数mが存在する。$0<m<1$。この式の両辺にmを乗じて$0<m^2<m$。故に$m^2 \in C$でCの最小数mより小である。これは矛盾である。

自然数全体の集合の整列性を述べた命題1から，数学的帰納法の原理が導かれる。

命題 2.（数学的帰納法），各自然数nに対して命題$F(n)$ $(n \in N)$があって，(i)$F(1)$が成立する。(ii)$F(n)$が成立すれば$F(n+1)$も成立する，ならば，すべての自然数nに対して$F(n)$が成立する。

命題1を仮定して命題2を導いてみよう。実際$A=\{n \in N \mid F(n)$ が成立しない$\}$とする。$A \neq \phi$ならばAは最小数lを含む。$l=1$なら(i)に矛盾する。$l>1$ならば，$l-1 \notin A$，$l \in A$，すなわち$F(l-1)$が成り立つのに，$F(l)$が成り立たない。これは(ii)に矛盾する。したがって$A=\phi$でなければならない。これはすべての$n \in N$に対して$F(n)$が成立することに他ならない。

実は命題1と命題2は同値なのである。すなわち数学的帰納法と自然数の整列性は同値である。

§ 5. 実数の公理系と自然数

さてここで，もう一度§ 1で述べたディュドネによる実数の公理と自然数の関係について考察してみよう。ディュドネの公理は前提として自然数及び数学的帰納法を別途に予備知識として必要として記述されている。このことはディュドネの本の序文に次のように述べられている[5)]。

「厳密に論理的な観点だけからは，つぎの2つの例外を除いては，いかなる予備知識も必要としないように書かれている；

1. 数理論理の初歩，数学的帰納法，整数（正および負）の基本性質。
2. 初等線型代数（体の上の)。

証明の叙述にあたっては，さきの2つの例外を除き，厳密に公理および本文中で証明のすんだ定理だけに依拠する。」

しかしディュドネの公理が実数の公理という以上，実数体$\mathbf{R}$(§ 1での)は当然，自然数，整数，有理数等を内包しているはずである。それは次のようにしてわかる。

公理(I.7)より乗法の単位元1が存在する。順序の公理から，任意の実数$x \neq 0$について，$x^2>0$はすぐ出せるので，$1=1^2>0$であり，さらに，$x_1, \cdots, x_n>0$なら，$x_1+\cdots+x_n>0$を導いておけば，$1+1+\cdots+1=n \cdot 1>0$である。これから$n \mapsto n \cdot 1$（1をn回加えたもの）は自然数全体の集合から$\mathbf{R}$への単射で順序関係と加法と乗法を保存する。この写像によって，自然数と実数の一部とを同一視する。ついでrとsを自然数(同一視された実数の一部の)とし，$s \neq 0$で$\pm r/s$という形の実数を有理数ということにする。$s=1$のときの有理数を整数ということにする。以上のような手続きで，ディュドネの実数の中に自然数と有理数，整数等が内包されていることがわかる。

上の論述で $n \mapsto n \cdot 1$（1を n 回加えたもの）を考えるときの自然数 n はディユドネの公理の外にある自然数の概念である。

§6. 自然数の定義について

前節で見たように，実数の公理はより根源的なものとして自然数の概念を前提としている。それではこの自然数の概念はどのように定義されるのであろうか。自然数を公理的に扱うには大きく分けて2つの方法がある。第1は自然数に関する公理――ペアノの公理――をもとにする方法である。第2は集合に関する公理から，まず集合論を展開して，その中で自然数論を組み立てる方法である。

ここではまず第2の方法の概要を述べる。この方法は公理的な集合論を基礎にしているので記述がたいへんである。そこでここでは直観的に見た筋書だけを述べるにとどめる。まず

ϕ を0と書く，

$\{\phi\}$ を1と書く，

$\{\phi, \{\phi\}\}$ を2と書く，

次いで a を集合とするとき

$a \cup \{a\}$

を a' と書く，そうすると

$0'=1$

$1'=2$

これを延長して

$2'$ を3と書く

$3'$ を4と書く

$4'$ を5と書く

ここで以下同様とやるわけにはいかない。以下同様ということばは，同様の操作を限りなく続けることであるとすると，操作はいつまでも続き，自然数全体はいつまでもでき上がらない。また以下同様というのは全体を見とおしての1つの操作を表現しているのだとしたら，われわれはまだ自然数全体の定義ができていないのだから，全体を見通すなどということもできない。そこで，無限公理を集合の公理系に追加して考えるのである。無限公理を集合論の記号を使わないで，直観的に述べるのは好ましくないので，ここではこれ以上説明できなくなる。§7で述べるブルバキの方法はやはり上のものと同様に「ϕ を0と書く」ことにはかわりはないが，二つの集合の間に1対1対応を先に考えて，1対1対応（双射）のつく集合をひとまとめに同値類として，それに濃度を与えている。ϕ に対等な集合の濃度を0，$\{\phi\}$ と対等な集合の濃度を1とするわけである。この方法は小学校で用いられている自然数のタイルを用いた導入に近いようである。

自然数の定義のもう一つの方法を次に述べる。イタリアの数学者ペアノ（1858－1932）が「数の概念について（1891年）」という論文で，自然数の公理として次の5つの命題を挙げた。

Ⅰ．1という対象があり，Nは1を元としてもつ集合である：$1 \in \mathrm{N}$

Ⅱ．Nからそれ自身への写像 φ：$\mathrm{N} \to \mathrm{N}$ がある。

Ⅲ．φ は単射（injection）である

Ⅳ．$1 \notin \varphi(\mathrm{N})$

V．Nの部分集合Aが，次の2つの条件 (a)，(b) を満足すれば，A=Nとなる。

(a)　$1\in A$，(b)　$\varphi(A)\subset A$。

この5つの命題はペアノの公理とよばれている。この公理はNという集合のいくつかの性質をのべていて，自然数という語はあらわれない。そこでNの元のことを自然数というと定義しよう。まずIから1は自然数であることがわかる。IIから $\varphi(1)$ は自然数である。そこで $\varphi(1)=2$ と定義しよう。そうすれば2は自然数である。同様に $\varphi(2)=3$，$\varphi(3)=4$，…と定義すれば，「1，2，3，4，…は自然数である」ということになる。このように順次続けていけば自然数の全体が得られることを，公理Vが示しているのである。それは，Vの (a) によって，Nの部分集合Aが1を含む，(b) によって，Aがある元 x を含めば，Aは $\varphi(x)$ をも含むということであれば，そのときA=Nとならなければならない，ということからわかる。

この公理Vは「数学的帰納法」である。公理VにあるNの部分集合Aは，Nの元 x のうち（x に関する）条件 $P(x)$ を満足するものの全体の集合と考えられる。即ち $A=\{x\in N; P(x)\}$，このとき (a)，(b) という条件は，それぞれ

(a') $P(1)$　　(b') $P(x)\Rightarrow P(\varphi(x))$

と書かれる。(a) が (a') と書かれることは明らかであろう。(b) は $\varphi(A)\subset A$ であるがこれは

$$x\in A\Rightarrow\varphi(x)\in A$$

と同等である。他方 $x\in A\Longleftrightarrow P(x)$ であるから (b) と (b') が同等になる。公理Vは「(a)，$(b)\Rightarrow A=N$」ということであった。これは

$$(a'),\ (b')\Rightarrow(\forall n)\ P(n)$$

と表わされる。すなわち (a')，(b') が成り立てば，すべての自然数 n について $P(n)$ が成り立つ，ということである。これを定理として書き換えると次のようになる。

定理　自然数 n に関する命題 $P(n)$ がすべての自然数 n に対して成り立つことを証明するには，次の2つのことを示せばよい。

(a')　$P(1)$（すなわち，$P(n)$ が $n=1$ に対して成り立つこと）

(b')　$P(x)\Rightarrow P(\varphi(x))$，（すなわち，$P(n)$ が $n=x$ に対して成り立てば，$P(n)$ は（x の直後の）元 $\varphi(x)$ に対しても成り立つこと）。

この定理は数学的帰納法そのものである。

§7．高等学校で数学的帰納法をどう扱うか

以上の検討をふまえて，高等学校における数学的帰納法の扱い方を考えてみよう。第一に，自然数をきちんと定義して，数学的帰納法は自然数の定義そのものであることを教えるべきである。現在の高等学校の数学教育では，自然数の定義がはっきりしていないので，数学的帰納法はまるで砂上の楼閣のように，不安定なものになっている。自然数の導入の方法をおさらいしてみよう。小学校ではタイルを用いて集合の担っている分離量を1対1対応を仲だちにして抽象し，自然数の導入としている。以前は数え主義といって，順序をアプリオリに与えて，唱えさせることで自然数を教える方法もとられていた。いずれにせよこの2つの方法は初等教育

における定義法あるいは導入法で，数学的に確定したものではない。したがって，高等学校では，別にきちんとした形で定義をしなおす必要があろう。その際ある程度の公理的整理は必要と考えられる。完全な公理的記述から自然数の全性質を導くという，公理的方法ではなく，例えば命題1のような性質をきちんとおさえておくことが必要である。§6に述べたように自然数の定義の方法は大きく分けて2つある。(1)ペアノの公理による，(2)公理的集合論の立場から集合論を展開してその中で自然数を組み立てる，の2つであるが，ペアノの公理による方法は初等教育に於ける数え主義に，集合論的方法はタイルによる自然数の導入に対応した性格をもっているように思われる。（このことについては稿を改め論ずるつもりである。）高等学校で公理的集合論を展開するのはなじまないので，ペアノの公理の方が記述がやさしく扱いやすい。しかし私は，はじめに述べたように命題1のような性質を公理的に扱ってすませる方法が良いと考えている。

§8. 数学的帰納法の例題1

この節では，数学的帰納法が有用となる場面を例に挙げて展開してみる[6]。公式

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

は知っているものとする。われわれが知りたいのは次の式の和を求める公式である。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

この二つの和の間の関係を考えて観察してみよう。

n	$=1$	2	3	4	5	6…
$1+2+\cdots+n$	$=1$	3	6	10	15	21…
$1^2+2^2+\cdots+n^2$	$=1$	5	14	30	55	91…

比を考えてみよう。

n	$=1$	2	3	4	5	6…
$\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}$	$=1$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}\cdots$

上の比の値を

$$\frac{3}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{3},\ \frac{11}{3},\ \frac{13}{3}$$

と書いてみると規則性に気がつく。

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}=\frac{2n+1}{3}$$

と推測してみたくなる。左辺の分母の値を知っているからそれを使って

$$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1}$$

という推測に到達する。「この推測は正しいか」，たしかに $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ の場合は正しい。しかし $n=7, 8\cdots$ とテストを繰り返すのは気が進まない。どうしたら推測をもっと能率的にテストできるだろうか？

もし推測がほんとうに正しければそれはつぎの場合にも成り立つはずだ：

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \tag{2}$$

ここに推測を能率的にチェックする機会が生まれる。(2)の式から(1)の式を引くと

$$(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を得る。右辺を計算してみる。

$$\begin{aligned}
&\frac{n+1}{6}\{(n+2)(2n+3)-n(2n+1)\}\\
&=\frac{n+1}{6}\{2n^2+3n+4n+6-2n^2-n\}\\
&=\frac{n+1}{6}(6n+6)\\
&=(n+1)^2
\end{aligned}$$

推測は厳しいテストを通過した。

以上のことは公式(1)を導く帰納法思考である。しかしこの帰納的思考の観点を少し転換してやると，推測を証明することができる。

たぶん

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

は真だろう。まちがいなく

$$(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

は真である。上の二式を加えると

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

を得る。この式はもし推測がある整数 n に対し真であるなら，つぎの整数 $n+1$ に対しても必然的に真であることを意味する。

このようにして数学的帰納法を登場させることができる。上の例は Polya の本からとった。Polya はいささか哲学的に論じているのを数学面にかぎって書き換えたのである。ところで数学的帰納法という名前はちょっと困った命名である。

推論を大きく演繹 (deduction) と帰納 (induction) に分けて考えよう。演繹とは普遍的な命題から特殊な命題を導きだす推論である。逆に，いくつかの特殊な命題から普遍的な命題を導きだす推論は帰納と呼ばれる。帰納的推論には対象のすべてをチェックして，それによって帰納を行なう完全帰納法と，その一部分のみをチェックすることによって全体を推論する場合とに分けることができる。前者は，全体をチェックし，それによってある性質を導くのであるから，一種の演繹と考えてもよい。

したがって一般に，帰納という名前は，後者，つまり蓋然的推論を与えるものとして用いられるのが普通である。たとえば，物理学などの自然科学における推論の多くは帰納論理といってよいであろう。

しかしながら，数学的帰納法と呼ばれる推論は蓋然的推論を与えるものではない。数学的帰

納法は一種の演繹である。したがって，数学的帰納法という名前は，証明の手続きに対するものとしては非常に不適切であろう。

ところが上の例でみたように，帰納的推論を完全にするための「帰納に対する数学的補足」という意味で数学的帰納法を考えれば，この用語は結局適切といっていいのである。つまり，数学的帰納はしばしば帰納的研究の最終的段階でおこるということである。Polya はそのことを力説しているのである。

§9. 数学的帰納法の例題2

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}$$

をもっと簡単な式に表わしたい。この和の $n=1$，2，3，4 を計算してみると

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},$$

となる，そこで推測は次のようになる。

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

そこで前節でやったようなテストをやってみよう。

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2n+3}$$

ひき算をすると

$$\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}$$

が得られる。この等号が成立することは左辺を

$$\frac{1}{4n^2+8n+3}$$

と計算し，右辺を

$$\frac{(n+1)(2n+1)-n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{2n^2+3n+1-2n^2-3n}{4n^2+8n+3}$$
$$=\frac{1}{4n^2+8n+3}$$

と計算したらわかる。そこで前節のように観点を転換してみよう。

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

と

$$\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}$$

より

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2n+3}$$

を得る。n のとき真であると仮説された式は $n+1$ のときもなりたつことがわかった。$n=1$ のときそれは真だから，それはすべての自然数について真である。

帰納的推測が考えられたら，数学的帰納法を用いて証明することを，テストなしにやってみよう。

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}\\
&=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+2)^2-1}\\
&=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}\\
&=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}\\
&=\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}\\
&=\frac{n+1}{2n+3}
\end{aligned}$$

こうしてわれわれは，n に対して想像した関係を $n+1$ に対して導くことに成功した。このやり方は，前のテストから導いたやり方にくらべて，簡単ではあるが，幾分不自然であろう。ところで今の場合

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

と部分分数に分解して，$n=1,\ 2,\ \cdots n$ とおいて加えれば，次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]\\
&=\frac{n}{2n+1}
\end{aligned}$$

このようなことは，めずらしいことではない。数学的帰納法によって証明された定理は，他の方法によってもっと簡単に証明されることがしばしばある。数学的帰納法による証明の注意深い検査は，そのような近道に導かれるもとになることがある。

〈注〉

1) J. Dieudonné. Foundations of Modern Analysis. 1969.（邦訳あり）

2) D. Hilbert. Über den Zahlbegriff. Jber. dtsch. Math-Ver. Bd. 8, (1900) S. 180-184

3) パスカル全集　I　人文書院　735 頁。数 3 角形論

4) ペアノ　数の概念について　共立出版　ペアノの場合自然数は 1 から始まるが，本稿では 0 を入れたり，入れなかったりその時々で変っているが深い理由はない。

5) J. Dieudonné. 上記の本

6) G. Polya. Induction and analogy in mathematics. (1953) この本（邦訳あり）から例をとった。

参 考 文 献

以上の注の他に，次の本を参考にした。

(1) 広瀬健，数学的帰納法。教育出版，1975 年。
(2) ブルバキ，数学原論，集合論，第 3 章（訳書)。東京図書。
(3) 藤崎源二郎，森田康夫，山本芳彦，数論への出発。日本評論社，1979 年。
(4) 島内剛一，数学の基礎。日本評論社，1971 年。
(5) 弥永昌吉，数の体系（上)。岩波新書。