Title	三角関数の研究
Author(s)	山口, 格
Citation	教授学の探究, 7, 1-23
Issue Date	1989-03-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/13556
Type	bulletin (article)
File Information	7_p1-23.pdf

三　角　関　数　の　研　究

山　口　　格
（室蘭工業大学）

§1. はじめに

高等学校の数学教育が論理的厳密さという点で問題が多いことは以前からよく指摘されていた[1]。実際高等学校では多くの基本概念が直観的に与えられ，厳密な証明などもほとんど問題にされないから，命題と命題の論理的なつながりもはっきりせず，本当にむずかしい問題点が隠されてしまっていることがしばしばある[2]。たとえば微分積分学は，その基本的結果は実数の公理系から論証によってすべて導かれるのであるが，初等関数の定義や性質なども，きちんとやるのはなかなかむづかしい。

ここでは三角関数を例にとって現在の高等学校数学教育に見られる論理的な難点を洗い出してみることからはじめた。そしてやがては「現代数学の学問の内容を正確に反映した教育内容を授業過程を含めて客観的な対象とすることが可能である」[3] という仮説的命題の検討に至る道を模索することに目的をおいてその基礎となるべきことがらを調べてみた。それにはまず現代数学で三角関数がどのように扱われているのかを概観することが必要である。そして三角関数の源となる自然や社会に存在する諸量や，それらの間の関係，運動との関りについても知る必要がある。さらに三角関数に付随する重要な概念として，角の測度および数 π についてなども調べる必要がある。以上の諸論点をまとめたのが本稿である[4]。

§2. 三角関数の微分法について一現行の高等学校教科書にみる

高等学校の「微分・積分」の教科書で三角関数の微分法はたとえば次のようになっている[5]。

「三角関数の導関数を求めるとき基礎となるのは，Ⅰ章33ページで学んだ極限の式

$$\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}=1 \qquad ①$$

と，「基礎解析」で学んだ加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad ②$$

である。　この①，②を用いると

$$(\sin x)'=\cos x$$

であることが，次のようにして導かれる。

導関数の定義の式から

$$(\sin x)'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

上の②によって

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}$$

よって

$$(\sin x)'=\sin x\cdot\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}$$

ここで $\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}$ は次のようにして求められる。

$$\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}$$

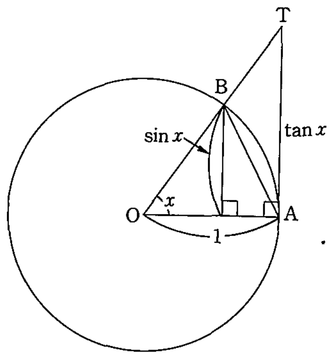
$$=-\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{\cos h+1}=0$$

ゆえに

$$(\sin x)'=\cos x」$$

ここで重要な役目を演じたのは①の式である。この式についてはこの教科書では次のようになっている。

「$0<x<\frac{\pi}{2}$ とし，半径1の円Oの周上に $\angle AOB=x$ となる2点A, Bをとる。Aにおける接線と半直線OBとの交点をTとして，△OAB, △OAT, 扇形OABの面積を計算すると



$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sin x$$

$$\triangle OAT=\frac{1}{2}\tan x$$

また，扇形の面積 $=\frac{1}{2}\times(\text{半径})^2\times(\text{中心角})$ であるから

$$扇形\ \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x=\frac{1}{2}x$$

そして$\triangle\mathrm{OAB}<$扇形$\mathrm{OAB}<\triangle\mathrm{OAT}$であるから

$$\sin x<x<\tan x$$

各辺を$\sin x$で割って逆数をとると，$\sin x>0$より

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

$\lim_{x\to+0}\cos x=1$であるから

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad ①$$

$x<0$の場合には，$x=-z$とおくと$z>0$であるから，

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{z\to+0}\frac{\sin(-z)}{-z}=\lim_{z\to+0}\frac{\sin z}{z}=1 \qquad ②$$

①と②を合わせて，次の式が得られる。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$」

ここで重要な役目をもっているのは

$\triangle\mathrm{OAB}<$扇形$\mathrm{OAB}<\triangle\mathrm{OAT}$

という不等式である。この不等式は三角形と扇形の面積に関するものである。この教科書ではていねいに，扇形の面積$=\frac{1}{2}\times$(半径)$^2\times$(中心角)であるからと記述されているが，何故扇形の面積が上式で表わされるかは書かれていない。これはおそらく，円の面積をπr^2（rは半径）として，(円の面積)：(扇形の面積)$=2\pi : x$と比例式を作って

$$\frac{\pi r^2}{扇形の面積}=\frac{2\pi}{x}$$

より

$$扇形の面積=\frac{x}{2\pi}\times\pi r^2$$
$$=\frac{1}{2}\times r^2\times x$$

としたのであろう。

ここで半径rの円の面積がπr^2になることは小学校で学んだから既知としているのである。今原点を中心とする半径rの円の面積を求めると次の様になる。円の方程式を$x^2+y^2=r^2$と表すと，$y^2=r^2-x^2$　　$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$の＋の枝を取って積分

$$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

を計算する。これは円の第一象限にある部分の面積（4半円の面積）である。

$x=r\cos t$と変数を変換すると

$$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}\,(-r\sin t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin t\cdot r\sin t\ dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin^2 t\ \ dt$$

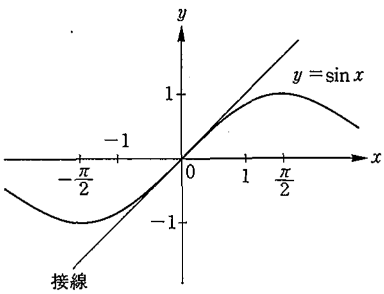
$$=\frac{\pi}{4}r^2$$

4 半円の面積が $\frac{\pi}{4}r^2$ であることがわかったので，円の面積はそれの 4 倍すなわち πr^2 であることがわかる。

ところがこの計算は三角関数の微分積分法を用いるものであるから，円の面積の公式は小学校で学んで既知としているという立場はあやしいものになる。そこのところを生徒が気付かないようにさらっと書くのが教科書づくりのこつなのであろうか。現行の高等学校の数学教科書を調べてみると今みてきたように，そのほとんどは，三角関数の微分法 $(\sin x)'=\cos x$ を出すのに，その証明の本質的な部分として

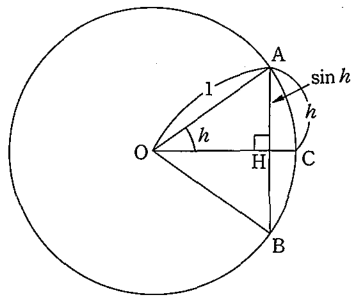
$$(*)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

を用いている。この (*) を証明するには三角関数の微分積分法が必要となるのであるから，これは循環論法におちいっているのである。



§ 3．円弧を用いた教科書について

今回調べた教科書出版社 11 社の中で扇形の面積を用いているのは次の 9 社である。数研出版，学校図書，池田書店，学習研究社，大日本図書，旺文社，第一学習社，啓林館，東京書籍。ただ 2 社実教出版，三省堂は円弧の長さを用いている。実教出版その部分を抜き書きしよう[6]。



「正弦関数 $f(x)=\sin x$ の $x=0$ における微分係数

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-\sin 0}{h-0}$$

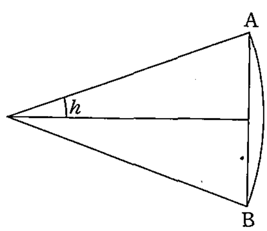
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \qquad ①$$

を考えよう。この値は，原点におけるグラフの傾きであって，上図のグラフで実測すれば，ほぼ 1 に等しいことがわかる。

上の値①が，実はちょうど 1 に等しいことを確かめよう。なお

$$\frac{\sin(-h)}{-h}=\frac{\sin h}{h}$$

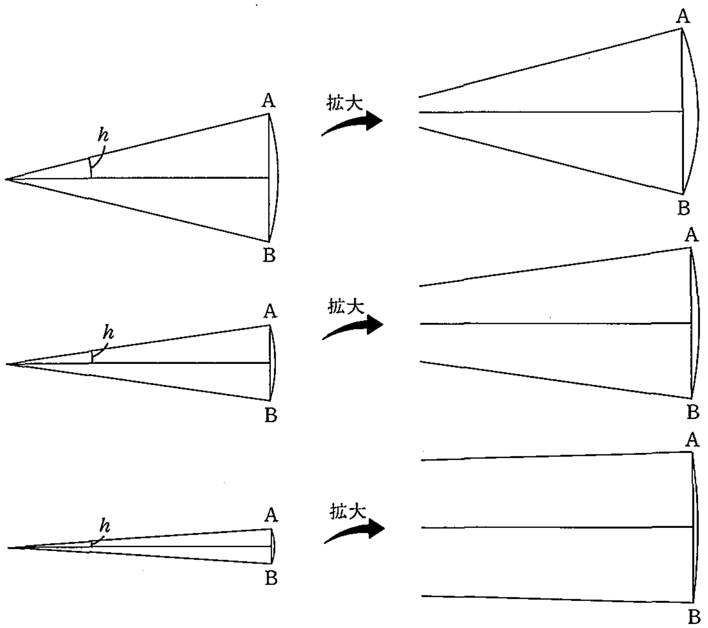
であるから，$h>0$ としてよい。



右図に示された半径 1 の円において，h ラジアンの中心角に対する弧 AC の長さ $\overset{\frown}{AC}$ は h であり

$$\frac{\sin h}{h}=\frac{|\mathrm{AH}|}{\overset{\frown}{\mathrm{AC}}}=\frac{|\mathrm{AB}|}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}$$

h を次第に 0 に近づけてみよう。そのとき，弧 AB と弦 AB はともに短くなっていくが，$|\mathrm{AB}|$ が一定であるように拡大して眺めると，弧 AB が次第に弦 AB にぴったり寄り添っていき，長さの比 $\frac{|\mathrm{AB}|}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}$ は限りなく 1 に近づいていくことがわかる。



h	$\frac{\sin h}{h}$
1.00	0.84147
0.50	0.95885
0.40	0.97355
0.30	0.98507
0.20	0.99335
0.10	0.99833
0.05	0.99958
0.04	0.99973
0.03	0.99985
0.02	0.99993
0.01	0.99998
……	……….

したがって，h が限りなく 0 に近づくとき，$\frac{\sin h}{h}$ は限りなく 1 に近づく。

右の表は，そのようすを数値で示したものである。」

前節に引用した東京書籍の教科書は証明しようとしているのに対し，この実教出版の教科書では，証明しようとはしていない。説明しようとしているのである。実教出版の著者達は証明することを避けて，説明することですまそうとしたのであろうか。問題となっている

$$(*)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

の式は，実教出版の教科書にあるように，幾何学的には，孤の長さが 0 に近づくとき円弧と弦の長さの比が 1 に近づくことを意味する。このことは直観的に明らかなように見えるが「円弧の長さ」がどのようにして定義されるのかをはっきりさせなければ，数学的な証明とは言い難い。また円弧の長さを例えば積分で定義したとしても，その積分を計算するのに (*) を用いなければならぬのでは循環論法になってしまう。

§ 4. 弧長の数学的定義

上に述べた円弧の長さを定義する方法を考えてみよう。円弧だけでなく一般に曲線の長さを考えよう。簡単のために $y=f(x)(a\leqq x\leqq b)$ のグラフで示される曲線Cを考える。ここで $f(x)$ は連続であるとする。$[a,\ b]$ を有限個の分点で分け，それを

$$\varDelta : a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

とする。この分割に応じてきまるところの，曲線Cに内接する折線 $C_\varDelta$ の長さを $L_\varDelta$ とする。すなわち

$$L_\varDelta=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

とする。あらゆる分割 $\varDelta$ に応じてきまる $L_\varDelta$ の集合Eは一般には有界集合ではないが，もしEが有界集合であれば，実数の連続の公理によって上限が存在する。その上限をもって曲線Cの長さと定義する(7)。

$$L=\sup_{\varDelta} L_\varDelta$$

と書こう。

次に曲線Cの長さLを計算する方法を述べよう。$f(x)$ は $f'(x)$ とともに連続であるとする。$[a,\ b]$ の分割 $\varDelta : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ に対応する内接折線の長さは，

$$L_\varDelta=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

であるが，これに平均値の定理を用いて

$$\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i) \qquad x_{i-1}<\xi_i<x_i$$

より，

$$L_\varDelta=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'(\xi_i)^2}(x_i-x_{i-1})$$

となる。

ここで積分の定義をおもい出してみよう。$f(x)$ を $[a,\ b]$ で定義された連続関数とする。ある数Iが存在して，つぎのことがなりたつ：任意の $\varepsilon(>0)$ に対して，$\delta(>0)$ がとれて，

$$\varDelta : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

の最大幅 $h(\varDelta)=\max(x_i-x_{i-1})$ が δ 以下でありさえすれば，$\xi_i\in[x_{i-1},\ x_i]$ のえらび方のいかんにかかわらず

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-I\right|<\varepsilon$$

がなりたつ。このIを

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

とかき，$f(x)$ の $[a,\ b]$ における定積分とよんだ。

そこで上の $L_\varDelta$ の表現式と，積分の定義から，任意の $\varepsilon(>0)$ に対して，δ があって $h(\varDelta)<\delta$ であれば

$$\left|L_\varDelta-\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\right|<\varepsilon$$

がなりたつ，

われわれは

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

を証明してみよう。そのためには

$$L_\Delta\leqq\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

という不等式が成り立つことを云えばよい。

そのために Minkowski(ミンコフスキー)の不等式の特別の場合である次の不等式を用いる[8]。

$$\sqrt{\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2+\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2}\leqq\int_a^b\sqrt{f(x)^2+g(x)^2}\,dx \tag{1}$$

(1)で $f(x)\equiv1,\ g(x)=|f'(x)|$ とおくと,

$$\left\{(b-a)^2+\left(\int_a^b|f'(x)|\,dx\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqq\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

をえるが, $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx$ より,

$$|f(b)-f(a)|\leqq\int_a^b|f'(x)|\,dx$$

だから

$$\sqrt{(b-a)^2+(f(b)-f(a))^2}\leqq\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

をえる。この不等式を L_Δ にあらわれる各項に適用し,

$$\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}\leqq\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

をえるが, i について 1, 2, …, n の和をとると

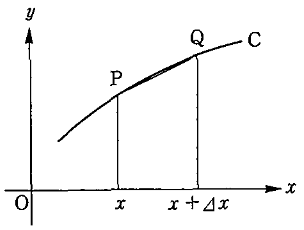
$$L_\Delta\leqq\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

がえられる。

今と同じ条件のもとで，今度は P を曲線 C の一点とする。その座標を$(x,\ f(x))$とし，Q を P に近い点とし，その座標を$(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$とする。弧 PQ の長さを ΔS, 弦 PQ の長さを Δl とする。(右図参照) そのとき

定理 1

$$\lim_{\Delta l\to0}\frac{\Delta S}{\Delta l}=\lim_{Q\to P}\frac{\widehat{PQ}}{\overline{PQ}}=1 \tag{2}$$



がなりたつ。

証明　平均値の定理により

$$\Delta l=\sqrt{(\Delta x)^2+(f(x+\Delta x)-f(x))^2}$$
$$=\sqrt{1+f'(x+\theta\Delta x)^2}\,\Delta x\quad(0<\theta<1)$$

弧長を積分で表して

$$\lim_{\Delta l\to0}\frac{\Delta S}{\Delta l}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+f'(\xi)^2}\,d\xi$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{1+f'(x+\theta\Delta x)^2}}$$
$$=1$$

(証明おわり)

小学校から高等学校までの数学教育で π の正確な定義はどこでも与えられていない。我々は弧長の定義を与えたのであるから，次のように定義できる。円周率 π は単位円の半円周の長さとして定義される。単位円の半円周は，$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$であるから，$f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ であり，$1+f'(x)^2=\dfrac{1}{1-x^2}$ であるから，

$$\frac{\pi}{2}=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

をえる。もちろん

$$\pi=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

としても良いのであるが，この積分の中にあらわれる関数は $x=-1, +1$ の近くでいくらでも大きくなるから，積分の定義を拡張して考える必要がある。

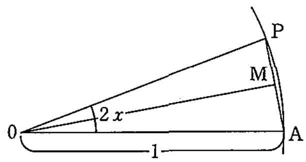
定理 1 を用いれば，次のことは容易に示される。

定理 2　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ただし x は弧度法で測られたものである。

証明　図において，単位円の弧，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=2x(x>0)$とする。$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{AM}}=2\sin x$ である。定理 1 より

$$\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=1$$



であるから，x が正で 0 に近づいたとき，うえの式が示された。

$x<0$ のときには

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(-x)}{-x}\quad(-x>0)$$

によりうえの場合に帰着される。(証明おわり)

§ 5. 定積分による三角関数の定義

一般角に対する三角関数の定義を思い出してみよう。$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ は原点を中心とする単位円周上において，x の正の軸から測って正の向きに θ ラジアン回転した位置における点の $(x,\ y)$ 座標である。すなわち点 $(1,\ 0)$ から単位円周にそって正の向きに測って弧長 θ に対応する点の $(x,\ y)$ 座標である。

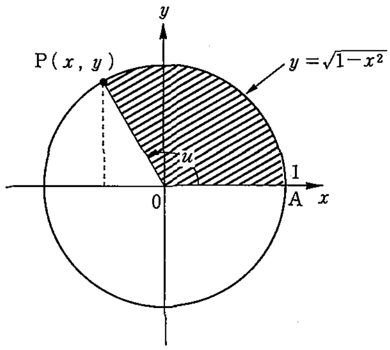
円弧の中心においてなす角 θ は弧の長さに比例する。長さが平面の回転に対して不変量であることが基礎となってこのことが云える。弧度法でラジアンを単位とするのは，その比例定数を 1 にとることで，このときには，弧の長さそのものを角としてよい。

こうしてみると，三角関数の定義には，弧長ないし曲線の長さの概念が正しく把握されていることが必要である。

しかし § 2 で引用した高等学校の教科書は三角関数の定義の際に弧長の概念（ラジアン）を使

用しながら，三角関数の微分法の導入においては，円の面積（扇形の面積）の概念を使用している。これでは不透明な部分が重なりすぎて，何もわからなくなってしまう。面積の概念を用いるのであれば，角の測度として面積を用いることもできる。その理由を述べておこう。

単位円で中心角が定まった時に対応する扇形の面積の２倍を，その角のラジアンを単位として測った大きさと定義することにする。扇形の面積は，定積分を用いて，精確に定義できることを前提として考えると[9]，角の大きさも定積分で表わされる。すなわち，単位円周の上半分は$y=\sqrt{1-x^2}$ のグラフとして表わされるから，$y\geqq 0$ の時，円周上の点 $\mathrm{P}=(x,\ y)$ によって定められる半径と，x 軸の正方向との間の角 u は(x 軸の正方向から左回りに測った時)，



$$u=2\times(\text{扇形 OAP の面積})$$
$$=2\int_x^1\sqrt{1-t^2}\,dt+x\sqrt{1-x^2} \qquad (3)$$

で与えられる。

関数$\sqrt{1-t^2}$ は区間 $[-1,\ 1]$ 上で連続であるから，任意の $x\in[-1,\ 1]$ に対して，区間 $[x,\ 1]$ 上で可積分であり

$$f(x)=2\int_x^1\sqrt{1-t^2}\,dt+x\sqrt{1-x^2} \qquad (4)$$

は，区間 $[-1,\ 1]$ を定義域にもつ関数となるが，微分積分学の基本定理を用いれば，任意の $x\in(-1,\ 1)$ に対して，

$$f'(x)=-2\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}<0$$

が成り立ち，かつ

$$f(x)-f(-1)=\int_{-1}^x f'(t)\,dt,\ \forall x\in(-1,\ 1)$$

が成立するから，$-1<x_1<x_2<1$ ならば，

$$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)-f(-1)-(f(x_1)-f(-1))$$
$$=\int_{-1}^{x_2}f'(t)\,dt-\int_{-1}^{x_1}f'(t)\,dt$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}f'(t)\,dt<0$$

となって，f は，区間 $[-1,\ 1]$ 上で狭義単調減少である。微分可能であるから，f はもちろん連続である。従って，f の値域 $[f(1),\ f(-1)]=[0,\ \pi]$ を定義域とする逆関数 $g(x)=f^{-1}(x)$ が存在して，g も狭義単調減少，連続であり，かつ逆関数の微分公式によって，

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}=-\sqrt{1-x^2},\quad \forall x\in(-1,\ 1) \qquad (5)$$

が成立する。(3)によれば $u=f(x)$ であるが，逆関数の定義から $x=g(u)$ が成り立つ。一方 $x=\cos u$ でもあるから，$g(u)=\cos u,\ \forall u\in[0,\ \pi]$ が成り立ち，余弦関数 cosine が区間 $[0,\ \pi]$ 上

で(4)で与えられた関数 f の逆関数として表現されうることが示された。また，$y=\sqrt{1-x^2}$ であるから，(5)は $g'(u)=-y=-\sin u$，すなわち，$\frac{d}{du}\cos u=-\sin u$，$\forall u\in(0,\ \pi)$ が成り立つことを示している。

以上のことを念頭において，あらためて，逆余弦関数 $\mathrm{Arccos}\,x$ を次のように定義する。

$$\mathrm{Arccos}\,x=2\int_x^1\sqrt{1-t^2}\,dt+x\sqrt{1-x^2},\ -1\leqq x\leqq 1 \tag{6}$$

次に，$\mathrm{Arccos}\,x$ の逆関数 $g(x)$ およびその導関数 $g'(x)$ を用いて，余弦関数$\cos x$，正弦関数$\sin x$ を

$$\begin{aligned}
&\cos x=g(x),\quad x\in[0,\ \pi],\\
&\sin x=-g'(x),\quad \sin 0=\sin\pi=0 \qquad (7)\\
&\cos(x\pm\pi)=-\cos x \qquad \sin(x\pm\pi)=-\sin x\\
&\cos(x\pm 2n\pi)=\cos x\ \ (n=\pm1,\pm2,\ \cdots)\\
&\sin(x+2n\pi)=\sin x\ \ (n=\pm1,\pm2,\ \cdots)
\end{aligned}$$

で定義すれば，R 全体を定義域にもち，2π の周期をもった関数$\sin x$，$\cos x$ の幾何学的直観によらない解析的な定義が与えられたことになる。

§ 6. 微分方程式による三角関数の定義

直観にたよらず三角関数を定義する方法の一つは，微分方程式による方法である[10]。

二階線形常微分方程式の初期値問題

$$y''+y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0 \tag{8}$$

をみたす解を $y=\cos x$ と定義する。$f(x)=\cos(-x)$ もまた $y''+y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$ をみたす。初期値問題の解の一意性から $\cos x=\cos(-x)$ であることがわかる。したがってこのように定義した$\cos x$ は偶関数である。$\sin x$ は$f(x)=\cos x$ に対して，$-f'(x)$ とする。すなわち$-(\cos x)'=\sin x$ と定義する。$f(x)=\cos x$ が満たす微分方程式

$$y''+y=0$$

をもう一度微分すると

$$y'''+y'=0$$

である。$y=\cos x$ を代入して考えると

$$((\cos x)')''+(\cos x)'=0$$

この式に・

$$-(\cos x)'=\sin x \tag{9}$$

を代入すると

$$(-\sin x)''-\sin x=0$$

すなわち

$$(\sin x)''+\sin x=0$$

を得る。また $\sin 0=-(\cos x)'|_{x=0}=0$，$(\sin x)'|_{x=0}=-(\cos x)''|_{x=0}=\cos x|_{x=0}=1$ である。従って$\sin x$ は初期値問題

$$y''+y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1 \tag{10}$$

の解である。$\cos x$ の場合と同様にして $\sin x$ が奇関数であることもすぐわかる。

$$y''+y=0$$

の両辺に $2y'$ をかける

$$y''\cdot 2y'+y\cdot 2y'=0$$

両辺を積分すると

$$y'^2+y^2=\mathrm{C}\quad(\mathrm{C}\text{ 定数})$$

を得る。$y=\cos x$ を代入すると

$$\sin^2 x+\cos^2 x=\mathrm{C}$$

となる。$x=0$ としてやると $\mathrm{C}=1$ を得る。したがって

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{11}$$

となる.

三角関数のいろいろな性質をだすには次のようにすればよい。まず(10)から $|\cos x|\leqq 1$, $|\sin x|\leqq 1$ がでる。$\cos 0=1$ だから, $\cos x$ の最大値は1である。$(\cos x)''|_{x=0}=-\cos x|_{x=0}=-1$ だから $x=0$ の近傍で $\cos x$ の導関数は正から負に変る。$\cos x>0$ のとき $(\cos x)''=-\cos x<0$ であるから $x=0$ のある右近傍$(0,\ \delta)$において $(\cos x)'$ は負の減少関数である。その1点 $x_0\in(0,\ \delta)$ で接線を引く。$f(x)=\cos x$ に関するテイラーの公式により

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

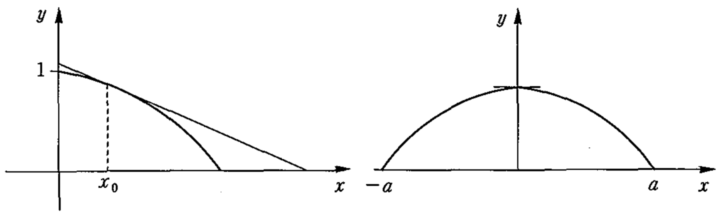
となる ξ が区間 $(x_0,\ x)$ の中に存在する。$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ は x_0 における接線である。$[x_0,\ x_1]$ において $f(x)>0$ ならば

$$f(x_1)-\{f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)\}=\frac{f''(\xi)}{2}(x_1-x_0)^2<0$$

だから, $f(x_1)$ のグラフは接線の下にある。したがってこの接線と x 軸の交点の左側で $f(x)=0$ となる点 a がある。$[0,\ a]$ において $f(x)=\cos x$ は上に凸な関数である。また,

$$f'(a)+f(a)^2=1$$

((11)より)だから, $f'(a)=\pm 1$。$f'(a)<0$ だから $f'(a)=-1$ である。$\cos x$ は偶関数だからこれで $[-a,\ a]$ における状態がわかった。(図参照)



次に $g(x)=\cos(x-a)$ とおくと, $g''(x)=-g(x)$, $g(0)=\cos(-a)=0$, $g'(0)=-\sin(-a)=(\cos x)'|_{x=-a}=f'(-a)=1$ これで $g(x)=\cos(x-a)$ は初期値問題(10)の解であることがわかった。したがって解の一意性から $g(x)=\sin x$, すなわち $\cos(x-a)=\sin x$, さらに $h(x)=-\sin(x-a)$ とおくと $h''(x)=-h(x)$, $h(0)=-\sin(-a)=1$, $h'(0)=\cos(-a)=0$, したがって $h(x)=\cos x$, すなわち$\sin(x-a)=-\cos x$, したがって $\cos(x-2a)=-\cos x$。

このようにして $[a,3a]$ における $\cos x$ の形がわかった, このように次々に $2a$ ずつずらして

$\cos x$ の$(-\infty, \infty)$における状態がわかる。$2a=\pi$ とおく，これが π の定義である。2π は $\cos x$, $\sin x$ の周期である。

次に三角関数の加法定理を導いてみよう。$y_1=\sin(x+x_0)$ は

$$y''+y=0,\ \ y(0)=\sin x_0,\ \ y'(0)=\cos x_0$$

をみたしている。一方 $y_2=\sin x_0 \cdot \cos x+\cos x_0 \cdot \sin x$ もまた $y''+y=0, y(0)=\sin x_0, y'(0)=\cos x_0$ をみたしている。従って微分方程式の初期値問題の解の一意性から, $y_1 \equiv y_2$ でなければならない。すなわち

$$\sin(x+x_0)=\sin x_0 \cdot \cos x+\cos x_0 \cdot \sin x$$

である。同様にして

$$\cos(x+x_0)=\cos x_0 \cdot \cos x-\sin x_0 \cdot \sin x$$

も証明できる。

微分方程式による三角関数の定義では角という概念は必要なかった。ここで角との関係を調べてみよう。曲線 $\Gamma=\{(x, y): x=\cos\theta, y=\sin\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)\}$ は単位円 $x^2+y^2=1$ 上にあって，$0\leqq\theta\leqq s$ となる部分の長さは

$$\int_0^s \sqrt{x'(\theta)^2+y'(\theta)^2}\,d\theta$$

であるから[11],

$$\int_0^s \sqrt{(\cos\theta)'^2+(\sin\theta)'^2}\,d\theta=\int_0^s \sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^s d\theta=s$$

したがって，s は単位円上の $(0,\ 1)$ から $(\cos s,\ \sin s)$ までの弧長に等しい。すなわち $x=\cos s$ は弧度で測った底角 s の直角三角形の余弦に等しい。

§7. 整級数による三角関数の定義

整級数とは

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots \tag{12}$$

という形の級数で，係数 a_n と変数 z は複素数とする。次の定理を証明なしに述べておこう[12]。

定理3　整級数(12)に対し，次の性質をもつ収束半径とよばれる数 R, $0\leqq \mathrm{R}\leqq\infty$ が定まる：

(i) $|z|<\mathrm{R}$ をみたす各 z に対し級数は絶対収束する。$0\leqq\rho<\mathrm{R}$ とすると，$|z|\leqq\rho$ に対し収束は一様である。

(ii) $|z|>\mathrm{R}$ のとき，級数の項は非有界となり，したがって級数は発散する。

(iii) $|z|<\mathrm{R}$ において，級数の和は解析関数である。導関数は項別微分をしてえられ，項別微分した整級数は同じ収束半径をもつ。

円周 $|z|=\mathrm{R}$ を収束円周という。この円周上では級数が収束するか発散するかは，この定理では何も主張していない。この定理でのべられている R としては

$$\frac{1}{\mathrm{R}}=\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|} \tag{13}$$

にとればよいことも知られている。これは収束半径に対するアダマールの公式とよばれている。

実数だけで考えて微分積分学を展開するとき，指数関数 e^x と三角関数 $\cos x$，$\sin x$ の間に深い関係があることはわからない。テイラー展開をしてみると両者には類似があることがわかるが，もともとこの2つの関数は全く異なった方法と目的で導入されるからである。複素数の効用について「解析概論」の著者，高木貞治はかつて次のように述べている。

「変数を複素数にまで拡張することは，19世紀以後の解析学の特色で，それによって古来専ら取扱われていたいわゆる初等関数の本性が初めて明らかになって，微分積分法に魂が入ったのである。複素数なしでは，初等関数でも統制されない。」[13]

ここではまず指数関数を導入しよう。指数関数は微分方程式の初期値問題

$$f'(z)=f(z),\ f(0)=1 \tag{14}$$

の解として定義しよう。この微分方程式を解くため整数級を用いる。すなわち

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

とおくと，

$$f'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots$$

である。

(14)をみたすことから，$a_{n-1}=na_n$，初期条件から $a_0=1$，これから帰納的に $a_n=\dfrac{1}{n!}$ をえる。この解を e^z または $\exp z$ と書く。整級数

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \tag{15}$$

は，$\sqrt[n]{n!}\to\infty$ より全平面で収束する。

三角関数は

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \tag{16}$$

で定義する。(15)から次の整級数展開をえる。

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots \tag{17}$$

z が実数のとき，(17)はよく知られた $\cos x$，$\sin x$ のテイラー展開である。微積分の普通の取扱いと違う点は，ここでは幾何学的直観を用いないでこれらの関数を定義した点である。

(16)からオイラーの公式

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z \tag{18}$$

がえられ，同じく(16)から等式

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1 \tag{19}$$

もえられる。さらに

$$D\cos z=-\sin z \qquad D\sin z=\cos z \tag{20}$$

もわかる。

さらに e^z が指数法則

$$e^{a+b}=e^a\cdot e^b$$

をみたすことは，微分方程式からわかる。実際，$D(e^z\cdot e^{c-z})=e^z\cdot e^{c-z}+e^z\cdot(-e^{c-z})=0$ となり，$e^z\cdot e^{c-z}$ は定数である。$z=0$ とおくと，定数の値は e^c であることがわかる。すなわち

$$e^z \cdot e^{c-z} = e^c$$

ここで $z=a$, $c=a+b$ とおけば，指数法則をえる。

(16)とこの指数法則を用いれば加法定理

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b \tag{21}$$

は直ちにえられる。

§ 8. π の定義について

三角関数は周期をもつ関数である。このことを示すため次の考察をする。すべての z に対し $f(z+c)=f(z)$ が成り立つとき, $f(z)$ は周期 c をもつという。e^{iz} に対して周期 ω_0 が存在して, $\omega_0>0$，その整数倍の全体が周期の全体となることを示そう。

まず $y>0$ のとき $\sin y<y$ である。なぜなら，$(\sin y)'=\cos y \leqq 1$　　$\sin 0=0$ より，積分をして，$\sin y<y$ $(y>0)$ をうる。

次に $y>0$ のとき $\cos y>1-\dfrac{y^2}{2}$ である。これも，$(\cos y)'=-\sin y>-y$, $\cos 0=1$ より $\cos y>1-\dfrac{y^2}{2}$　$\left(\int_0^y -\sin y \ dy > \int_0^y -y \ dy\right)$ をうる。以下同様にして

$$\sin y > y - \frac{y^3}{6}$$

$$\cos y < 1 - y^2/2 + y^4/24$$

をうる。最後の不等式で $y=\sqrt{3}$ とすると

$$\cos\sqrt{3} < 1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{24} < 0$$

であるから，$\cos 0=1$, $\cos\sqrt{3}<0$ と中間値の定理より，0 と $\sqrt{3}$ の間に $\cos y_0=0$ をみたす y_0 がある。

$$\cos^2 y_0 + \sin^2 y_0 = 1$$

から，$\sin y_0=\pm 1$ となり，$e^{iy_0}=\pm i$ で，ゆえに $e^{4iy_0}=1$ となる。

関数 e^{iz} の周期 ω は

$$e^{i(z+c)} = e^{iz}$$

から，$e^{ic}=1$ をみたす $c=\omega$（実数）となることがわかる。(何故なら，$c=x+iy$, $x \neq 0$, y は実数とおくと，$e^{ic}=e^{ix-y}=e^{ix}e^{-y}=1$ 従って $e^{ix}=e^y$, これは矛盾である。)

従って $4y_0$ は e^{iz} の周期であることがわかった。次にこれが e^{iz} の最小の正の周期であることを示そう。$0<y<y_0$ で，前に出した不等式から

$$\sin y > y\left(1 - \frac{y^2}{6}\right) > \frac{y}{2} > 0$$

となり，$\cos y$ は単調減少関数である。$\sin y$ は正で，$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より，$\sin y$ は単調増加である。従って，$\sin y < \sin y_0 = 1$ となる。$0<\sin y<1$ より，e^{iy} は± 1 でも $\pm i$ でもないことがわかる。従って $e^{4iy} \neq 1$ であり，$4y_0$が最小の正の周期であることがわかった。$4y_0$ を ω_0 と書くことにする。

今度は e^{iz} の任意の周期 ω を考える。

$$n\omega_0 \leqq \omega < (n+1)\omega_0$$

をみたす整数 n が存在する(実数の性質)。$\omega \neq n\omega_0$ とすると，$\omega - n\omega_0$ は正数の周期になるが，これは ω_0 の最小性よりありえない。従って $\omega = n\omega_0$ すなわち任意の周期は ω_0 の整数倍である。

ここで e^{iz} の最小正の周期をあらためて，2π と書こう。これは π といいう数の定義である。上の考察で

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{2\pi i}=1$$

がわかるが，これらの等式は，2つの数 e と π の間にある本質的な関係を示している。実数 y が $0 \leqq y \leqq 2\pi$ の間をふえていくと，点 $\omega = e^{iy}$ は単位円周 $|w|=1$ を正の向きに一周する。

代数的にみれば，写像 $w=e^{iy}$ は実数の加法群から絶対値が1の複素数の作る乗法群への準同型写像である。この準同型の核は 2π の整数倍がなす部分群である。

§ 9. 初等数学におけるπの定義について

小学校で円周の長さおよび円の面積について学習することになっている。多くの学生にとって，π の定義はこの小学校高学年の円周の長さの学習の際に与えられたものを終生修正することなしに用いることになるのであろう。小学校高学年に於ける π の定義は

$$\frac{\text{円周}}{\text{直径}}$$

すなわち円周と直径の比の値を3.14と与えてそれを π と呼ばせている。ところで円周は直径に比例すること，そしてその比例定数が π であることは先験的に(あまりたしかめることなしに)与えられているようである。多くの先生方にとっては，このようにして与えられた π を用いて，半径 r の円の面積が πr^2 であることを導くことが難かしい問題になる。

遠山啓の「わかるさんすう」でも例えばこの部分は次のようになっている。これでは π の定義は帰納的になっていることがわかる。そして円の面積が πr^2 であることを導くところはたいへん工夫されている。(図版1および図版2参照)

日本では π を円周率と云って，円周と直径の比の値として定義されることが多いが，これは中国の数学の影響であるという説もある。π は無理数であるから，整数の比で表すことはできない。しかし図版1にあるように

$$\frac{\text{円周}}{\text{直径}}$$

をあたかも分数であるかのように表している。このあたりはしたがって理論的にもかなり無理であることがわかる。

前節までに述べたことをふまえれば，π の定義は必ずしも，「円周率」という形にしなくてもよいことは明らかである。

初等数学における π の定義法としては，「円周率」のほかに次の方法が考えられる。

(1) 単位円の半円周の長さを π と定義する。

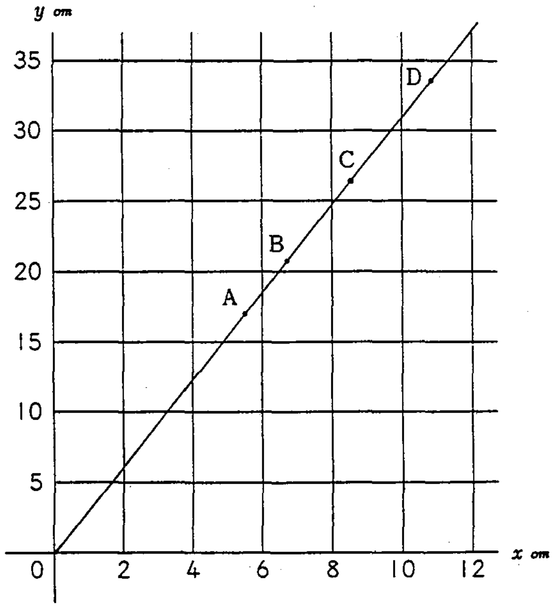
(2) 単位円の面積を π と定義する。

ここでは(2)の方法についてもっとくわしく述べよう。半径1の円の面積を π とするとき，半径 r の円の面積は πr^2 になる。小学校でこのことを教えるときには長方形を相似拡大したときの面積の変化を基礎にするとよい。すなわち，両辺の長さがそれぞれ a, b の長方形の面積は ab であるが，この両辺を r 倍した長方形の面積は r^2ab となる。つまり面積では，相似拡大 r 倍を行うと，r^2 倍になるのである。このことを基礎に，単位円の面積が π であるとき，それを r

4つの茶づつA，B，C，Dの直径と周囲を測ったら，下の表のようになりました。

茶づつ	A	B	C	D
直径（cm）	5.5	6.6	8.4	10.7
周囲（cm）	17.3	20.7	26.4	33.6

下の図のように，直角に交わる横軸とたて軸をかき，横軸の上に茶づつの直径の長さを目もり，たて軸の上に周囲の長さを目もりました。

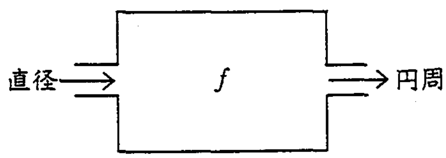


茶づつA，B，C，Dの直径（x cm）と円周（y cm）を目もった点をそれぞれA，B，C，Dとすると，これらの4点は，だいたい原点を通る直線上にあります。

だから，円の周囲の長さは，直径に比例しているとみられます。

円周は直径に比例します。

したがって，第3章で学んだように，



円周＝（比例定数）×直径

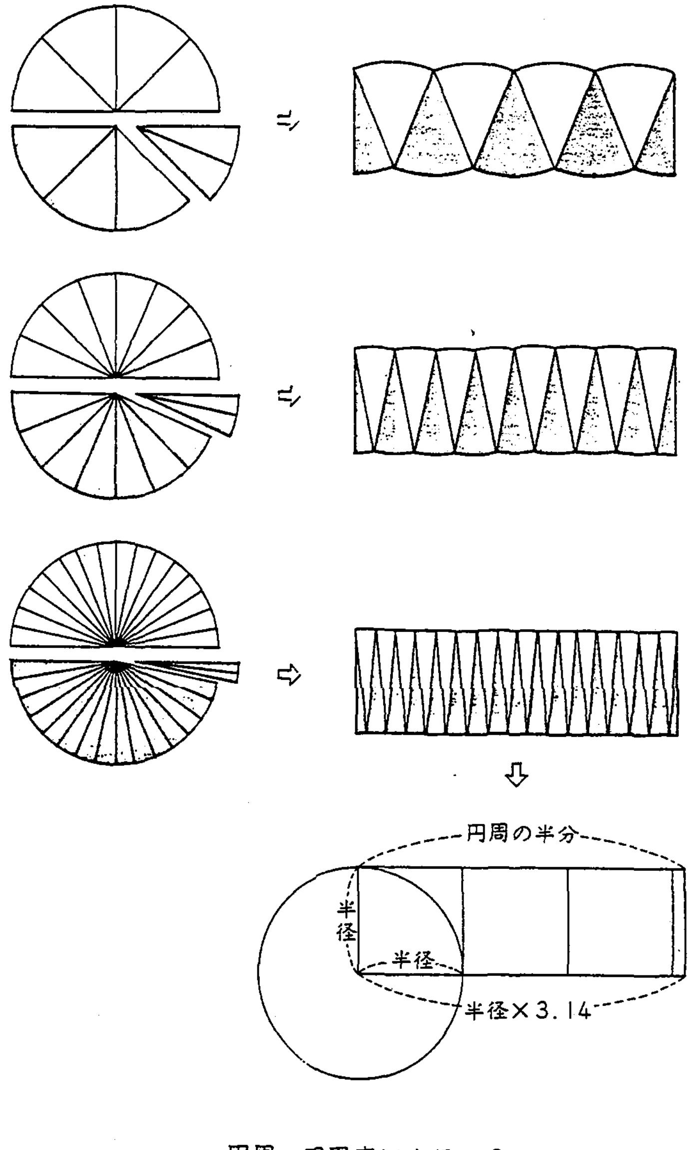
となります。

その比例定数 $\left(\dfrac{\text{円周}}{\text{直径}}\right)$ を**円周率**といい，ふつう，π（パイ）という記号で表します。

円周率（π）は，正確には，3.14159265358979323846……とどこまでもつづく数ですが，ふつう，3.14として計算に使います。

図版1

円を小さいおうぎ形に分け，これをかみあわせて，だんだん長方形に近づく形をつくって，円の面積の求め方を考えましょう。



ところで，　円周の半分$=\dfrac{\text{円周}}{2}=\dfrac{\text{円周率}\times\text{半径}\times 2}{2}=$円周率×半径

だから，　円の面積＝円周の半分×半径＝円周率×半径×半径

円の面積＝円周率×半径×半径

円の半径を r，面積を M とすると，

$$M=\pi\times r\times r$$

図版2

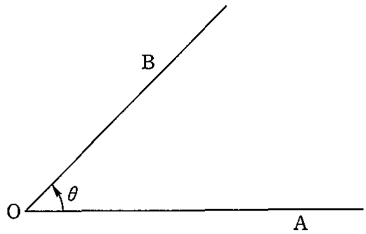
倍に相似拡大した円（半径 r の円）の面積が $r^2\pi$ になることを示すのである。長方形の面積の場合をもとにして，曲線で囲まれた図形の面積は長方形の和に分割した考えれば，相似拡大 r 倍を行うと面積が r^2 倍になることを知ることができる。

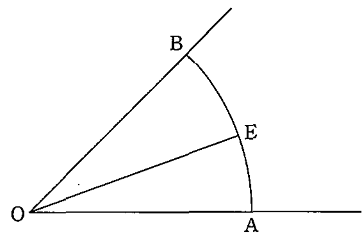
この π の定義をもとにして，半径 r の円の円周の長さが $2\pi r$ であることも，円に内接する正多角形で近似することによって導くことができる。

高等学校でこの方法を試みることは十分可能であるし，意義がある[14]。

§10. 角の大きさの初等的定義法について

角の測度として扇形の面積を用いることができることを§5において述べたが，この方法を初等的に改良した方法がある[15]。まず角の定義であるが小平邦彦によると「1点Oを端点とする2つの半直線OAとOBからなる図形を角AOBといい，記号∠AOBで表わす」[16]となる。





この角に測度を入れるため，Oを中心として単位の長さの半径の円をつくり，2直線と交点をA，Bとする。この扇形AOBの面積の大小で角の大小を測るのである。まず，任意に一つ扇形AOEをとり，これを基準扇形(単位扇形)とよぶことにする。そして，扇形AOBが基準扇形をいくつ含むか測るのである。これは線分の長さを単位の線分の長さを基準にして測るのと同様である。扇形AOBが基準扇形をちょうど k 個含むばあい，∠AOBの角度 θ は $k\{\theta\}$ であると定義する。基準扇形のばあいは $k=1$ であるから，その角度 θ_0 は $\theta_0=\{\theta\}$ である。この方法は線分の長さを測定する方法と同様である。このようにして角度 θ が $\{\theta\}$ を単位として，数値 k で表わされる，すなわち

$$\theta=k\{\theta\}$$

である。

基準扇形として四分円の1/90を考えたのが角度の単位度（°）である。この場合四分円つまり直角を表す数値 k は90，すなわち直角は90°ということになる。この基準扇形の1/60を基準扇形に選べば分（′），さらにその1/60を選べば秒（″）が得られる。

§11. 運動と三角関数

$(\cos\theta,\ \sin\theta)$という平面上の点は，原点を中心とした半径1の円の周上にあることは§5で述べた。すなわち$(\cos\theta,\ \sin\theta)$は原点を中心とする単位円周上において，$x$ の正の軸から測って正の向きに θ ラジアン回転した位置における点の（x，y）座標である。従って三角関数が円運動を表現していることは容易にわかる。角速度1で単位円 $x^2+y^2=1$ 上を回軸する円運動は，動点Pが $t=0$ のとき（1，0）にあるとすると

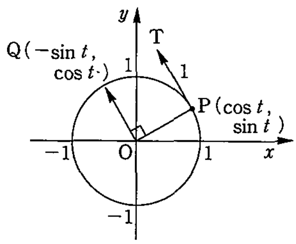
$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$$

で表される。この運動の時刻 t における速度ベクトル

$$\begin{pmatrix} (\cos t)' \\ (\sin t)' \end{pmatrix}$$

を考えよう，この速度ベクトルの方向は円の接線方向である。このことはハンマー投げを思いうかべるとよくわかる。角速度1ということは1単位時間にちようど1の長さの弧を動くことであるから，各点における速度ベクトルの大きさも1である。

従ってこの円運動の速度ベクトルは図の矢線 $\overrightarrow{PT}$ で表せる。そしてこのベクトルの成分は，P が $\frac{\pi}{2}$ 回転した点を Q としたとき，矢線 $\overrightarrow{OQ}$ の成分と等しい。これから速度ベクトルの x 成分は，



$$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t$$

y 成分は

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t$$

とわかる，したがって速度ベクトルは

$$\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

となる，このことは $(\cos t)'=-\sin t$，$(\sin t)'=\cos t$ を示している。

一般の等速円運動は，動点 P の座標を $(x,\ y)$，角速度を ω，円の半径を a，初期位相を α として，

$$\begin{cases}x=a\cos(\omega t+\alpha)\\ y=a\sin(\omega t+\alpha)\end{cases}$$

と表せる。速度ベクトルは微分をして

$$\begin{cases}x'=-a\omega\sin(\omega t+\alpha)=-\omega y\\ y'=a\omega\cos(\omega t+\alpha)=\omega x\end{cases}$$

である。速度ベクトルの大きさは $\omega>0$ とすると，$a\omega$ である。加速度ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\omega^2x\\ -\omega^2y\end{pmatrix}=-\omega^2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

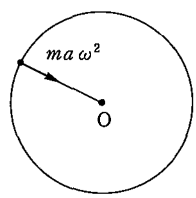
である。その大きさは $a\omega^2$ である。その方向は図の矢線のように円の中心に向っている。

地球のまわりを月は円運動をしていると考えられるが，月の質量を m，回転半径 a，角速度 ω として，中心力（加速度の大きさ $a\omega^2$ と質量 m の積）$ma\omega^2$ は地球と月のあいだに働く引力である。

平面上の点 P が

$$\begin{cases}x=a\cos(\omega t+\alpha)\\ y=a\sin(\omega t+\alpha)\end{cases}\qquad(1)$$

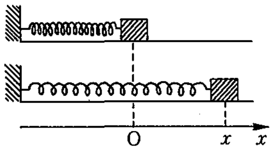
で表される等速円運動をしているとき，x 軸上への P の正射影 Q の運動は単振動である。y 軸上への P の正射影 Q′ の運動も単振動である。(1)は微分方程式



$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x\qquad(2)$$

をみたしている。例えばつるまきバネの運動がそうである。(2)よりも一般に，質点の運動に関

係した二階の常微分方程式



$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-r\frac{dx}{dt}-kx(t)+f(t) \tag{3}$$

を考えよう。ここに m, r, k はいずれも正の定数であり，かつ $f(t)$ は $-\infty<t<\infty$ で連続な実数の値をとる関数であるとする。

この m は質点の質量，r は摩擦係数と呼ばれるもので，質点のおかれている環境での空気抵抗のように質点の速度 $\frac{dx}{dt}$ に比例して質点の動きを押える方向に働く力 $-r\frac{dx}{dt}$ の比例係数を $-r$ $(r>0)$ としたのである。また k は弾性係数と呼ばれているもので，質点を支えているバネのような弾性体が，質点の平衡位置からの変位量 $x(t)$ に比例して質点を平衡位置に復元させようとする力 $-kx(t)$ の比例係数を $-k(k>0)$ としたのである。なおまた，$f(t)$ はたとえば重力などのように外部からこの質点に働く外力の項である。

このようにして，微分方程式(3)はニュートンの第２法則を記述したものである。ここでは，空気抵抗などは速度に比例するとか，弾性的復元力は平衡位置からの変位量 $x(t)$ に比例するような，小さい振動を扱っているとするのである。

初期条件

$$x(0)=a_0,\quad x'(0)=a_1 \tag{4}$$

を与えて，(3)と(4)とを満足する解 $x(t)$ を求めてみよう。外力がない場合 $(f(t)=0)$ 方程式は次のようになる。

$$mx''+rx'+kx=0 \tag{5}$$

この微分方程式を斉次線形二階常微分方程式と云う。

(5)に指数解 $e^{\lambda t}$ を代入してみると

$$m(e^{\lambda t})''+r(e^{\lambda t})'+k(e^{\lambda t})=(m\lambda^2+r\lambda+k)e^{\lambda t}$$

ここで上式の右辺が 0 になるためには $e^{\lambda t}\neq 0$ より

$$m\lambda^2+r\lambda+k=0 \tag{6}$$

であればよい。(6)は λ の２次方程式で，これを微分方程式(5)の特性方程式という。

(6)の判別式 $r^2-4mk<0$ の場合に興味がある。この時(6)の解は $\lambda_1=\frac{-r+i\sqrt{4mk-r^2}}{2m}$ と $\lambda_2=\frac{-r-i\sqrt{4mk-r^2}}{2m}$ となる。指数解 $e^{\lambda t}$ の λ が共役複素数 λ_1, λ_2 となるのである。すなわち，$\lambda_1=-\frac{r}{2m}+i\nu$ $\lambda_2=-\frac{r}{2m}-i\nu$ と書けば，

$$e^{\lambda_1 t}=e^{-\frac{r}{2m}t}(\cos\nu t+i\sin\nu t)$$

$$e^{\lambda_2 t}=e^{-\frac{r}{2m}t}(\cos\nu t-i\sin\nu t)$$

となる。このことから $x_1(t)=e^{-\frac{r}{2m}t}\cos\nu t$ と $x_2(t)=e^{-\frac{r}{2m}t}\sin\nu t$ が微分方程式(5)の基本解系を作ることが導かれる。そして初期値問題(5)—(4)の解はこの場合

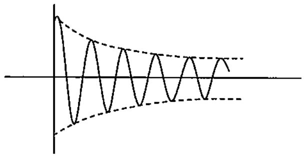
$$x(t)=a_0e^{-\frac{r}{2m}t}\cos\nu t+\left(a_1+\frac{ra_0}{2m}\right)\nu^{-1}e^{-\frac{r}{2m}t}\sin\nu t \tag{7}$$

ただし $\nu=\frac{\sqrt{4mk-r^2}}{2m}$ となる。

この解では $\dfrac{2\pi}{\nu}$ を周期とする関数

$$a_0\cos\nu t+\frac{2ma_1+ra_0}{2m\nu}\sin\nu t$$

の振幅を，時間 t の経過とともに減幅（damp）する減幅因子 $e^{-\frac{r}{m}t}$ が乗ぜられているのである。その様子は図を参照されたい。



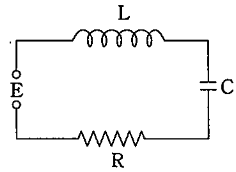
外力のある場合，非斉次線形な二階常微分方程式

$$my''=-ry'-ky+f(t) \qquad (3)$$

を解くには，(3)の特解を一つ見つけ $y_1(t)$ とすれば，斉次方程式

$$mx''=-rx'-ky$$

の解 $x(t)$ を用いて，$y(t)=y_1(t)+x(t)$ とすれば $y(t)$ は(3)の解である。$y_1(t)$ を見出す方法として定数変化法が知られている。



次に回路を流れる電流の微分方程式を考えよう。$I(t)$ を回路を流れる電流の時刻 t における強さ，L を自己誘導，R を抵抗，C を容量，$E(t)$ を起電力とするとき，回路を流れる電流の微分方程式は次のようになる。

$$LI''(t)+RI'(t)+CI(t)=E(t)$$

この方程式で L を m に，R を r に，C を k に $E(t)$ を $f(t)$ に読み換えれば振動の方程式(3)と同じ形になるのである。

§12. 結　語

本稿は高等学校における数学教育で，三角関数の扱い方に関ってトートロジーに陥る危険を指摘し，三角関数の厳密な定義法を述べて来た。しかしこれらの厳密な定義法は高等学校においてはたして可能なのかという問題がある。さらに翻って，教育においてトートロジーを避ける必要性は本当にあるのかという問題意識もある。たしかに小学校において数の概念を導入する際に，ペアノの公理をもちだすことはできない。むしろ数学教育にあっては，トートロジーとどうつきあうのかということが必要な態度となる[17]。しかし高等学校の数学教育にあっては避けうるトートロジーは避けることが当然である。

三角関数の定義において $\sin x$ や $\cos x$ の x の幾何学的な意味に留意しなければ，複素数を用いて，e^x の整級数から導入する方法（§7 に論じた）が最も見通しが良い。x の幾何学的意味というのは，三角形の角の測度または回転の大きさを表す量としての意味である。角が円周から切りとる弧で，角を計量することはバビロニアですでに知られていた。バビロニアでは0°と360°との間にある角の計量が度として今日まで保たれているようになされていた。古代ギリシヤでは角の概念はさらに制限されて二直角より小さい角が対象とされた[18]。そしてユークリッドでは比と計量の理論が，測られるべき量のいくらでも大きな倍数の比較に基づいていたため，角は計量できる量とはされていなかった。$\sin x$ や $\cos x$ の x が三角形の角や円周の弧ときりはなされて，変数のすべての値に対する関数の定義域として抽象化されたのは17世紀になってニュートンによってである。ニュートンによる $\sin x$ と $\cos x$ の級数展開の発見がこの飛躍をもたらした。現在の高等学校の教程は，この点でニュートンを超えていないのである[19]。現代の解析学

では個別の関数ではなく，関数の集合，すなわち関数空間の概念が考察の対象である。そこでは三角関数は関数空間を近似する素材として現われる。この段階では三角関数の量的意味は捨象されている[20]。ニュートン以来の微積分学の伝統に従って，運動の解析として三角関数を導入しても，幾何学的量からいついかなる形で離れるかは数学教育の大きな課題となるであろう。

〈注〉

(1) 例えば高等学校の教科書の編者でもある小平邦彦は次のように述べている。「高校数学を学んだ人は実数とはどんなものか一応知っているわけである。しかし高校数学の実数論は現代数学の立場から見れば厳密性に欠ける点があって，本講座の基礎としては不十分である。」小平邦彦，岩波講座「基礎数学」解析入門 I（1976年）p 1。

(2) この点を改良する試みとして，山口格「数列の極限指導をめぐる諸問題」，北大教育学部教育方法学研究室「教授学の探究」第 3 号（1985 年）がある。

(3) 1984 年北大教育学部フォーラム「われわれの研究の将来」の教育方法研究グループ報告。北大教育学部教育方法学研究室「教授学の探究」第 3 号（1985 年）p 121。

(4) 三角関数と他の関数との関係や，関数指導全般に関する視点は次を見よ。
「関数指導体系に関する基礎的研究」山口格・須田勝彦，北海道大学教育学部紀要，第 50 号（1988 年）

(5) 「微分・積分」小平邦彦編，東京書籍，(昭和 60 年版)

(6) 「微分・積分」山崎圭次郎，有馬哲，片山孝次著，実教出版（昭和 59 年版）

(7) 一般に実数の集合 E があったとき，実数 L が存在して，E にぞくするどんな x をとっても，$x \leq L$ がなりたつとき，集合 E は上に有界であるといい，数 L を集合 E の 1 つの上界という，上界は一般に多数存在するのであるが，その上界の中での最小数を上限という。上限がいつも存在するとは限らないが，上に有界な集合 E に対して上限の存在を仮定するのが連続の公理である。

(8) a_i，b_i を任意の実数とすると

$$\sqrt{(a_1+\cdots+a_n)^2+(b_1+\cdots+b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

である。この不等式から容易に導くことができる。

(9) 曲線で囲まれた図形の面積とは何かということをきちんと述べる必要があるのである。

(10) ある条件の下で常微分方程式の初期値問題が一意的に解けることを用いる。

(11) 平面曲線 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ $t \in [0, \mathrm{T}]$ が与えられたとき，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ が C^1－級ならこの曲線は長さをもち，その長さは

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt$$

である。

(12) この定理は複素関数論の教科書にはたいてい述べられている。

(13) 「解析概論」改訂第三版，高木貞治著，岩波書店（1961 年）第 5 章 p 201。

(14) 外国での実践例が次の本にある。
Math! Encounters with High School Students. by Serge Lang. (Springer-Verlag New York. 1985)，邦訳，S. ラング，松坂和夫，大橋義房訳「さあ数学しよう！」岩波書店

(15) 今井功，数学セミナー，1987 年 9 月号。

(16) 小平邦彦「幾何のおもしろさ」岩波書店（1985 年）p 13。

(17) 1988 年全道合研（北海道合同教研）数学分科会における須田勝彦のまとめの発言。

(18) ユークリッドの「原論」1 巻，定義 8 と定義 9。

(19) 円周上を何回もぐるぐるまわることによって一般角を考えることは，「回転角」という幾何学的量から乳離れしていない。

(20) 山口格，須田勝彦　上記(4)。

参 考 文 献

本稿の各節の数学的記法および図は次の文献より借りた。

(1) 数学解析(上) 溝畑茂 朝倉書店

(2) 私の微分積分法 吉田耕作 講談社

(3) 微分積分学 笠原晧司 サイエンス社

(4) 高等学校の微分・積分 森毅他，三省堂

(5) 数学史 ブルバキ 東京図書

(6) 複素解析 アールフォルス著 笠原乾吉訳 現代数学社

(7) 微分積分学 伊藤雄二 朝倉書店