ハンパの処理と整数型指標

成　田　雅　博
（北海道大学大学院教育学研究科修士課程）

現実とそのモデル化に関する教材といえば，微分方程式が代表的である。しかし，微分方程式を授業で扱うのは時間的な制約から困難である。本稿では「ハンパの処理」と「整数型指標」という視点で考えられる現実とそのモデル化に関する教材の素材をあげた。そのうち選挙における比例代表制や，1票の重みを公平にするような選挙区への議席配分の方法をややくわしく取り上げた。最後に，中学校新学習指導要領の『課題学習』との関連を述べた。

1. はじめに

・計算問題はできるが文章問題がよくできない。
・「$\frac{4}{5}\div\frac{2}{7}$という計算で答を求める問題をつくりなさい」といわれて平気（？）でナンセンスな問題をつくってしまう大学生が少なからずいる。
・「数学ができるようになるには計算問題をたくさんやりさえすればよい」と一般に思われている。

いずれの現象も「文化としての数学」「科学としての数学」という視点を欠いた数学教育がひとつの原因ではなかろうか。数とは何か，無限とは何か，なぜ明らかにみえることがらを証明するのか，なぜπ（円周率）を小数何億けたも計算するのか，……は「文化としての数学」と関係するだろう。この立場にたつと「数学を勉強して何の役にたつのか」という問にたいして，

「たとえば音楽を勉強するだろう。『音楽を勉強して何の役にたつのか』ときかれたら君は何と答えるか？　その答の『音楽』を『数学』にかえてみたまえ。」

「数学の世界には不思議やなぞがいっぱいなんだ。君もいっしょにマジカル・ミステリー・ツアーにでかけないか？」

「数学では人類が知識を体系化してきた文化を学ぶのだ」

と答えることになろうか。

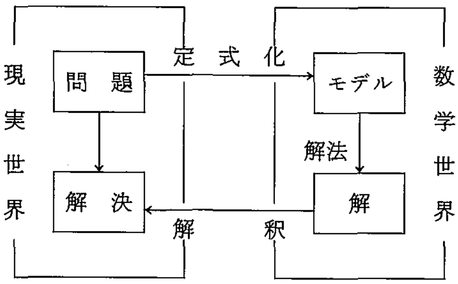
一方，数学は科学技術の発展や，自然認識，社会認識の重要な道具であり，コミュニケーションのために用いられたりする。数学を専ら研究する職業的数学者を養成するのではなく「ふつう」の人に広い意味での「数理科学」を理解してもらうことは「科学としての数学」と関係するだろう。この立場にたつと先の問にたいして，

「数学は現在の科学技術を支える学問のひとつであり，あまりにも複雑でことばでは分析しきれない現象を解析するためにあたらしい分野，問題がつくられつつある学問である。数学を学ぶことで，君たちは現実の問題を解決するための強力な道具を手に入れることができるんだ」

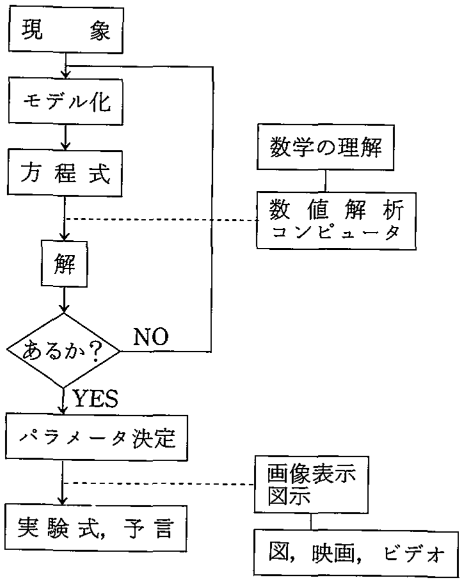
と答えることになる。

「科学としての数学」を教えるには，現実の現象とそのモデル化と数学の理論の関係がキーポイントとなる。その関係については，たとえば銀林浩のダイアグラム（図表1）や一松信が1989

図表1　銀林のダイアグラム



図表2　一松のダイアグラム



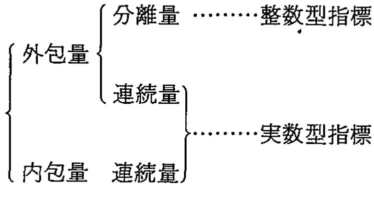
年夏にひらかれた日本数学教育学会全国算数・数学教育研究大会の高専・大学部会におけるパネルディスカッションで提唱したダイアグラム（図表2）がある。現実の現象のモデルとして代表的なものは微分方程式と確率•統計である。それぞれ決定論的法則，非決定論的法則と現実の関係を扱う。しかし，微分方程式は1989年に文部省が発表した新しい高等学校指導要領からは削除された。一松のダイアグラムにそってたとえば『数学C』で展開すべきではなかったか。ところで微分方程式は極限•微分の概念とグラフを指導したあとでなければ扱えない。「バイパス教材」の試みもあるが，授業で扱うことはなかなか難しい。本稿では現象とモデル化を授業で扱うのに，加減乗除と大小比較の範囲だけででき，微積分をつかわずにすむ教材を考察する。「ハンパの処理」と「整数型指標」という視点からいくつかの教材を考察する。

2. ハンパの処理と整数型指標

ある連続量を分けるときに生じるハンパの処理のために，分数，連分数，小数あるいは補助単位の導入などが発明された。しかし分離量は分けることができない。平均や人口密度のような内包量を考えること，つまり等分除で一応解決できるのだが，現実にはいろいろなものや義務等の公平な分配をするときは等分除ではなく包含除をしなければならない。この包含除で生じる余り——ハンパの合理的な処理法を考えることは重要である。たとえば，選挙における比例代表方式が重要な例である。

一方，内包量は外延量の割算であり一般的には分数，小数であらわされる。内包量は現実のある側面をあらわす指標であるが，これは「実数型指標」といえる。しかし，現実には小数であらわされた指標を見ても，それが連続的な外延量でないかぎり実感がわかない。そこで次の１回あるいは１日の結果などによってどうなるか，あと何回，何人，何個あるとどうなるかという指標が考案されてつかわれるようになることがある。このように分離的な外延量であらわされる指標を「整数型指標」とよぼう（図表3）。

図表3　量と指標



たとえば日本のプロ野球の各リーグのペナント・レー

スでは，チームの通算勝率（勝ち試合数/(総試合数－引き分け試合数)）という実数型指標で順位を決める。しかし，次の試合の結果によって順位がどう変わるかをハッキリあらわす指標として，ゲーム差が考案された。ただ，ゲーム差は正確にいうと「半整数型指標」といった方が適当であるがわかりやすさは整数型指標とほぼ同じとみてよい。また，あと何試合勝てば，他のチームの勝敗がどうであってもそのチームがリーグ優勝するかを示すマジック・ナンバーは典型的な整数型指標である。

以上の例に限らず，ハンパの処理や整数型指標を考察することが現実とモデル化の適当な教材になり得ると考える。

3. いくつかの教材の素材

以下に2節で説明した，「ハンパの処理や整数型指標を考察すること」として適当と思われる教材をあげてみた。校種をとわず授業プランを設計する際の参考にしていただければ幸いである。

(1) プロ野球のリーグのペナント・レースにおける指標

- ゲーム差，マジックナンバー

  参考：笠原晧司（1986）

(2) いろいろなスポーツにおける得点や勝敗の決め方，個人記録

- スポーツによって勝敗の決め方はいろいろと違う。それらのルールの性質を整数型指標の構成等で明らかにしていく。たとえば，アイス・ホッケーの日本リーグは，勝ち点の合計の多少で順位をきめる(勝ち2点，引き分け1点，負け0点)。この順位の決め方はプロ野球のリーグ戦の順位決定とどう違うのだろう。

(3) 選挙による代表（議員・首長）の決定

- 日本の参議院比例代表区の選挙で採用されているドント式は，本当に比例代表を保証するハンパの処理なのだろうか。四捨五入式，ヘアー式，ドループ式，サン・ラグ式，最大剰余式，ハーゲンバッハ・ビショフ式（ドント式と全く同じ配分になる）等の他の方式との理論的，実験的考察をする。

  参考：西平重喜（1974）（1977）

- 選挙における票の分配におけるハンパの処理は，参議院比例代表区に限らない。衆議院や参議院選挙区，地方自治体選挙において「1票の重み」を公平にするような選挙区への議席定数の配分方法も本質的には同じ性質の問題である。

  参考：西平重喜（1977），加藤直樹，一森哲男，越山　康（1986），茨木俊秀（1989）

(4) 暦（人間の生活との関連で時間を区切ったもの）と時を考える

  参考：山崎　昭，久保良雄（1979），永田　久（1989）

- 年，月，日，週の関連を考察する。

  年，月，日……自然現象と関連した区切り

  週………………人工的な区切り

  ① 年月日と週の関係「ツェラーの式」　　参考：柴田敏雄他（1989）

  　自分の生まれた日は何曜日か？

  ② 年と日のズレ

1年を1日で分割すると約0.24日のハンパが生じる。この処理をローマ時代からの暦の変遷をみながら考える。「うるう年」「うるう月」

・1年を原子時計で測った時間で分割したときのハンパの処理「うるう秒」

4. 比例代表について

この節では3節(3)に述べた教材について若干くわしく考察する。この問題は，ゲームの理論と関連するミニマックス原理，確率論・情報理論と関連する情報量基準AICを使った方法（赤池弘次(1983)）等があるが，パソコンでシミュレートしながら考察をすすめることが可能である。

まず1990年1月北海道算数数学教育会高等学校部会が主催した第8回北海道高等学校数学コンテストの問題3を以下に引用して，ドント式を説明しよう。

問題3　日本の参議院選挙は比例代表区と地方区に分けて選挙がおこなわれる。比例代表区の議員定数は50議席であり，投票では有権者が政党名を記入する。投票結果にもとづく各党の配分議席数はドント方式によって決定され，各政党があらかじめ順位をつけて提出しておいた候補者のリストから当選議員が選ばれる。

この問題では，ドント方式による各政党の獲得議席数について考えてみる。

ドント方式を説明する前に記号を次のように定義しよう。立候補した政党がA, B, Cの3つだけだったとしよう。

投票総数（有効投票数）……N

A党の得票数……$n(\mathrm{A})$　　A党の得票率……$f(\mathrm{A})=\dfrac{n(\mathrm{A})}{N}$

B党の得票数……$n(\mathrm{B})$　　B党の得票率……$f(\mathrm{B})=\dfrac{n(\mathrm{B})}{N}$

C党の得票数……$n(\mathrm{C})$　　C党の得票率……$f(\mathrm{C})=\dfrac{n(\mathrm{C})}{N}$

選挙で争う議員定数（総議席数）……M

A党の議席数……$m(\mathrm{A})$　　A党の議席率……$g(\mathrm{A})=\dfrac{m(\mathrm{A})}{M}$

B党の議席数……$m(\mathrm{B})$　　B党の議席率……$g(\mathrm{B})=\dfrac{m(\mathrm{B})}{M}$

C党の議席数……$m(\mathrm{C})$　　C党の議席率……$g(\mathrm{C})=\dfrac{m(\mathrm{C})}{M}$

このようにおくと，

$$n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})+n(\mathrm{C})=N \quad , \ f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})+f(\mathrm{C})=1$$
$$m(\mathrm{A})+m(\mathrm{B})+m(\mathrm{C})=M \ , \ g(\mathrm{A})+g(\mathrm{B})+g(\mathrm{C})=1$$

が成立する。

たとえば，$N=5000$，$n(\mathrm{A})=2800$，$n(\mathrm{B})=1600$，$n(\mathrm{C})=600$，$M=10$のとき，ドント方式によると，各政党の講席数$m(\mathrm{A})$，$m(\mathrm{B})$，$m(\mathrm{C})$を次のように決める。

① $n(\mathrm{A})$，$n(\mathrm{B})$，$n(\mathrm{C})$のおのおのを1，2，3……でそれぞれ割って表1をつくる。

② 表1にあらわれた数の大きい順に順位をつけていく。(表1では小数点以下を切り捨てかいてあるが，大小の比較は小数点以下も含めておこなう)

③ M 番目で②の作業をうちきり，各政党の横にある順位のついている数の個数を議席数と決める。

例では $M=10$ だから，$m(\mathrm{A})=6$, $m(\mathrm{B})=3$, $m(\mathrm{C})=1$ となる。なおこのときの各政党の得票率は，$f(\mathrm{A})=0.56$, $f(\mathrm{B})=0.32$, $f(\mathrm{C})=0.12$
議席率は，$g(\mathrm{A})=0.6$, $g(\mathrm{B})=0.3$, $g(\mathrm{C})=0.1$ となる。

いまの例で議員定数 M が，$M=11$ だった場合，表1の数で11番目の数が複数あるので $m(\mathrm{A})$, $m(\mathrm{B})$, $m(\mathrm{C})$ をうまく決めることができない。この問題では，M 議席目が同順のためうまく決められないような場合を除いて考える。

表1

	÷1	÷2	÷3	÷4	÷5	÷6	÷7
A党	①2800	③1400	④ 933	⑥ 700	⑧ 560	⑩ 466	400
B党	②1600	⑤ 800	⑨ 533	400	320	266	228
C党	⑦ 600	300	200	150	120	100	85

以上の記号およびドント方式は立候補した政党の数がどんな場合でも同じように適用することができる。

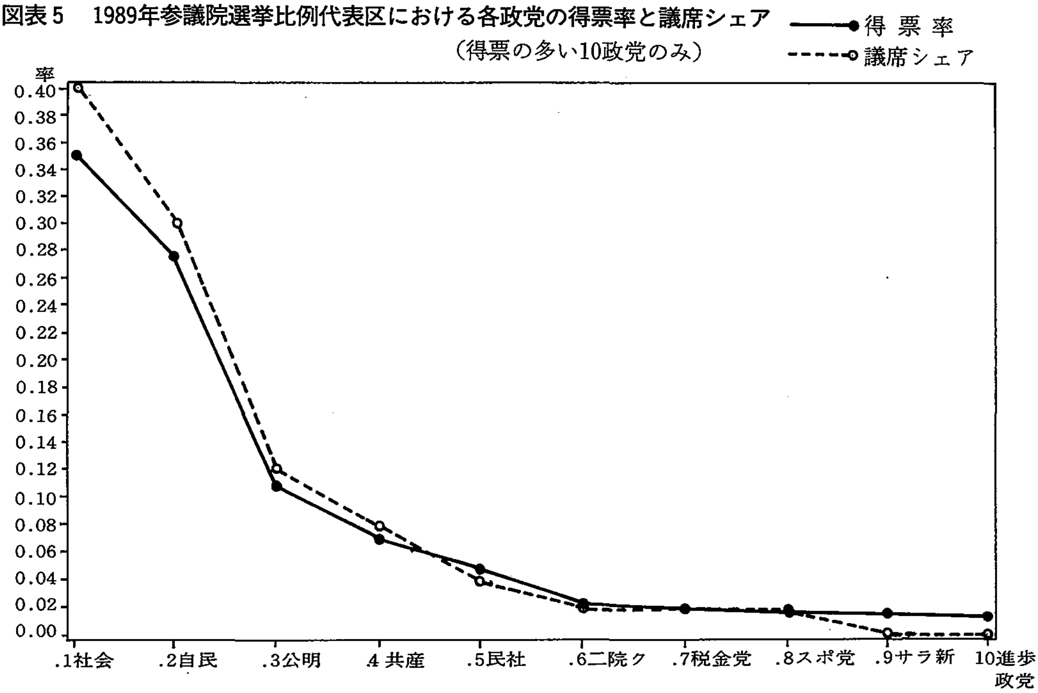
このような方法で，得票率とほぼ同じ比率の議席配分がなぜできるのであろうか。たとえば1989年夏の参議院比例代表区の得票数，得票率，議席数，議席シェア（議席率）を表とグラフにしたものが図表4と図表5である。たしかに得票率と議席率は似たパターンになる。しかし，

図表4　1989年参議院選挙比例代表区における政党別得票と議席

（得票の多い10政党のみ）
1989年7月23日投票

政　党	得票数	得票率	議席数	議席率
1 社会	19,688,252	35.05%	20	40%
2 自民	15,343,455	27.32%	15	30%
3 公明	6,097,971	10.86%	6	12%
4 共産	3,954,408	7.04%	4	8%
5 民社	2,726,419	4.85%	2	4%
6 二院ク	1,250,022	2.23%	1	2%
7 税金党	1,179,939	2.10%	1	2%
8 スポ党	993,989	1.77%	1	2%
9 サラ新	872,326	1.55%	0	0%
10 進歩	711,980	1.27%	0	0%
議席をとれなかった政党の計	4,936,873	8.79%	0	0%
合計	56,171,328	100.00%	50	100%

図表5　1989年参議院選挙比例代表区における各政党の得票率と議席シェア
（得票の多い10政党のみ）



よくみると大政党は得票率にくらべて議席を少し多めに得ているようにみえる。ドント式以外にもっと「よい」方法はないのだろうか。

このような問題を中心に授業展開を設計することができる。いろいろな予想を出して，証明できるものは証明し，よくわからないものはパソコンでシミュレートするわけである。初等的に証明できる定理として，上記コンテストでは下のような出題をしている。他にいろいろな予想をたてることができるであろう。

(3) $f(\mathrm{A}) \geqq \frac{1}{M}$ならば，立候補した政党の数や得票数，議員定数にかかわらず，$m(\mathrm{A}) \geqq 1$ であることを証明しなさい。

(4) 立候補した改党が，A，Bの2つだけであると仮定する。$\frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{B})}=k$ とおいたとき k が自然数であって，なおかつ $M+1$ が $k+1$ で割りきれないとき，$f(\mathrm{A}) \leqq g(\mathrm{A})$ かつ $f(\mathrm{B}) \geqq g(\mathrm{B})$ であることを証明しなさい。また，上の不等式の等号が成りたつための必要十分条件を求めなさい。

しかし，このような数学的な分析だけで選挙や公平な代表の選出ができるわけではない。たとえば，選挙を実施する「土俵」とでもいうべき選挙区をどう決めるのかが大きな問題である。そもそも国の政策にかかわる国会議員を地域ごとに選出することがよいのかどうかという問題もある。各選挙区における当選の決定方法もさまざまな方法がある。1選挙区1人定数でも，過半数がとれないとき2回目の投票をするのか，しないのか(する例はフランスの国会議員選挙，しない例は日本の地方自治体の首長選挙)。投票では1人の候補者を記入するのか，複数記入するのか。「1回限りの単記投票では一番のぞまれない候補者が当選することがある」というコンドルセのパラドックスをはじめいくつかの投票のパラドックスがあるのでこれらの問題は重要

である。

参考：佐伯　胖（1980），西平重喜（1981）

比例代表制にしても計算方法とともに，その計算を全国一括してやるか県単位でやるのかの選択，また配分された議席の当選者のきめかたが重要になる。たとえば後者の方法には前もって党が提出したリストの順に当選者をきめる拘束式(日本の参議院選挙)，候補者リストが印刷してある投票用紙に対して有権者がリストの順序を変えたり候補者の名前を消したり書き込んだりして投票する非拘束式(フランスの地方選挙)，有権者は候補者名で投票するが政党ごとに一括して比例代表の計算をして政党への議席配分をきめその後で政党内の得票数の多い順に候補者を当選させる併用制（西ドイツの国会議員選挙）等がある。

参考：西平重喜（1981）

上記の１組の方法を採用して投票をすることは１つのモデルをつくることである。そのモデルから論理的に導かれることをしらべたり，いろいろな投票のしかたでシミュレーションをしたりすることでその方法のもつ性質が明らかになる。こうした考察をもとに実際に採用する選挙制度はどれがよいのかを論じることは，社会と「科学としての数学」の関係を教えるのに適切な教材のひとつである。

5. 中学校新指導要領『課題学習』との関連

本稿の教材を中学校の『課題学習』で展開することは可能であるし，有意義と考える。他に下のような教育内容が考えられる。

① いろいろな指標を構成し，実際につかってみる

- 肥満度をあらわす指標（たとえばローレル指数）
- 不快指数，洗濯指数，行楽指数，おでかけ指数，寒冷指数，水道凍結指数(テレビ局 TVh の天気予報)
- 食中毒警報の基準（ある種の線形判別関数）
- アルコール依存症の判別のテスト（たとえば久里浜式スクリーニング・テスト）
- 日本酒度……その定義は(比重の逆数－1)×1443 なのだが，酒の甘口，辛口をあらわす指標なのである。

② 組み合わせ理論とその応用（符号理論，バーコード，通信理論）

参考：朝日ソノラマ（1988）

③ 有限幾何の構成とその応用（公理からの理論的な構成と証明，実験計画，デザイン）

点の個数，直線の個数がいろいろの幾何。

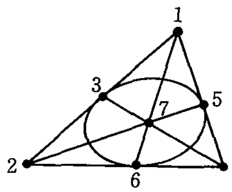
平行な直線がある幾何，ない幾何。

たとえば点が７個，直線が７本しかない幾何（図表 6)。

ここでは証明や論理をつかわなければ１歩もすすめないが，直観も重要である。

実験計画法や符号理論への応用。

図表 6　有限射影幾何の例ＰＧ(2，2)



④ 模様，紋様をつくる

基本パターンをしきつめ，スタンプ押しで壁紙，包装紙をつ

くる。対称性，パターンのリズム，動き，美しさ，安定性等を考察する。ここでは，一応証明や論理とは切り離して扱う。

参考：伏見康治，安野光雅，中村義作（1979），伏見康治（1967-1969）

⑤ 有限集合または離散集合Xの要素からXの要素へある規則で矢印をつけてできるグラフの性質を探究するゲーム（たとえばカプレカル問題）。

参考：Lines（1986）邦訳 片山孝次（1988），広瀬貞樹（1987）

⑥ 論理ゲーム，論理あそび

参考文献

赤池弘次（1983）比例代表制の確率論的分析，統計数理研究所彙報，pp. 129-132

朝日ソノラマ（1988）バーコードのわかる本，朝日ソノラマ

茨木俊秀（1989）議員定数の最適配分法，別冊・数理科学『現象にひそむ非線形』，pp. 170-180

小太刀俊雄（1989）比例代表制とドント式について，選挙 Vol. 42 No. 4，pp. 25-28

笠原晧司（1986）猛虎酔歩之図，数学セミナー，1986年2月，表紙，pp. 27-29

加藤直樹，一森哲男，越山　康（1986）一票の重みを平等にするには——数学からみた定数是正問題，科学朝日，1986年10月，pp. 90-96

佐伯　胖（1980）「きめ方」の論理　社会的決定理論への招待，東京大学出版会

柴田敏雄他（1989）（1900＋X)年m月n日は何曜日？，日本数学教育学会第71回全国算数・数学教育研究大会，1989年8月

西平重喜（1974）比例代表制について，法学セミナー No. 231，1974年12月，pp. 52-60

西平重喜（1977）比例代表制の具体的提案，数理科学 No. 167，1977年5月，pp. 61-68

西平重喜（1981）比例代表制 国際比較にもとづく提案，中央公論社

広瀬貞樹（1987）7641の不思議，数学セミナー，1987年1月，表紙，pp. 27-30

伏見康次（1967-1969）シリーズ　紋様の科学，数学セミナー Vol. 6—8

伏見康次，安野光雅，中村義作（1979）美の幾何学 中公新書 554，中央公論社

北海道算数数学教育会高等学校部会（1990）第8回北海道高等学校数学コンテスト問題，1990年1月，pp. 2-3

Lines, M.（1986）：邦訳 片山孝次（1988）A Number for Your Thoughts：数　その意外な表情，岩波書店，pp. 73-84