内包量指導の課題

須　田　勝　彦
（北海道大学教育学部）

はじめに

「数え主義」というひとつの数学論がわが国の算数教育界を長く支配してきました。これは明治初期の直観主義による算術教育があまりうまくゆかず，体系的見通しを失っている状態に対し，確定的ともいえる回答を与えたものでした。算術教育の目的を「日常の計算に習熟せしめ，生活上必須なる知識を与え，兼ねて思考を精密ならしむる」（小学校令施行規則，1900年）と定め，算術教育から「理論」を追放しました。そしてその当時，もっとも進んだ数学研究の成果のひとつである「数の算術化」（実数を自然数に還元する試み）及び自然数に関するペアノの公系（「数える」という行為による数体系の構成を定式化したもの）を理論の基礎に採用し，数認識の基礎から「量」を追放しました。

数え主義の立場からは，確定した算術の対象は数以外にはありません。数量的知識を教えることは目的にふくまれますが，それは社会生活に必要な知識として度量衡の諸単位，諸単位の関係を教えるのであり，たとえば　5 m+3 m=8 m　という式は存在しません。あるのは　5+3=8　という数の計算だけです。したがって「量」を教えるとはいわず，「名数」を教えると考えられました。まして「長さとはどういう量か」という問いなど，藤沢理論からはあってはならないものでした。この問いを教育の場で答えることの困難さを藤沢が理解していたことも注目に値します。小倉金之助などによる数学教育の改良運動は小学校にもさまざまな影響を及ぼし，量が復権する内的条件も芽生えましたが，その運動自体，数学論として深められるよりはむしろ天皇に一元的に帰一する国家体制の一翼を担う小学校教育に吸収・解体されてしまいました。

藤沢理論に対する本質的批判を可能にしたのは①「数学教育は数学を教える教科である」(1)という新しい目的論をたて，かつ②「数の背景には量があり，量の土台には実在がある」(2)という新しい数学論に基づき，③「量の体系こそ算数教育の主柱である」(2)という教育内容論を，具体的な教材のレベルまでをふくめて集団的な実践的研究として展開した遠山啓をはじめとする数学教育協議会の活動であったといえます。さきの「名数」という考え方と量の立場との違いは次のように述べられています。「たとえば　2 kg+3 kg　という計算をやらせると，たいていの子どもは，おそらく，2つのおはじきと3つのおはじきを思い浮べて　5　という答えを出して，それに　kg　という単位をつけて　5 kg　とするだろう。それで，ともかく答えはあっている。──しかし，はたしてこれで十分であろうか。そのような疑問から量の体系は出発する。──2 kg+3 kg　という重さの加法をもたらした原因はいったい何なのか。そこまでさかのぼって考えなければ　2 kg+3 kg　の本当の意味はわかったとはいえないはずである。──そこには物体の合併という事実がひかえている。」(2)

（1）　遠山啓「数学教育の基礎」（『現代教育学講座』9）1960年，岩波書店

（2） 遠山啓・長妻克亘「量の理論」1962年，明治図書

このような説明は本質的に藤沢理論をのりこえています。ここを出発点として自然数とその計算，小数，分数とその計算など，算数教育の中核部分の指導過程の問題が実践的研究のテーマとして登場することができたのです。そしてさらに「数値化されるまでのプロセスは量によってみなそれぞれにちがっている」（上記（2））ことから，「そのちがいをこまかく追求してにて各々の量にそれぞれふさわしい指導法を確立」するという，「豊富多彩な新分野」（上記（2））がひらかれたのです。

ここで強調したいのは，これらはすでに研究され尽くしたことではなく，文字どおり「新分野」としてきりひらかれた，という点です。多くの先生からお叱りを受けることと思いますが，私は，量指導の体系が提唱されてすでに30年経ちますが理論的な側面にしても指導過程の問題にしても，本質的な前進はそれほどなされなかったと考えています。外延量，内包量をとわず，依然として新しいプランの提起が待たれており，また60年代初期に発表されたような「古い」プランも，まったく新鮮さを失っていないのが現状だろうと思います。

内包量という概念も先の「数の背景には量があり，量の土台には実在がある」という考え方から導かれました。数え主義のように，数を，数えるという人間の行為に一元的に還元する立場をとりません。数は量から抽象されます。ところで，量から数を抽象するありかたは，客観的実在に人間が主体的に働きかける行為，そして客観的実在を全ての人間に共有可能な平易な普遍的言語で記述しようとする試みに根ざしています。同時にそれは，数概念の発展のいくつかの局面で異なる姿でたちあらわれます。

1．分離量の世界の形成と自己展開

まず，個物の世界，すなわち「同じもの」とか「違ったもの」とかいった区別，すなわち集合の世界を確立します。そして同じ質から成り立っている「同じもの」の集まりは「もの」としてはそれぞれ違ったもの（同じ集合に属するリンゴのおのおのは同一のリンゴではなく，別なリンゴである）ですが，その集合の要素であるという以外の質を失う時，たとえば他の集合と一対一対応がつくとかつかないとかを問題にする時，集合の内部の差異性も失われ，量の概念が生まれてきます。個物の世界へのこのような働きかけから生まれる量が，自然数の最初の切片の形成にほかなりません。この時，いくつかの自然数が獲得されると共に，異なる自然数同士の関係（集合の合併，集合の差などによる），異なる自然数の構成可能性など，重要な数学的概念の形成が可能となります。これを最初の分離量の世界の形成と自己展開と呼んでおきます。この段階の論議のテーマは，直観主義のように，ただ実在（直観対象物）をぼんやりながめるだけでは数の概念は生まれないこと，数え主義のように個物の世界（有限集合）の確立を抜きに「数える」という行為だけから自然数を導くことは不可能であることなどといった命題に関わっています。

また，乗法の導入もこの段階でなされます。分離量の自己展開の筋道に位置づけるとすれば，自然数の乗法の中心ともいえる $a\times(b+1)=a\times b+a$ （及び $a\times 1=a$ と共に，ペアノの公理による自然数の乗法の定義）を数え足しで説明するのが自然です。しかし，同じ乗法を，そのじきあとに有理数に拡張しなければならないとすれば，これを分配法則一般のなかで指導することも考えられます。同時に，そのさいの乗法の定義を分離量の世界だけに通用するものにすべきか，連続量への拡張が容易なものにすべきかの選択がなされます。ここに，内包量指導に

かかわる最初の問題が現われてきます。

2．連続量の測定（分離量化）による数の拡張

自然数の全体が獲得される以前に，子どもの自然認識の網の目を広げる課題とのかかわりで，連続量が認識対象となります。そこでは「長さとはなにか」「液量とはなにか」など私たちにとってもっとも重要なテーマが，それぞれの量に固有な「変換による保存性」及び量認識の中核ともいえる「比較」を通じて明らかにされます。単位導入の4段階指導などの実践も意義あるものとは思いますが，それ以上に重要なのが先の「各々の量にそれぞれふさわしい指導法を確立」（遠山・長妻）することだと思います。このことを忘れて4段階指導だけがひとり歩きをし，その結果「…の指導の際，間接比較はどうするのか」というような問題がたてられることもありますが，指導の必然的な流れに間接比較が入らないのであれば，無理に入れる必要はないと思います。

それぞれの量が抽象されるとともに，それらを表す新しい数（分数，小数）が獲得されます。それらの量の合併として新しい数における加法が定義され，減法も拡張されますが，この問題は内包量指導の課題ではありませんので省略します。

新しい数の乗法，及び除法の導入，計算規則の説明にはやはり，連続量が用いられます。連続量の乗法の一般的な形は比例する2つの量とそれを結びつける比例定数となるような量の関係です。この比例定数となる量を，比例という関数関係を意識する以前に用いるための概念装置が「1あたり量」にほかなりません。

比例はそれ自体はたとえば6年生のひとつの単元の指導内容ですが，子どもの認識発展のなかでは，より素朴ないくつかのレベルで，比例の概念が成立しているように思われます。たとえば，まだ数の概念がほとんどない子どもでも，位相的に同形な2つの絵を見たとき，そのユークリッド計量による同定より優先してプロポーションによる同定が用いられるでしょう。(絵本のぞうさんが，おおきさにおいてどんなに象からかけはなれ，ねずみさんに近いものであっても，子どもはほとんど例外なく，ぞうさん，と考えるでしょう。)この時期，このような認識を手がかりにたくさんのことばを獲得していきます。また，小学校低学年くらいの子どもでは日常の買物などで「1こ100円のあめ」ということの意味は，ほとんどの子どもにおいて，仮にたくさん買って安くなることがあろうとも，確定しています。このような認識が成立していれば，乗法を教えることができます。

内包量を連続量に限定し，分離量の1あたり量や，内包量の数値化に用いられる量の片方が分離量であるものを区別して「1あたり量」とか「外延量的内包量」と呼ぶことも有効な概念装置であろうと思います。しかし，2年生の乗法の導入や，小数，分数の乗除の意味付けの段階でも連続量が用いられることはありえることです。そして比例を関数として教える段階でも，片方，あるいは両方の量が分離量であってもさしつかえないと考えられます。とすれば同じ指導段階にふたつの別な概念が使われることになり，議論が煩雑になるような気がします。従って私は，この段階までの比例定数になる量を「1あたり量」，5年生の内包量指導以降を「内包量」と呼ぶことにします。

「1あたり量」と「内包量」は従って「比例定数となるような量」という点では同じです。それでは，どのような認識のレベルのうえでの違いがあるでしょうか。この点についての考え方のいかんで，それぞれの段階での指導内容の違いが生まれてくるでしょう。乗法指導における

「１あたり量」について，私の考えを整理しておきます。

「１あたり量」は，外延量とは違った新しい量を導入することを目的とするものではなく，あくまでも現実の中のわかりやすい量を用いて乗除演算の意味付けや演算規則の説明が自然にできることを目的とします。そのため，それまでにできている素朴な比例感覚に依拠しながら，それを意識化することがねらいになります。乗法の導入の時の「うさぎと耳」「３輪車のくるま」「キャラメルの箱とキャラメル」や，小数，分数の乗除の導入の時の「一様なあつさにペンキをぬる」とか「一様に水をまく」という例はこの段階で適切なものだろうと思われます。１あたり一定を教えるのに適切なのが，自然物か人工物かという問題は私には少しも重要なものとは思われません。また，乗法の交換法則もこの問題とは独立に指導できます。

３．内包量指導の目的

これまでの「１当り量」に基づく乗除の指導とは違って，５年生の内包量の指導は，次のような目的を持っています。

①，これまで，乗法，除法の意味づけのなかで，さまざまな１当り量が用いられてきました。内包量指導ではそれを高い立場から見なおすことになります。数学教育のすべての段階にわたって，「乗法」の概念は発展して行きます。小学校では，有理数の範囲まで４則計算が確実にできるようにすることが大きな目標ですが，計算ができるというだけでは，より高次の量的関係を扱うことができまでん。実際，多くの子どもたちは「計算」としての乗法はなんとかこなせても，その意味は素朴な「累加」のイメージしか残っていないことがあります。その結果，どんな時に掛けるのか，どんな時にたすのか，そのつど試験勉強的に「憶え」なければならないという忌まわしい事態が生じます。（中学生の数学嫌いの大きな発生源と思われます。）

②，外延量とは違った新しい量を自然や社会現象のなかから抽出します。長さ，重さ，時間などの基本的外延量とともに，「密度」や「速さ」などの量は子どもの自然認識の結節点ともいうべき，重要な位置を占めています。外延量の時と同様「数値化されるプロセスは量によってそれぞれに違ってい」ます。つまり，それぞれの内包量の抽象過程には固有の困難があることを忘れてはなりません。例えばいかに密度を「物質固有の量」として抽出するか，外延量としての重さからどう分離するかという問題は，子どもの科学的認識を形成するうえでの基本問題の一つとさえいえるでしょう。「均等な物質の密度」や「等速運動の速さ」などを，「１当り自明な」「外延量的内包量」などと呼ぶ考え方もありますが，密度概念の形成の重要さを理解していないものと思われます。また反対に，物理量としての密度を教えるのは困難ではないか，それよりも「目に見える身近かな量でおしえては」という考え方もあるかも知れません。私はこのような考え方には反対です。困難さを持つことは，子どもたちの知的好奇心にこたえる楽しい授業を実現するための必要条件なのです。速さについても「速さは目に見えない」「時間は目に見えない」などといって指導の困難さを指摘するだけの議論もありますが，どのように楽しい授業が実現できるのかという方向で考えることが教育の本来の在り方だと思います。子どもたち，とりわけ小学校高学年の子どもたちの知性は，適当な条件を整えることによってすばらしい発展・飛躍をとげます。内包量の授業はそのような機会のひとつでありたいと思います。

③，内包量は６年生の「比例」から始まる関数指導体系の出発点になります。正比例関数の指導では，比例する２量の比例定数として内包量が用いられます。したがって，比例の指導をどう構想するかによって内包量の指導が異なってきます。たとえば，等速運動の解析を中心に比

例の指導を展開しようとするなら，内包量の指導ではいかに等速運動の概念を明らかにするか，速さの概念の抽象過程をどうするかが重要な研究課題となります。

私は関数指導体系の出発点を「実在の量的変化の解析」におき，もっとも単純な量的変化として等速運動をその最初に位置付けます。

4．「均等分布」「平均」について

これまで，内包量の指導で「均等分布」をどう考えるかという問題が多くの議論を集めてきました。内包量を考えることができるのは，なんらかの一様な世界，素朴な比例感覚の成り立つ世界，1当りが一定の世界が前提となります。1当りがどこもばらばらで，定まっていない世界では内包量を考えることはできません。

象がもし，その時々でねずみのプロポーションになったり，ねこの姿になったり逆にねずみがよく象の姿になったりねこの形になったりする世界では絵本の象はおそらく象だとはおもわれないでしょう。ことばの体系も私たちとはまったく違ったものとなるに違いありません。同様に，100gで80円の肉があったとしても，同じ種類の肉の同じ量が2万円だったり，20円だったりする店ではおそらくは乗法が意味を持たないでしょう。

しかし，現実には完全に均等な現象はほとんど存在しません。そこで提案されている一つの考え方は，一般に1当り量を考えるのは厳密には不均等な現象に対して「均等にならす」あるいは「平均する」という思考操作が働いているのだから，それをイメージできるようなものを導入に使ったほうがよい，というものです。そこから「不均等なつぶ」の状態を考えることのできる「こみ具合」とか「収穫度」などの量を典型として導入することが提案されます。しかし，私は必ずしも賛成できません。不均等なものを「ならす」という操作つまり「理想化」の操作はたいへん大切だと思いますが，それは「均等であれば1当り量が考えられる」からに他なりません。均等なものについて1当り量を考え，それがどんなにすばらしいものかがわかってはじめて「理想化」の必然性があるのです。

厳密には均等ではないといっても，オーダーというものがあります。砂の混じった砂鉄は均等ではありません。それに比べると例えばコップのなかの水は均等と考えて差し支えありません。これを否定したら，どんな科学的概念も定義できないのではないかと思います。モーターで動く自動車は，斜面を転がるパチンコ玉の運動と対比すれば，等速運動といえるでしょう。これは子どもも認めることです。また数学的にも，1次関数を教える前に，一般の関数は一様変化ではないからといって，微分法から先に教えることは誤りです。1次関数がわかってはじめて，一般の関数を1次関数で近似しようという考えができるのです。

乗法，除法の導入に用いた「ペンキをぬる」とか「畑に水をまく」という状況設定も，均等性を前提にしているでしょう。仮に均等ではなくても，状況設定から明らかなのであり，それを疑うことは大人のへりくつといえます。1当り一定が自明だから説明に用いることができるのです。このことと内包量指導の問題とのかかわりを考えてみましょう。内包量の指導で「密度」や「速さ」を教える場合，「1当りが一定」ということはけっして自明ではありません。「密度」を量として，つまりなんらかの方法で比較できるものとして理解したとして，それが「体積と重さ」に関係していること，そして単位体積あたりの重さ数値化できることを知るのはまさに科学的概念形成のいちばん大切な課題なのであり，またその発見の前提に「均等性の意識化」（不均等性の意識化ではありません）があると思います。

従って内包量の指導は，均等性の意識化から入り，関係する二つの外延量を分離し，除法で表現することの必然性を導くという過程が不可欠であると考えます。

付記…小論は1992年8月に開かれた数学教育協議会第40回大会（函館）で発表したレポートに若干の加筆・修正を加えたものである。