関数指導の一環としての
高等学校数学「数列」の授業プラン【第三部　解説編】

——階差数列の研究を中軸に据えて——

高　橋　哲　男
(稚内北星学園大学情報メディア学部)

目　次

本稿は、本誌に掲載の高橋哲男・小丹枝みゆき「関数指導の一環としての高等学校数学「数列」の授業プラン【第二部　授業案編】――階差数列の研究を中軸に据えて――」の解説編である。【授業案編】の数学的裏付けや授業展開上注意すべき点などについて説明している。なお、同じく本誌に掲載の高橋哲男「関数指導の一環としての高等学校数学「数列」の授業プラン【第一部　本論編】――階差数列の研究を中軸に据えて――」も併せてご参照いただきたい。

1　数　　列

1.1 数列

数列を定義する。有限数列、無限数列の違いについても触れる。

問題 1.

規則が簡単には表せない数列があることを知らせたい。そこで、$\{d_n\}$ の規則を発見させる。

最初に $\{d_n\}$ を出すと難しすぎて投げ出されるおそれがあるので、単純な規則をもつ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ をもってきて、$\{d_n\}$ にも取り組んでみようと思わせる。

$\{d_n\}$ は自然数のみを取る数列であり、偶数ならば半分にし奇数ならば 3 倍して 1 を加える操作を繰り返してできている。「どんな自然数から始めてもこの数列はやがて 1 になる」という「角谷の問題」*1 である。クラスのみんなで意見を少しずつ出し合えばなんとか規則を発見できるだろう。プログラミング教育の観点からは、「角谷の問題」は for 文（繰り返し文）と if 文（条件判定文）の練習問題にもなる素材である。

$$\{a_n\}:20,17,14,11,8,\boxed{5},\boxed{2},\boxed{-1},\boxed{-4},\boxed{-7}$$

規則：次々に 3 ずつ減らす。

$$\{b_n\}:\frac{2}{27},\frac{2}{9},\frac{2}{3},2,6,\boxed{18},\boxed{54},\boxed{162},\boxed{486},\boxed{1458}$$

規則：次々に 3 倍する。

$$\{c_n\}:1024,-512,256,-128,64,-32,16,\boxed{-8},\boxed{4},\boxed{-2},\boxed{1},\boxed{-\frac{1}{2}}$$

規則：次々に $-\frac{1}{2}$ 倍する。

$$\{d_n\}:19,58,29,88,44,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,\boxed{16},\boxed{8},\boxed{4},\boxed{2},\boxed{1}$$

規則：偶数ならば半分にし奇数ならば 3 倍して 1 を加える。

＊1　足立恒雄「いわゆる「角谷の問題」について」（数学セミナーリーディングス『代数学への招待』日本評論社、1979 年参照。

1.2 規則性のない数列

数列のほとんどは規則性がないことを伝える。このプリントで扱える数列の範囲がいかに狭いかを教える。今学習していることがどんな学習内容の一部なのかを知らせることは、数列の授業に限らず重要であろう。

規則性のない数列の例が「西武ライオンズの順位」や「コイン投げ」である必然的理由はないが、まったく規則がなく各項が独立な場合（コイン投げ）と独立ではないと考えられる場合（西武ライオンズの順位）を並べることには意義があると思われる。

1.3 数列の項

第 n 項という言い方を用いる。教科書にある「一般項」は必要ない。

「初項」も使わない。「初項」を第 0 項にするか第 1 項にするかであるが、第 0 項にしてみる。結局どちらでもいいのであるが、a_0 にすることによって、等差数列、等比数列の a_n が、それぞれ、

$$a_n = a_0 + dn$$
$$a_n = a_0 r^n$$

になって、教科書のように「$n-1$」が出てこないというメリットがある。

問題 2.

「数列は、規則と a_0 がわかれば決まる」ことを納得する問題である。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
g_n	9	28	14	7	22	11	34	17	52	26	・・・
h_n	12	6	3	10	5	16	8	4	2	1	・・・

1.4 数列の本質

集合と写像の概念を学んでいれば、こういう説明もあってもいいのではないか。

2 等 差 数 列

2.1 漸化式

規則性がない数列は扱えない。となると、数学で扱える数列では、（無規則な）数の並びが先にあるのではなく規則の方が先にあり数列の本質を担っていると見るべきであろう。漸化式はその規則を表現する。「本質的なもの、大切なものをまず教えよ」という教授学的大原則*2 に立ち、等差数列よりも前に漸化式を教える。

---

*2　コメニウス『大教授学』などに述べられている。

問題 3.

以前に書いた規則を定式化する。

$$b_{n+1}=3b_n$$

$$c_{n+1}=-\frac{1}{2}c_n$$

問題 4.

a_0 と漸化式から数列を決定する練習問題である。

(1). $a_0=0$, $\quad a_{n+1}=a_n+2$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	・・・

(2). $a_0=1$, $\quad a_{n+1}=2a_n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	・・・

定理 1. 「数列は、(漸化式と a_0) がわかれば決まる。」の下線部は空けておき、生徒に埋めさせるようにしたい。

2.2 等差数列の漸化式

等差数列は、漸化式が $a_{n+1}=a_n+d(a_{n+1}-a_n=d)$ という形で表される特殊な数列である。

問題 5.

(1). $a_0=4$, $\quad a_{n+1}=a_n+3$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	・・・

(2). $a_5=7$, $\quad a_{n+1}=a_n+2$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	−3	−1	1	3	5	7	9	11	13	15	・・・

(3). $a_7=5$, $\quad a_{n+1}=a_n-4$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	33	29	25	21	17	13	9	5	1	−3	・・・

問題 6.

数列 $\{d_n\}$ と同じ規則の数列の練習問題である。これは、等差数列との比較をさせるためである。あるもの（等差数列）の性質は、他のもの（等差数列でないもの）との相対性によって定まるものである。$\{d_n\}$ は、「任意の一項」では数列のすべての項を決めることができない。$a_3=10$ は確定するが、a_2 は 20 と 3 両方の可能性がありどちらかに確定しない。その事実を通して、

等差数列の特殊性を浮かび上がらせたい。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	?	?	?	10	5	16	8	4	2	1	・・・

定理 2.　ここでも下線部は空けておくようにする。

2.3 等差数列の公差

「等差数列の公差は、任意の（相異なる）二項がわかれば決まる」ことがわかればよい。公差が決まれば漸化式が決まり、したがって等差数列が決まる。

問題 7.

(1)．$a_5=6$,　　$a_7=14$　　⇒　　$d=4$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	-14	-10	-6	-2	2	6	10	14	18	22	・・・

(2)．$a_1=-3$,　　$a_6=-7$　　⇒　　$d=-2$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	5	3	1	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	・・・

(3)．$a_4=-3$,　　$a_5=-1$　　⇒　　$d=2$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	・・・

(4)．$a_2=-4$,　　$a_8=-4$　　⇒　　$d=0$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	・・・

定理 3.　等差数列 $\{a_n\}$ は、任意の 2 項 a_i, a_j ($i<j$) がわかれば決まる。このとき、公差 d は、

$$d=\frac{a_j-a_i}{j-i}$$

2.4 等差数列の a_n

問題 8.

数列の a_n の式を求めるために、まず a_0 を求める問題である。表向きは**問題 5** と変わりがないが、問題 5 が等差数列の漸化式を意識しながら一項ごとに値を求めていったのに対し、ここで

は、与えられた一項から直接 a_0 を導けるようにするのがねらいである。そのため、(3) の a_{2005} のように項番号の大きい値を与えたり、(4) のように項番号を与えず a_n を提示するようにしている。

(1)． $a_4=23,\qquad a_{n+1}=a_n+5$

$$a_0=a_4-4\times5=3$$

(2)． $a_6=-3,\qquad a_{n+1}=a_n-2$

$$a_0=a_6-6\times(-2)=9$$

(3)． $a_{2005}=50000,\qquad d=4$

$$a_0=a_{2005}-2005\times4=41980$$

(4)． $a_k=4,\qquad d=3$

$$a_0=a_k-k\times3=4-3k$$

定理 4． 公差 d と任意の一項 a_n がわかれば等差数列は決まるのだから、このとき当然 a_0 も決まっている。

$$a_0=a_n-dn$$

となる。ここから、

$$a_n=a_0+dn$$

という等差数列の a_n が求められる。

問題 9．

(1)． $a_4=23,\qquad a_{n+1}=a_n+5$

$$a_n=3+5n$$

(2)． $a_6=-3,\qquad a_{n+1}=a_n-2$

$$a_n=15-2n$$

(3)． $a_{2005}=50000,\qquad d=4$

$$a_n=41980+4n$$

(4)． $a_n=4,\qquad d=3$

$$a_n=a_0+3n$$

問題 10.　等差数列の a_n が n の一次式になることの逆を証明する問題である。

$$a_n=p+qn$$
$$a_{n+1}=p+q(n+1)$$

より辺々を引いて、

$$a_{n+1}-a_n=q$$

これは等差数列の定義そのものであるので、題意は証明された。

定理 5.　(1) は**問題 9** で、(2) は**問題 10** で証明されている。

3　階　差　数　列

3.1 直線による平面の分割

問題 11.　平面を最大の数にわけようとするならば、

・　どの二直線も平行にならない。

・　どの三直線も一点で交わらない。

ようにすればよい。

(1). 4

(2). 7

(3). 11

(4). 16

後に示されるが、n 本引いた場合の平面の分割数は、

$$\frac{n(n+1)}{2}+1$$

となる。

(5) は、階差数列の規則性に気づいてもらうねらいがある。$\{p_n\}$ の階差数列が 1,2,3,4,・・・になっていることから、$p_6, p_7. p_8, p_9$ は求められるし、p_{100} も、この場で計算する必要はないが時間をかければ求められることがわかればよい。

また、$p_0=1$ も忘れずに確認しておく。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・	100	・・・
p_n	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	・・・		・・・

3.2 階差数列と a_n

階差数列を定義する。一般の数列と同じように、b_0 から始めることにする。

問題 12.　規則性がない (1) の例と、規則性がある場合を対比させる。ここでは、階差数列の規則性を求める必要はないが、(4) (5) (6) では階差数列が等差数列になっていることに触れておく。

また、a_{2005} は求められるだろうかという問いは、階差数列の項を次々に足し合わせればいず

れ求められるという答を期待している。次ページで、階差数列の和を用いた a_n の表し方をまとめることになる。

(1)．規則性はないが、もとの数列がわかる範囲で階差数列もわかる。
(2)．2,4,8,16,32,・・・(2^n)
(3)．6,12,20,30,42,・・・(この数列の階差数列が 6,8,10,12,・・・の等差数列になる)
(4)．4,6,8,10,12,14,・・・(公差 2 の等差数列)
(5)．2,2,2,2,2,2,・・・(公差 0 の等差数列)
(6)．0,0,0,0,0,0,・・・(公差 0 の等差数列)

$$
\begin{array}{rll}
 & \cancel{a_1}-a_0 & =b_0 \\
 & \cancel{a_2}-\cancel{a_1} & =b_1 \\
 & \cancel{a_3}-\cancel{a_2} & =b_2 \\
 & \cancel{a_4}-\cancel{a_3} & =b_3 \\
 & \vdots & \\
+) & a_n-\cancel{a_{n-1}} & =b_{n-1} \\
\hline
 & a_n-a_0 & =b_0+b_1+b_2+b_3+\cdot\cdot\cdot+b_{n-1} \\
 & a_n & =a_0+(b_0+b_1+b_2+b_3+\cdot\cdot\cdot+b_{n-1})
\end{array}
$$

定理 6．前ページで a_{2005} は求められるだろうかと問うたことの帰結である。

そして、数列の和を求める必要性について気づいてもらい、まず、等差数列の和の研究に入る。

3.3 等差数列の和

問題 13．等差数列の a_n の求め方を使って、最初に a_{100} を求める。そして、オーソドックスな行き方だが、

$$
\begin{aligned}
S &= 2+5+8+11+14+\cdot\cdot\cdot+299+302 \\
S &= 302+299+296+293+290+\cdot\cdot\cdot+5+2
\end{aligned}
$$

の片々を加えて

$$
\begin{aligned}
2S &= 304+304+304+304+304+\cdot\cdot\cdot+304+304 \\
2S &= 304\times 101 \\
S &= \frac{1}{2}\times 304\times 101
\end{aligned}
$$

問題 14．前の問題の一般化である。

定理 7．前ページの問題の結論を定理としてまとめておく。

$$\frac{(2a_0+dn)(n+1)}{2}$$

展開して n の二次式になることも確認しておきたい。

問題 15．**定理 7**.を使う練習問題である。

(1)．$a_0=7, d=6$ の等差数列の、a_0 から a_{10} までの和。

407

(2)．$a_0=-10, d=4$ の等差数列の、a_0 から a_{20} までの和。

630

(3)．$a_0=5, d=4$ の等差数列の、a_0 から a_n までの和。

$(5+2n)(n+1)$

問題 16.　自然数の和を求める問題である。

定理 8.　自然数の和

$$0+1+2+3+\cdot\cdot\cdot+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

通常は 1+2+3+・・・を思い浮かべるが、0+1+2+3+・・・としても、結果はよく知られている

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

である。

問題 17.　自然数の和の公式**定理 8.** を使う練習問題である。

以下では、直線による平面の分割で得られる数列 $\{p_n\}$ が、階差数列が等差数列になることを確認しておく。

問題 18.　階差数列が等差数列になる数列の a_n を求める練習問題である。

(1)．3,4,8,15,25,38,54,・・・

階差数列 $\{b_n\}$ は、

$$1,4,7,10,13,16,\cdot\cdot\cdot$$

b_0 から b_{n-1} までの和は、$\frac{(3n-1)n}{2}$。よって、

$$a_n=1+\frac{(3n-1)n}{2}$$

(2)．−1,−7,−13,−17,−19,−19,−17,−13,−7,1,11,23,37,・・・階差数列 $\{b_n\}$ は、

$$-8,-6,-4,-2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,8,10,12,14,\cdot\cdot\cdot$$

b_0 から b_{n-1} までの和は、$\frac{(2n-18)n}{2}$。よって、

$$a_n=1+\frac{(2n-18)n}{2}$$

いずれも n の二次式になることを確認する。

問題 19.　上の問題の逆である。

$$a_n=pn^2+qn+r$$
$$a_{n+1}=p(n-1)^2+q(n+1)+r$$

から辺々を引いて、

$$a_{n+1}-a_n=(2p)n+(p+q)$$

となる。よって、階差数列 $\{b_n\}$ は、$b_0=p+q$、公差 $2p$ の等差数列である。

定理 9. **問題 18.** と **問題 19.** で証明済みの定理である。

3.4 平方数の和

問題 20. 階差数列に平方数が出てくる数列である。

(1). $\{b_n\}$: 0,1,4,9,16,25,36, ・・・

(2). $\{c_n\}$: 1,3,5,7,9,11, ・・・

(3).

$$c_n=2n+1$$
$$b_n=n^2$$

(4).

$$a_n=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

定理 10. 前ページの問題を解くなかでこの定理は導かれている。ただし、この問題の主眼は平方数の和の公式を求めることよりはむしろ、階差数列の階差数列が等差数列になる数列は、n の三次式で表される(微分で言えば三次関数の二階微分が一次関数になる)ことを理解させる点にある。

問題 21. 平方数の和の公式がわかったので、発展課題として立方数の和の公式も求めておく。

4 等 比 数 列

4.1 ハノイの塔

ハノイの塔の問題を通して等比数列とその和を求めることを目指す。

問題 22. 3 枚くらいから初めて、2 枚、4 枚、5 枚などに挑戦させる。

予想については、階差数列が等比数列になっていることを手がかりにするだろうと推定しているが、$h_{n+1}=2h_{n+1}+1$ の漸化式に気づく生徒もいるかもしれない。その漸化式が正しいことは後ほど確認するのだが、意見が出ればここで確かめてもよい。

(1).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	・・・
h_n	0	1	3	7	15	31	63	127	・・

(2).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	・・・
i_n	1	2	4	8	16	32	64	128	・・

4.2 等比数列の a_n

ハノイの塔の数列 $\{h_n\}$ の階差数列 $\{i_n\}$ を例として、等比数列を定義する。

問題 23.

(1). $a_0=\frac{3}{16}$, 　　$a_{n+1}=2a_n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	3	6	12	24	48	96	・・・

(2). $a_5=2$, 　　$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	486	162	54	18	6	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	・・・

(3). $a_7=5$, 　　$a_{n+1}=-2a_n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	$-\frac{5}{128}$	$\frac{5}{64}$	$-\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{2}$	5	-10	20	・・・

定理 11.　前ページの問題を通して獲得される定理である。ここでも下線部は空けておく。

問題 24.　次ページでまとめられる定理を導く問題である。

(1). $a_5=6$, 　　$a_6=12$ 　　$\Rightarrow$ 　　$r=2$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	3	6	12	24	48	96	・・・

(2). $a_5=2$, 　　$a_7=18$ 　　$\Rightarrow$ 　　$r\pm3$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	$\pm\frac{2}{243}$	$\frac{2}{81}$	$\pm\frac{2}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\pm\frac{2}{3}$	2	± 6	18	±54	162	・・・

(3). $a_4=2$, 　　$a_7=-16$ 　　$\Rightarrow$ 　　$r=-2$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	-1	2	-4	8	-16	32	-64	・・・

(4). $a_2=-4,\qquad a_7=-4\qquad\Rightarrow\qquad r=1$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
a_n	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	・・・

定理 12. 等比数列 $\{a_n\}$ は、任意の 2 項 a_i, a_j （ $i<j$ ）がわかれば決まる。

n	0	・・・	i	・・・	j	・・・
a_n	a_0	・・・	a_i	・・・	a_j	・・・

このとき、公比 $r=\sqrt[j-i]{\frac{a_j}{a_i}}$。$\sqrt{x}$ が $\sqrt[2]{x}$ の省略表記であることにも触れたい。

定理 13. 等比数列 $\{a_n\}$ で、a_0 と公比 r がわかっているとき、

$a_n=a_0r^n$

4.3 等比数列の和

当面の課題は h_n を求めるための等比数列 i_n の和であるが、一般の等比数列の和を先に教えた方がよいだろう。そのために、公比 2 という特殊な等比数列 i_n ではなく公比 3 の数列の和を考える。

問題 25. オーソドックスな方法で教える。

$$\begin{aligned} S &= 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^9 + 3^{10} \\ 3S &= 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{10} + 3^{11} \end{aligned}$$

から辺々を引いて、

$$2S=3^{11}-1 \qquad \text{より} \qquad S=\frac{3^{11}-1}{2}$$

問題 26. 前の問題を一般化する。

$$\begin{aligned} S &= a_0r^0 + a_0r^1 + a_0r^2 + a_0r^3 + \cdots + a_0r^{n-1} + a_0r^n \\ rS &= a_0r^1 + a_0r^2 + a_0r^3 + a_0r^4 + \cdots + a_0r^n + a_0r^{n+1} \end{aligned}$$

から辺々を引いて、

$$(1-r)S=a_0r^0-a_0r^{n+1} \qquad \text{より} \qquad S=\frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r}$$

定理 14.　前ページの問題の結果を定理としてまとめておく。公比1の等比数列では例外的に前ページの結果が使えないので、場合分けをしてまとめる。

$$\begin{cases} \dfrac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r} & (r \neq 0) \\ a_0(n+1) & (r=1) \end{cases}$$

問題 27.　次の等比数列の和を求めてみよう。

(1). $7(2^{11}-1)=14329$
(2). $2(1-(-1)^{21})=4$
(3). $5(2^{n+1}-1)$

問題 28.　次のページで定理としてまとめられるように、

$$1+2+4+8+16+\cdot\cdot\cdot+2^n=2^{n+1}-1$$

定理 15.

$$1+2+4+8+16+\cdot\cdot\cdot+2^n=2^{n+1}-1$$

ハノイの塔の問題の $\{h_n\}$ は、階差数列 $\{i_n\}$ が $i_0=1, r=2$ の等比数列だと予想できた。この予想が正しいと考えると、

$$\begin{aligned} h_n &= h_0+(i_0+i_1+i_2+\cdot\cdot\cdot+i_{n+1}) \\ &= h_0+(1+2+4+\cdot\cdot\cdot+2^{n-1}) \\ &= h_0+(2^n-1) \\ &= 2^n-1 \end{aligned}$$

問題 29.

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= 2h_n+1 \\ h_{n+2} &= 2h_{n+1}+1 \end{aligned}$$

の辺々を引いて、

$$\begin{aligned} h_{n+2}-h_{n+1} &= (2h_{n+1}+1)-(2h_n+1) \\ h_{n+2}-h_{n+1} &= 2(h_{n+1}-h_n) \\ i_{n+1} &= 2i_n \end{aligned}$$

予想.　ここになくてもよい問題ではあるが、等比数列的現象を理解するために、あってもよい問題であろう。

$$h_{64}=2^{64}-1=(2^{10})^6\times2^4-1$$

であるが、2^{10} を 10^3 で近似すると、h_{64} は 10^{19} のオーダーになる。一方、一年は

$$60\times24\times365=31536000=5.256\times10^5$$

分であるから、1000000 年程度ではとても終わらないことになる。

4.4 等比数列の階差数列

問題 30.

(1). 1,2,4,8,16,32,64,・・・

(2). 3,6,12,24,48,96,・・・

(3). $36,18,9,\frac{9}{2},\frac{9}{4},\frac{9}{8},\cdots$

問題 31.

$$a_n = a_0 r^n$$
$$a_{n+1} = a_0 r^{n+1}$$

より辺々引いて、

$$a_{n+1} - a_n = a_0(r-1)r^n$$

となるので、$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は $b_0 = a_0(r-1)$、公比 r の等比数列である。

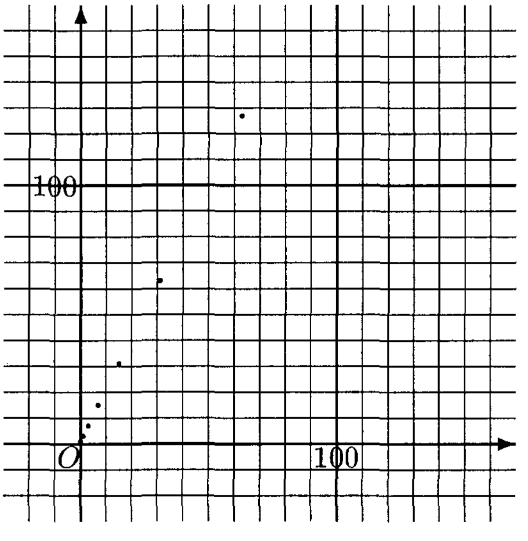
定理 16.

前ページの問題が証明になっている。

5　数列の固有ベクトル

5.1 ハノイの塔と座標平面

問題 32.



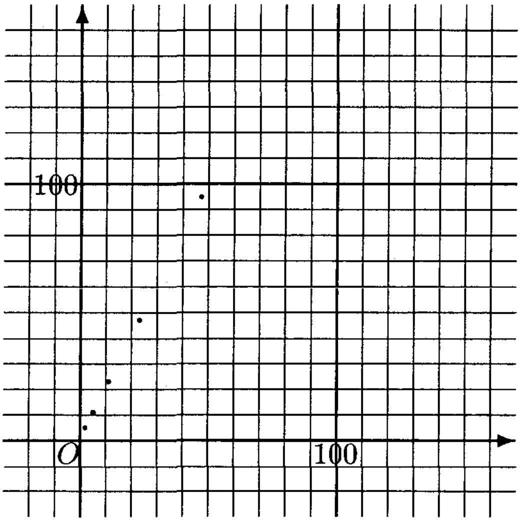
この点はすべて、直線 $y = 2x + 1$ 上にある

5.2 漸化式と一次関数

問題 33.

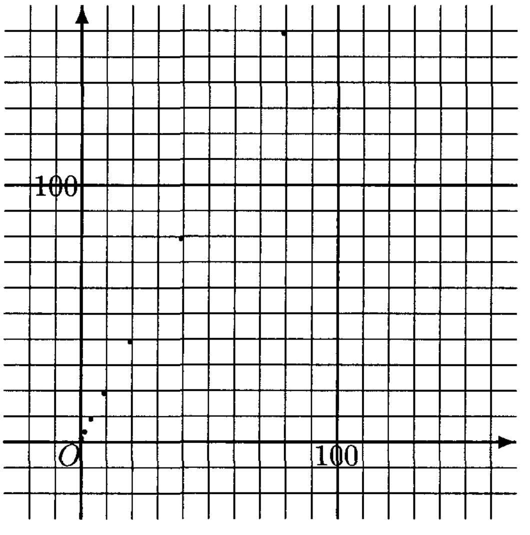
(1).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	・・・
a_n	2	5	11	23	47	95	191	383	・・・



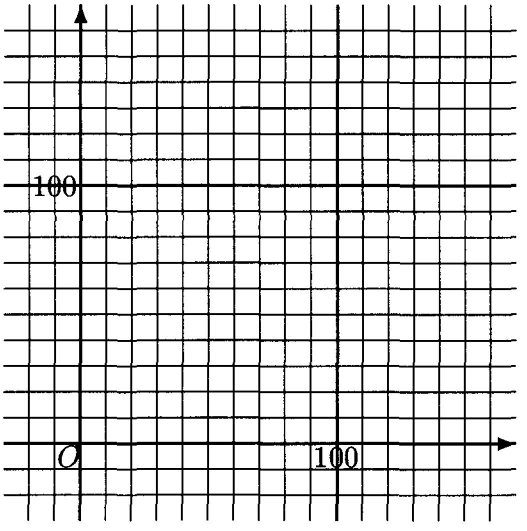
(2).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	・・・
a_n	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	4	9	19	39	79	159	・・・



(3) .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
a_n	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$\cdots$



5.3 固有ベクトル

問題 34.

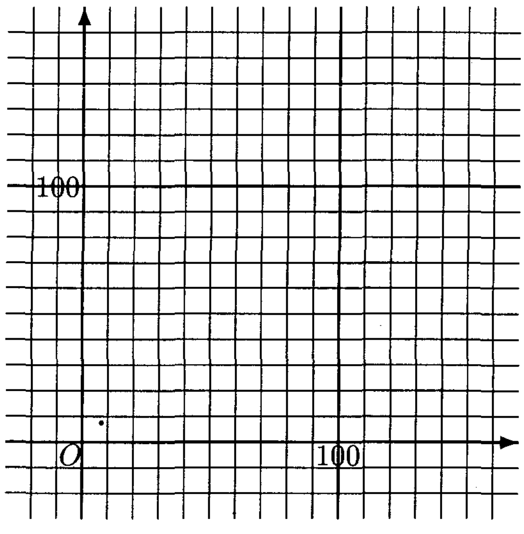
$$a_0=\frac{3}{5}a_0+3$$

となるような a_0 を求めればよい。この方程式を解いて、

$$a_0=\frac{15}{2}$$

を得る。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	・・・
a_n	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	・・・



問題 35.

$$a_0=pa_0+q$$

となる a_0 を求めればよい。この方程式を解いて、

$$a_0=\frac{q}{1-p}$$

5.4 固有ベクトルと等比数列

問題36.

$$h_{n+1}=2h_n+1, \qquad h_0=0$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	・・・
h_n	0	1	3	7	15	31	63	127	・・・
h_n+1	1	2	4	8	16	32	64	128	・・・

$\{h_n+1\}$ は公比2の等比数列なので、

$$h_n+1=1\times 2^n$$

ここから、

$$h_n=2^n-1$$

となる。

6　数学的帰納法

6.1 $(2^n)^2-1$ の問題

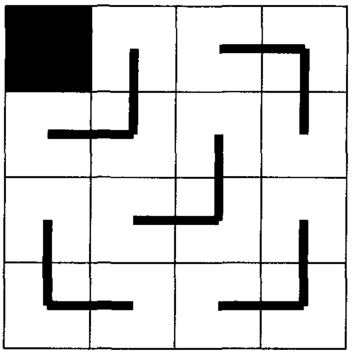
問題37.

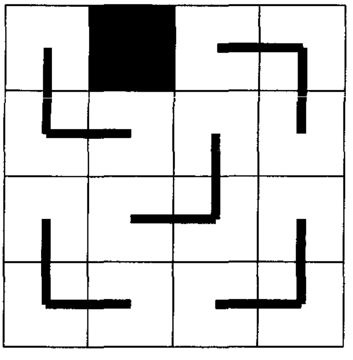
n	0	1	2	3	4	5	・・・
a_n	0	3	15	63	255	1023	・・・

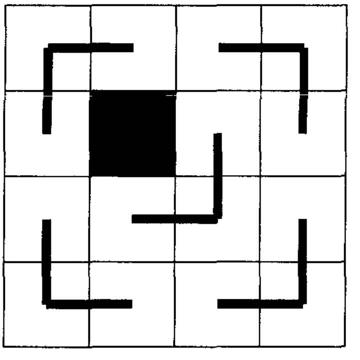
a_n がいずれも3で割り切れることは、ここでは割り算によって確かめられればよい。後に数学的帰納法を用いて証明される。

6.2 $(2^2)^2$ 欠損チェス盤問題

問題 38. 基本パーツを以下の図のように置くことで埋め尽くすことが可能である。

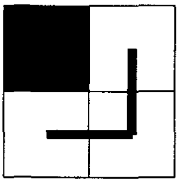






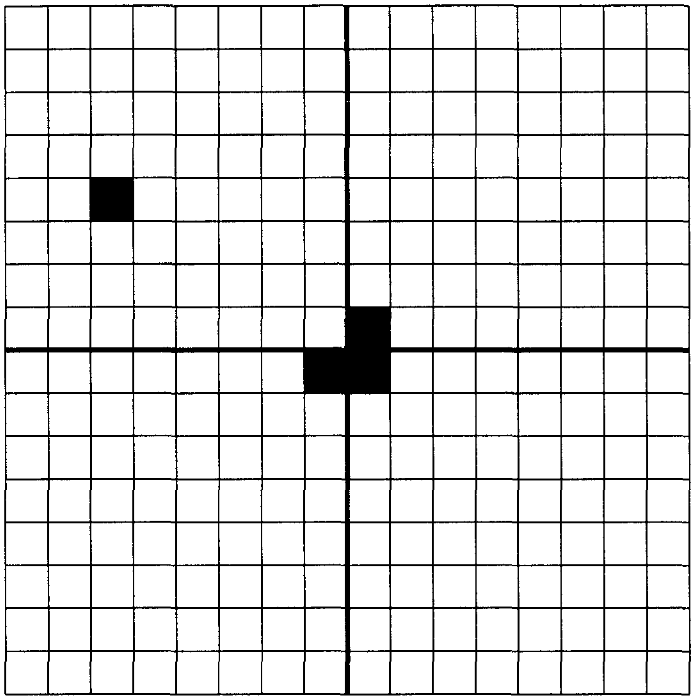
6.3 欠損チェス盤問題の一般化

2×2 の欠損チェス盤が基本パーツ一つで埋め尽くせるのは明らかである。



8×8 の欠損チェス盤についても手分けして作業をさせると、欠損箇所がどこであろうとも埋め尽くし可能であることが実証できる。

いま、16×16 のチェス盤を、8 × 8 のチェス盤 4 つと考える。そして、左上のどこかに欠けている部分があるとする。ここで、基本パーツを、チェス盤の中央付近に図のように置いてみる。



すると、右上、右下、左下のいずれも、8 × 8の欠損チェス盤になる。8×8の欠損チェス盤は、基本パーツ埋め尽くすことができるのだった。

だから、この16×16の欠損チェス盤は基本パーツで埋め尽くすことができる。

チェス盤の対称性により、16×16の欠損チェス盤は欠けた部分がどこにあっても基本パーツで埋め尽くすことができる。

同じ論理によって、$(2^n)\times(2^n)$の欠損チェス盤は、欠けた部分がどこにあっても基本パーツで埋め尽くすことができる。このことから、$(2^n)^2-1$が3で割り切れることも証明された。

6.4 数学的帰納法

ところで、2 × 2の欠損チェス盤が基本パーツで埋め尽くされること、そして、$a_1=(2^1)^2-1=2^2-1=3$が3で割り切れることは明らかである。

このように、

(1). a_1が3で割り切れる。

(2). a_kが3で割り切れるときa_{k+1}も3で割り切れる。

の二つが成り立てば、$n\geqq1$のすべてのa_nが3で割り切れることが証明される。

これを一般化して、nについてのある命題p_n（例えば4^n-1は3で割り切れる）について、

(1). p_1が成り立つ。

(2). p_kが成り立つときp_{k+1}が成り立つ。

の二つが成り立つとき、$n\geqq1$ であるすべてのnについてp_nは成り立つ。このような証明を数

学的帰納法による証明という。

数学的帰納法による証明の書き方を説明する。

問題 39. 数学的帰納法により、$n \geqq 1$ のとき n^3+2n は 3 の倍数であることを証明しよう。

(i) $1^3+2\times1=3$ が 3 の倍数であることは明らかである。

(ii) $k \geqq 1$ に対して k^3+2k が 3 の倍数であると仮定する。

$$(k+1)^3+2(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+2k+2=(k^3+2k)+3(k^2+k+1)$$

であるが、仮定により k^3+2k は 3 の倍数である。また、$3(k^2+k+1)$ も 3 の倍数であるから、$(k+1)^3+2(k+1)$ は 3 の倍数である。

(i) と (ii) により、題意は証明された。

7　フィボナッチ数列と黄金比 τ

7.1 フィボナッチ数列

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	・・・
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	・・・

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	・・・
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	・・・
g_n	1	2	1.5	1.66	1.60	1.62	1.61	1.61	1.61	1.61	・・・

以上から、g_n は n を大きくするとだいたい 1.61 に近づくようだ。

フィボナッチ数列を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \qquad (n \geqq 0)$$

となる。行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めると、

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\lambda-1=0$$

より、

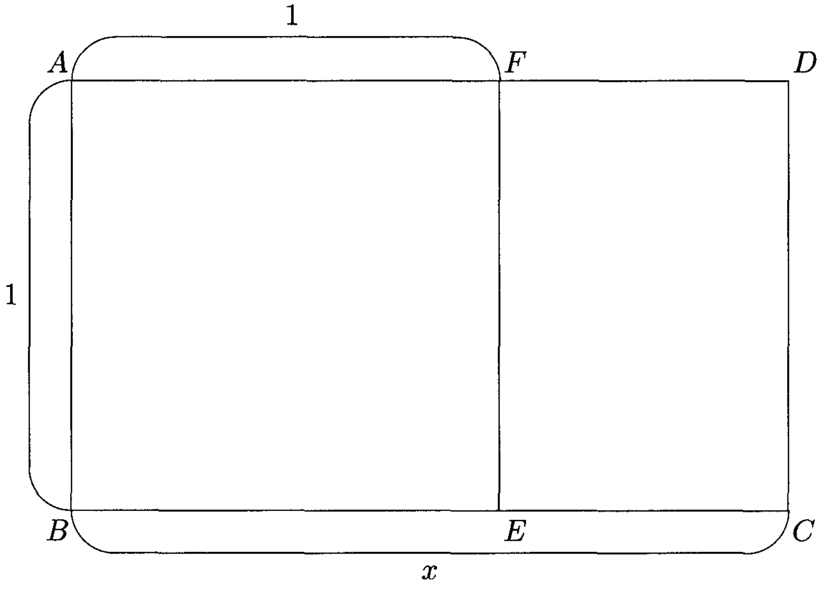
$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

を得る。このうち

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

が、1.61に近い。

7.2 黄金比



$DF=1-x$ である。長方形ABCDと長方形DFEC が相似であることから $AB:BC=DE:FC$ が成り立つ。これより

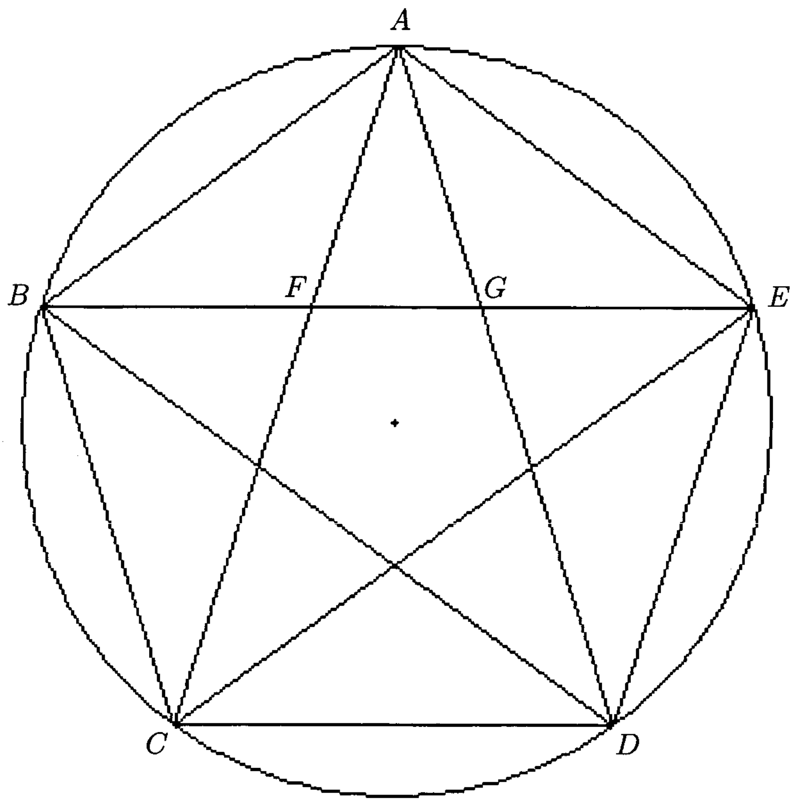
$$1:x=(1-x):1$$
$$x(1-x)=1$$
$$x^2-x+1=0$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

を得るが $x>0$ より

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\sqrt{5}=2.236$・・・なので、x は小数ではだいたい1.618くらいだ。

7.3 正五角形の対角線



$BF=y$ とおく。$\triangle ABF$ と $\triangle ECD$ が相似であることより、

$$AB:BF=EC:CD$$
$$1:y=x:1$$
$$y=\frac{1}{x}$$

$\triangle AFG$と$\triangle ACD$ が相似であることより、

$$AF:FG=AC:CD$$
$$y:(x-2y)=x:1$$
$$x(x-2y)=y$$
$$x^3-2x-1=0$$
$$(x+1)(x^2-x-1)=0$$
$$x=-1,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$x>0$ より

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

7.4 黄金比 τ

π, e と並ぶ特別な実数 τ（タウ）に触れておく。

$$\tau = 1,618033989 \cdot \cdot \cdot$$