



Title	1. 豊平川の排水網構成とHortonの第一法則の検討
Author(s)	徳永, 英二
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 15, 1-19
Issue Date	1966-03-14
DOI	10.14943/gbhu.15.1
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/13903">http://hdl.handle.net/2115/13903</a>
Type	bulletin (article)
File Information	15_p1-19.pdf



[Instructions for use](#)

# 1. 豊平川の排水網構成と HORTON の 第一法則の検討

徳 永 英 二

(北海道大学理学部地球物理学教室)

— 昭和 40 年 10 月 受理 —

## I. 緒 言

侵食地形学の問題を、流域と水路の発達という線に沿って、数量的に研究する際、排水網の構成を分析することは、一つの重要な課題である。この問題に関する重要な法則として、よく知られているのに、HORTON<sup>1)</sup>の水路数の法則(第一法則)、及び水路長の法則(第二法則)がある。

現在までのところ、これらの法則にもとづき、世界各地でかなりのデータがとられ、その物理的内容に関しても、統計熱力学的な立場から、LEOPOLD, LANGBEIN<sup>2)</sup>等の研究がなされている。

豊平川の錦橋合流点より上流部の流域に関して、上記の2法則を中心に、これまでの他の数量的地形学の方法をも用いて、水路構成と流域の発達に関する考察を行なったので、ここに報告する。

又、豊平川からのデータを基礎に統計的な分析を行なうとともに、これまでの他の資料を参考にしながら、HORTONの水路数の法則に検討を加えた。この中で、HORTONの水路数の法則は事実を正確に反映するためにも、又運用のためにも、理論的考察を行なうためにも不十分な点があるように考えられるに至った。排水型や、排水網の物理的内容を究明する際にも、より普遍的で、事実により合致する式が必要となり、その目的のために、新しい式を提起する。

## II. 豊平川の排水網構成

### 1. 調査地の概況

調査地は第1図及び第1表に示すとおり、豊平川流域の山地水源地で、錦橋合流点より上流、416.7 km<sup>2</sup>の区域である。これを、小樽内川流域(AA)、白井川流域(AB)、薄別川流域(BA)、豊平川本流流域(BB)、と4つの流域に分け、それぞれについて調査を行なうとともに、

1) 平田徳太郎訳; 河川および流域の発達と侵食, 日本林学会誌, 37, No. 1, 37-40.

R. E. HORTON; Erosional Development of Streams and their Drainage Basins, Hydrophysical Approach to Quantitative Morphology, Bull. Geol. Soc. Amer., 56, No. 3 (1945).

2) L. B. LEOPOLD and W. B. LANGBEIN; The Concept of Entropy in Landscape Evolution, U. S. Geol. Surv. Profess. Paper. 500-A (1962), A 14-A 19.

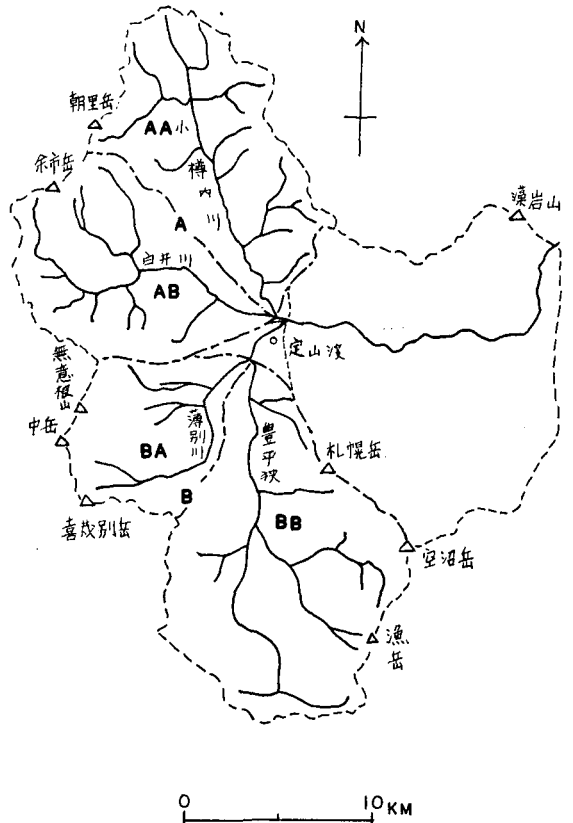
参考のため、小樽内川—白井川流域 (A)、薄別川—豊平川本流流域 (B) と2つに分割しても、若干の調査を行なった。

高度は全体として、270 m ~ 1,488 m の間にあり、これらの流域の殆んど部分は、北海道開発庁発行の5万の1図幅「定山溪」<sup>3)</sup>、「銭函」<sup>4)</sup>、「杜溪珠」<sup>5)</sup>に含まれ、全体として、地表部は第3紀から第4紀にかけての火山岩及び火山噴出物からなりたっており、その内容も、かなり複雑である。

## 2. 水路の構成と発達状況

水路に関する資料は、空中写真 (4万分の1) と地形図 (2万5千分の1) によった。

空中写真の判読に際しては、遠藤・鶴田<sup>6)</sup>の方法により、流水の有無に拘らず、細長く溝状に洗掘され、しかも下の水路と連絡しているものを水路と定義し



第1図 調査流域の略図  
Fig. 1. Surveyed area.

第1表 調査地の概況

Table 1. Outline of surveyed areas.

流域記号 Sign of watershed	水系名 Name of stream	流域面積 (km <sup>2</sup> ) Drainage area	高度の範囲 (m) Height
AA	小樽内川	106.2	282~1,096
AB	白井川	96.2	282~1,488
BA	薄別川	64.1	355~1,461
BB	豊平川本流	149.6	355~1,318
A	小樽内川 白井川	203.0	270~1,488
B	豊平川本流 薄別川	213.7	270~1,461

3) 土居繁雄; 北海道地下資源調査所5万分の1地質図幅「定山溪」.

4) 杉本良也; 北海道地下資源調査所5万分の1地質図幅「銭函」.

5) 藤原哲夫; 北海道地下資源調査所5万分の1地質図幅「杜溪珠」.

6) 遠藤泰造・鶴田武雄; 北海道の水源地帯における流路の構成について, 林業試験場北海道支場年報, (1962), 11.

た。但し、新しい崩壊地に発生した一時的なリルは除外した。4万分の1の空中写真で判読できる最小のもので、最上端の一すじの水路を、HORTON<sup>7)</sup>の水路階級にもとづく、1次の水路と定義した。なお、これは、2万5千分の1地形図に於いて、等高線がV字形をしている最小単位と、殆んどの場合一致した。この意味では、STRAHLER<sup>9)</sup>のV-shaped conter methodをより厳密に適用したものと云える。1次水路の合流したものを2次の水路とし、2次と2次との合流したものを3次とし、以下同様に定義した。なお、この定義による2次の水路とは、1次と1次の合流点から、2次又はより高次な水路に合流する点までのsegmentをさし、3次、4次、……、に関しても同様に各segmentをさす、STRAHLER<sup>9)</sup>の方法によった。

同一流域内において、水路の数、および水路の平均長と次数との間において、下記の(II-1)、(II-2)の関係が存在することは、HORTON<sup>10)</sup>の法則としてよく知られている。

即ち、同一流域内において、 $S$ はその流域の水路の最高次数、 $O$ はある水路の次数、 $N_0$ は $O$ 次の水路の数、 $l_1$ は1次の水路の平均長、 $l_0$ は $O$ 次の水路の平均長とすれば、

$$N_0 = r_b^{(S-O)} \quad (\text{II-1})$$

$$l_0 = l_1 r_l^{(O-1)} \quad (\text{II-2})$$

という関係が存在する。ここで、 $r_b$ を分岐比、 $r_l$ を流長比と定義し、(II-1)を水路数の法則(HORTONの第一法則)、(II-2)を水路長の法則(HORTONの第二法則)と呼ぶ。(II-1)は水路次数と各々の水路数との間に、逆等比数列の関係が存在することを示すものであり、(II-2)は水路の次数と各々の水路の平均長との間の等比数列の関係を示すものである。従って、片対数紙上に、横軸に次数をとり、縦軸に水路の数、平均長をとって、各点をプロットすると、いずれも直線関係になるはずである。

AA, AB, BA, BB各流域に関して、次数と水路数の関係をプロットしたものが、第2図である。次数と水路の平均長の関係を示すものが、第3図である。

以上の2法則に関して、今回調査した、各流域を検討してみると、全体的にみて、明らかに水路数の法則が成立っていると云える。但し、最高次数及びそれより1次低い次数に関しては、少し直線からはずれる傾向がある。これは非常に重要なことを含んでいるが、この点に関しては、III章で述べる。

次数と水路の平均長の関係については、(II-2)式の関係は認められるが、水路数の法則に比べて、点のはるかに、変動し密接な関係ではない。しかし、AA, AB, BA, BBの各流域に比べ、統合されたA, B流域は、多くの水路が平均されるため、より明確な直線関係が認めら

7) 前出 1), 35.

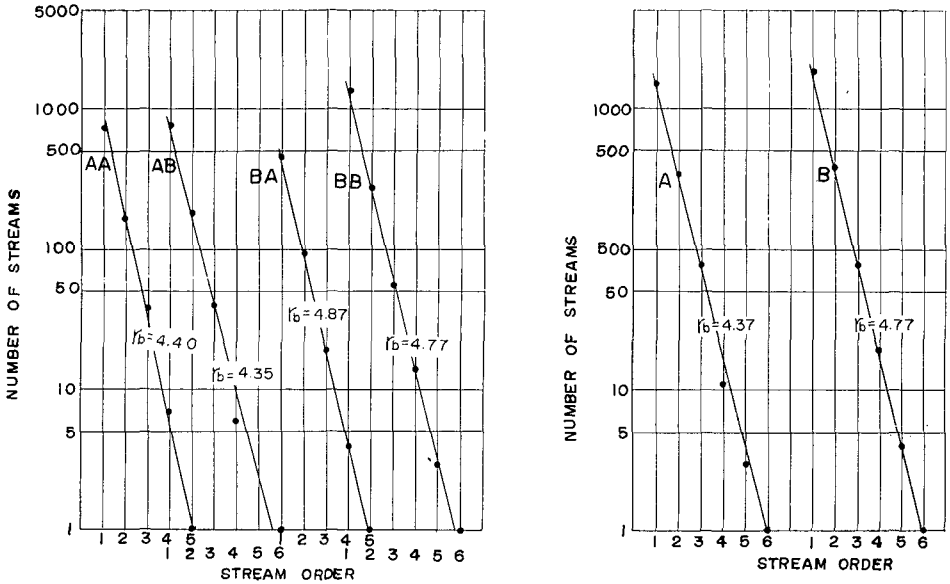
8) M. MORISAWA; Accuracy of Determination of Stream Lengths from Topographic Maps, Trans. Amer. Geophys. Union, 38, No. 1, (1957), 86-87.

9) A. N. STRAHLER; Quantitative Analysis of Watershed Geomorphology, Trans. Amer. Geophys. Union, 38, No. 6, (1957), 914.

10) 前出 1), 37-40.

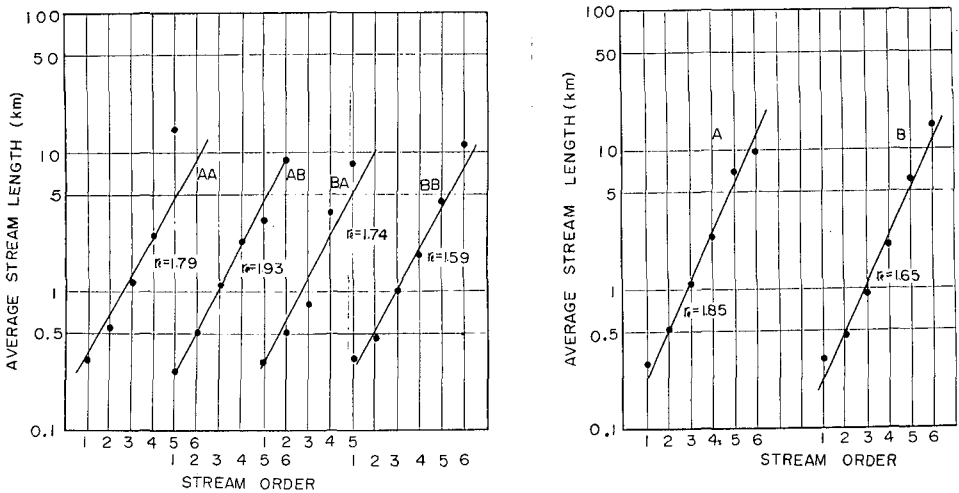
れる。

分岐比  $r_b$  の計算に当っては、STRAHLER<sup>11)</sup> の方法に従い、重みつき平均分岐比を求めた。流長比に関して同様の計算を行なった。例として、A 流域に関する分岐比の計算を第2表に掲



第2図 水路の次数と水路数との関係

Fig. 2. Regression of number of stream segments on stream order.



第3図 水路の次数と水路の平均長との関係

Fig. 3. Regression of average stream length on stream order.

11) S. A. SCHUMM; Evolution of Drainage Systems and Slopes in Badlands at Perth Amboy, New Jersey, Bull. Geol. Soc. Amer., 67 (1956), 603.

げる。それぞれの流域に関して、分岐比、流長比を求めるとともに、各次数間の分岐比、流長比、各次数の水路の総数、水路の平均長、及び、流域内の水路の発達状況を示す排水密度、流域の単位面積当りの水路数である水路頻度等を、第3表にまとめた。

第2表 分岐比の求め方(例, A流域について)

Table 2. Method of deriving weighted mean bifurcation ratio.

1 次 数 Stream order	2 水 路 数 Number of streams	3 分 岐 比 Bifurcation ratio	4 分岐に関する水路の数 No. of Streams involved in ratio	5 3×4 Products of Columns 3 and 4
1	1490	4.27	1839	7852.5
2	347	4.47	427	1908.7
3	78	6.00	91	546.0
4	13	4.33	16	69.3
5	3	3.00	4	12.0
6	1			

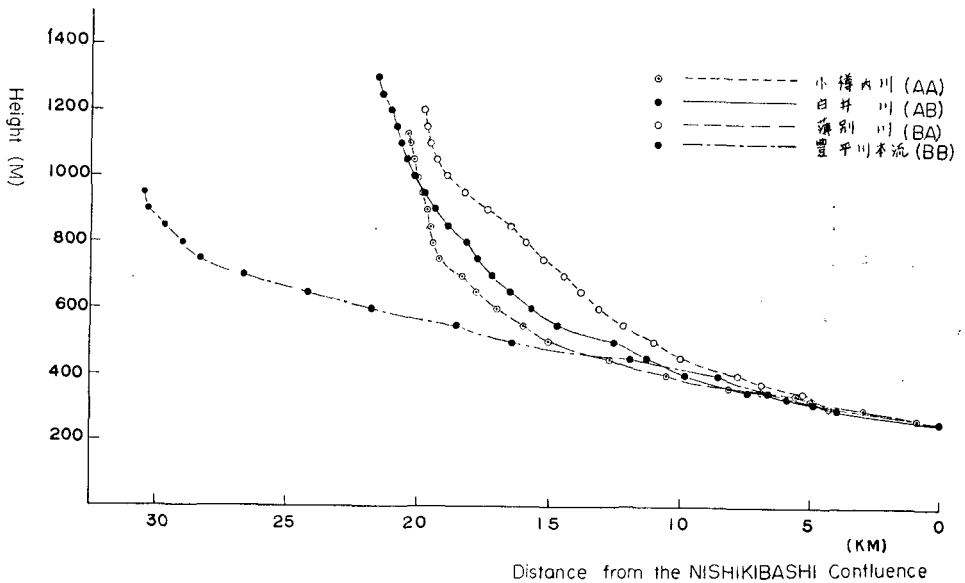
4の合計=2377 5の合計=10388.4 分岐比  $r_b=4.37$

第3表 水路構成の状況

Table 3. Composition of stream system.

流 域 号 Sign of water- shed	各流数の水路数と平均長, 1次違いの分岐比と流長比						排水密度 Drainage density (l/km)	水路頻度 Frequency of streams (n/km <sup>2</sup> )	分 岐 比 Bifurca- tion ratio	流 長 比 Length ratio	
	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)					
	Order of streams	Number of streams	Mean stream length (km)	Bifurca- tion ratio	Length ratio						
	(0)	1	2	3	4	5	6				
AA	(1)	725	168	38	7	1	3.87	8.84	4.40	1.79	
	(2)	0.33	0.55	1.16	2.53	14.78					
	(3)	4.32	4.42	5.43	7.00						
	(4)	1.66	2.09	2.19	5.83						
AB	(1)	764	181	40	6	2	3.85	10.33	4.35	1.93	
	(2)	0.27	0.50	1.11	2.34	3.26					8.83
	(3)	4.22	4.53	6.67	3.00	2.00					
	(4)	1.86	2.21	2.11	1.40	2.70					
BA	(1)	454	93	19	4	1	3.56	8.91	4.87	1.74	
	(2)	0.31	0.52	0.82	3.63	8.28					
	(3)	4.88	4.89	4.75	4.00						
	(4)	1.66	1.57	4.47	2.28						
BB	(1)	1325	277	56	14	3	4.48	11.12	4.78	1.59	
	(2)	0.33	0.53	1.01	1.84	5.43					11.4
	(3)	4.78	4.95	4.00	4.67	3.00					
	(4)	1.45	2.15	1.82	2.95	2.11					
A	(1)	1490	349	78	13	3	3.86	9.53	4.37	1.84	
	(2)	0.30	0.53	1.13	2.44	7.10					9.72
	(3)	4.27	4.47	6.00	4.33	3.00					
	(4)	1.75	2.15	2.16	2.91	1.37					
B	(1)	1834	385	78	19	4	4.33	10.86	4.77	1.61	
	(2)	0.32	0.48	0.94	2.19	6.14					15.00
	(3)	4.76	4.94	4.11	4.75	4.00					
	(4)	1.49	1.98	2.32	2.80	2.44					

河川の平衡縦断面が指数曲線になることはよく云われている。各流域に関して、その主流の縦断面をとったのが第4図である。2つの水路が合流している場合、いずれが主流であるかを決定するに当たっては、次数の異なる場合は、より高次なものを主流とし、同じ次数の場合には、最上流からの距離の長いものを主流とした。



第4図 主流の縦断面

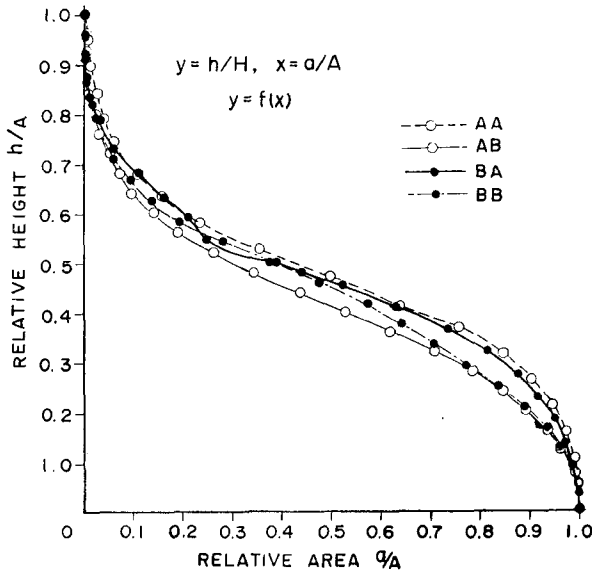
Fig. 4. Longitudinal profiles of main streams.

流域山形の概況を知るために、いかなる高度が、いかなる大きさの面積を占めるかを示す高度面積曲線 (hypsothetic curve) が、従来より用いられている。これは縦軸に高度を、横軸にその高度より上部の面積をとって、プロットしたものである。しかし、流域相互間を比較するためには、縦軸に流域最低点と当該高度までの差 ( $h$ ) の全流域高度差 ( $H$ ) に対する比をとり、横軸にその高度より上部の面積 ( $a$ ) の全流域面積 ( $A$ ) に対する比をとってプロットし、dimensionless な表示にしなければならない。これを percentage hypsothetic curve と呼び、この曲線は STRAHLER<sup>12)</sup> により研究され、山体の体積変化状況から侵食の stage を決定するのに用いられている。著者も、各流域の stage を決定するのに、この方法を用いた (第5図)。

今回調査した流域に関して云えば、percentage hypsothetic curve によれば、全体として壮年期にあるものと考えられる。このことは、縦断面においても、薄別川の高度 900 m ~ 500 m の地点を除いて、概略は、一応上に凹な曲線となり、明確な屈折点、飛躍点が認められないことと一致するように考えられる。

個々の流域について観察すれば、山地体積の占める割合は各流域間に大きな差は認められ

12) 前出 9, 919-920.



第5図 各流域のパーセンテージヒプソメトリックカーブ

Fig. 5. Percentage hypsometric curves of respective watersheds.

ず、厳密な議論は出来ないが、AB, BB 流域は小さい。一方、AB, BB 流域の水路の最高次数は、他の2流域に比べて1次高く6次であり、水路頻度は他の2流域に比べて、10%も高い値を示している。排水密度は、BBが4.48 l/kmと他の流域よりも高く、次にAA; 3.87, AB; 3.85と同程度の値と示し、BA流域が3.56と最も低い。これらのことは、BB流域が最も解析が進んでおり、壮年期の中でも最も進んだ段階にあるものと解釈され得る。又AB流域に関しては、流域面積が比較的小なるにも拘らず、6次の水路を有し、各次数の平均水路長は短い、水路数は多い。このことは山地体積の占める割合の小なることとも合せて、BB流域に次いで解析の進んだ流域であることを示すのではないかと考える。AA, BA両流域は、前の2流域に比べて、解析が進んでいるとは云えない。特にBA流域に関しては、percentage hypsometric curveにおいて、相対高度0.55付近に偏曲点が存在する。

以上少ない例ではあるが、水路の発達と地形の進化状況に関する考察において、排水密度、水路頻度等による解釈と、percentage hypsometric curveによる解釈とが、ほぼ一致する場合が、相矛盾する場合よりも、今回調査した流域に関しては多い。このことは、今後、数量的地形学の方法により、流域の地形発達を解釈することが可能であることを、ある程度、物語るものである。

分岐比は、いずれも、4.40~4.87の間にあり、これは北海道の他の水源地帯<sup>13)</sup>と同程度である。

水路発達に関する地質の影響であるが、本流域は全体として、第3紀から第4紀にかけて

13) 前出 6), 121.



の噴出岩類が、さまざまな形で、2次的碎屑岩をともなって発達しており、又第3紀の地層を第4紀の火山岩、火山噴出物が被った際の地形や、気候学的な因子、流水による侵食以外の侵食等も影響を及ぼす故、今回は、この関係を明らかにすることは出来なかった。只、新期火山岩類からなる平坦な山頂付近や、崖錐堆積物で被れた区域は、明らかに水路の発達状況はよくない。

### III. HORTON の第一法則の検討

#### 1. HORTON の第一法則に関する考察

現在までのところ、水路数の法則に対して、世界各地でかなり多くのデータがとられてきている。それら研究の中で、下流部、即ち、次数の高い部分では、逆等比数列の式にあてはまらない場合がしばしば報告されている。例えば、SHUMM<sup>14)</sup>は、Perth Amboy の Badland における研究で、片対数紙上にプロットした点を直接結べば、次数の高い部分で、上に凹なる傾向を示したことを指摘している。遠藤・鶴田<sup>15)</sup>は、同一水路系内の最高次数が大きくなるほど、最高次ともしくは、最高次とそれよりも1次低次の水路とが一定の傾向を示す線分からはみ出してくる傾向を指摘している。FARVOLDEN<sup>16)</sup>は非常に多くのデータを提供しているが、著者が観察する限りでは、同様の傾向が認められる。今回調査した豊平川の資料からも同様の結論を得た。

統計学的な立場から云えば、低次なものは、数多くの水路を問題にしており、ある次数の水路をそれより1次高い次数の水路数で除した次数間の分岐比は、中に、相当大きい分岐比や小さい分岐比を持つ小流域を含んでいても、それが平均化され、全体としては一定の値をとるため、片対数紙上において直線からはずれる傾向は少なくなり、一方、次数の高いものは、少ない数の水路数を問題にしており、それだけ、分岐比が個々の流域に関して変動することは充分考えられる。従って、低次な部分において、分岐比が一定の値を示し、高次な部分においてそれと異なる値をとったからと云って、直接、流域形状や地質構造の問題と結びつけることは出来ない。又、この場合、最高次と定義した次数の水路を、更に高い水路に流入する下端までとっているかどうか問題である。

それにしても、これまでの数多くの資料を考察するに、高次な部分において分岐比が小になる場合の方が、多いように考えられる。従って、片対数紙上にプロットされた点を、そのまま結べば、高次な部分において、上に凹なる傾向を示す場合が多いようである。

このことは、高次な部分において分岐比が単なる誤差分布のような変動を持つものではなく、一定の傾向をもって、HORTON の水路数の法則からはずれる傾向を示すものである。従っ

14) 前出 11), 603.

15) 前出 6), 122.

16) R. N. FARVOLDEN; Geologic Controls on Ground-Water Storage and Base Flow, Journal of Hydrology, 1 (1963), 226.

て、最低次から最高次まで、水路数が逆等比数列を示すという、HORTON の法則に対して、より厳密さを要求すれば、疑問が生じてくる。

そこで、今回調査した流域に含まれる、4 次の流域のすべてである 32 の流域に関して、各次数間の分岐比を求め、横軸に各次数間の分岐比、縦軸にその分岐比に対する頻度をとったヒストグラムを作成した (第 6 図)。その際、4 次の流域はすべて、5 次への接続点までとった。

1 次～2 次間の分岐比は、平均約 4.5 であり、4～5 を中心としてほぼ対称な分布を示す。範囲も最も狭く、2～7 である。2 次～3 次間に関しては、平均約 4.4 で、中心はやや小さい方へ片寄り、対称形はくずれる傾向を示している。範囲は 2～9 と最も広範囲である。しかし、6～7 にかけては頻度 0 である。3 次～4 次間に関しては、平均分岐比は 3.6 で最も小さく、2～3 の最小区間が最も多く、分岐比が増大するにつれて、頻度は減少する傾向を示す。範囲は 2 次～3 次間と同程度で、2～8 である。

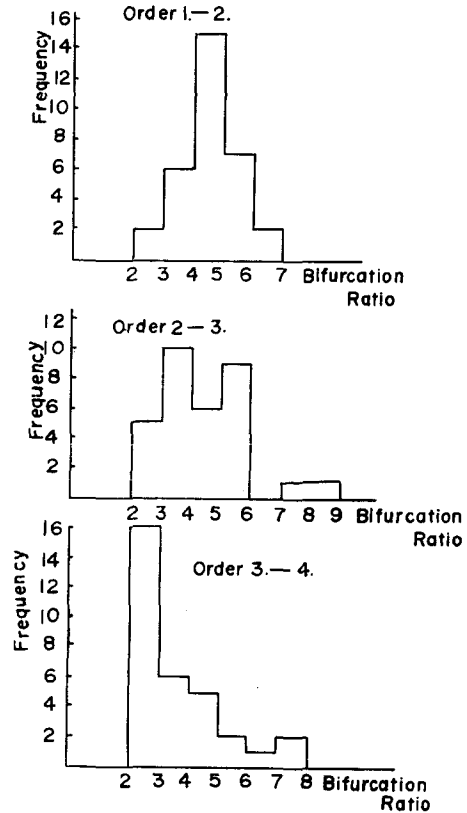
これらのことは、次数が高くなるにつれて、分布の対称性はくずれ、分岐比は減少し、最高次数とそれよりも 1 次低い次数の間の分岐比が、減少する傾向を示す。分布範囲は総体的に見て、次数の高いものの方が広い傾向を示すようである。

このヒストグラムによっても、統計学的な意味で、HORTON のいうように、分岐比が低次なものから高次なものまで一定であるということは、厳密な意味では、問題を含んでいる。

更に議論を進めるために以下のような作業を行なった。

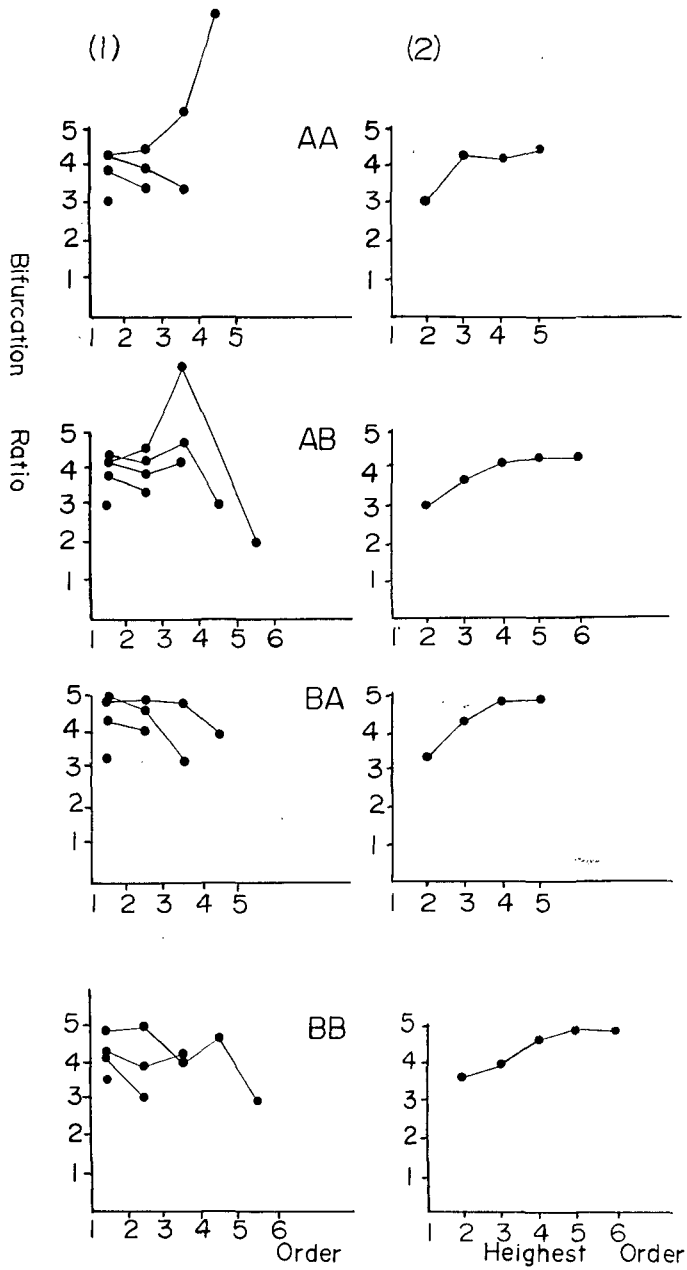
AA, AB, BA, BB 各流域に対して、その流域内に含まれる 2 次の流域に対しては、1 次～2 次間の分岐比の平均値 (1 次の水路の総数を 2 次の水路の総数で除したもの)、3 次の流域に対しては 1 次～2 次間の分岐比の平均値、及び 2 次～3 次間の分岐比の平均値、以下同様に 4 次流域、5 次流域と各次数間の分岐比の平均値を求めた。

第 7 図の左側において、縦軸は分岐比で、横軸は次数、各次数間の分岐比は、その次数間の中間にプロットされている。1 点プロットされたものは、各流域に含まれる 2 次流域の 1 次～



第 6 図 4 次流域における各次数間の分岐比とその頻度

Fig. 6. Frequency of bifurcation ratios between stream numbers of order  $n$  and order  $(n-1)$ , in basins of order 4 in four watersheds, AA, AB, BA, BB.



第7図 (1) 各流域内の最高次数  $n$  次の水路のある次数とそれより1次低い次数間の平均分岐比  
 (2) 各流域内の最高次数  $n$  次の水路の平均分岐比  
**Fig. 7.** (1) Mean values of bifurcation ratios between successive pairs of orders which basins of various orders in respective watersheds have.  
 (2) Mean values of bifurcation ratios which basins of various orders in respective watersheds have.

2 次間の平均分岐比をプロットしたものである。2 点をつらねたものは、3 次流域に関して、1 次～2 次間の平均分岐比、2 次～3 次間の平均分岐比をとり、結んだものである。4 次、5 次の流域に関しても以下同様である。

同次数間の平均分岐比については、最高次数が低いものほど小さくなる。又、最高次数が同じである場合、AA 流域を除いて外は、一般に次数が高くなるに従って、1 次違いの分岐比の平均値は減少する傾向を示す。

第 7 図の右側は、各流域内に含まれる最高次数 2, 3, 4, 5 (但し AA, BA は 4 次迄) の各流域に関し、全体を通しての分岐比の平均値を求めたものである。横軸は流域の最高次数、縦軸はそれらの流域の平均分岐比である。

全体として、高次の流域ほど分岐比は大きくなり、しかも一定の値に近づく傾向がある。

以上の 2 つの作業によって、同一流域内において、統計的には、次数が高くなるに従い、1 次違いの分岐比は減少し、特に最高次とそれより 1 次低い水路との分岐比は、かなり急激に低下する。一般に次数の高い流域ほど、流域全体を通じての分岐比は増大し、一定値に近づく傾向があることが指摘される。

従って、HORTON の式に対する、何らかの補正が必要となってくる。以下第 2 節で、新しい式を提起する。第 7 図のような事実が何故存在するかについての説明はその後で行なう。

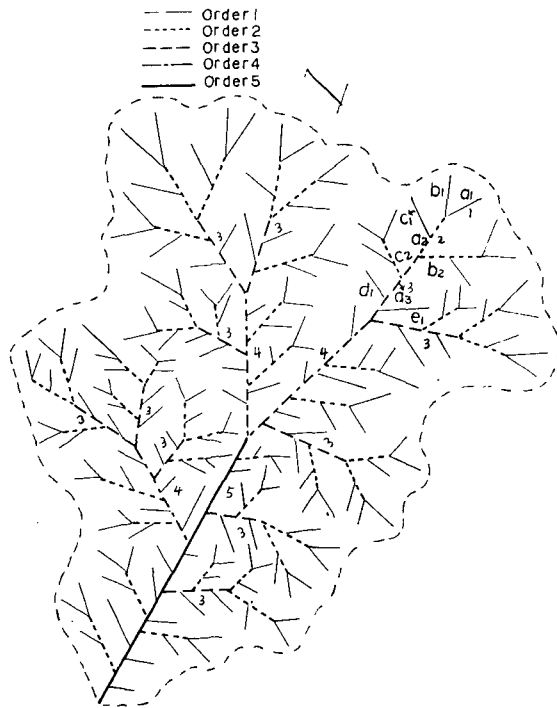
**2. 水路数と次数の関係を表わす、新しい式の展開**

これまで、HORTON の水路数の法則の持つ不完全な点について、検討を加えたわけであるが、更に議論を進め、これまで指摘してきた事実により合致する式を提起したい。水路階級の定義については、これまでと変わらないが、新しい定義を若干つけ加える。

**定 義**

1.  $n \in m$ ;  $n$  次水路に直接流入する  $m$  次水路で、次数の転換に無関係なもの、 $n$  次 1 本につき流入する数の平均。

例. 第 8 図のモデル流域において、 $a_1$ ,  $b_1$  は合流して、2 次水路  $a_2$  を形成するが、 $a_2$  に流入する  $c_1$  は、 $a_2$  の次数の



第 8 図 排水網構成のモデル ( $\epsilon=1, K=2$  の場合)

Fig. 8. Model of the composition of drainage network.

転換に無関係である。このように、 $c_1$ のような流入の仕方をする水路で  $a_2$  に流入するもの数  ${}_2\varepsilon_1=1$  である。3 次水路  $a_3$  に流入する 2 次水路で、次数の転換に無関係なものは  $c_2$  で、 ${}_3\varepsilon_2=1$  である。 $a_3$  に直接流入する 1 次水路は  $d_1, e_1$  のみで、 ${}_3\varepsilon_1=2$ 。

2.  ${}_nN_m$ ;  $n$  次水路が持つ、 $m$  次支流の総数。 $n$  次 1 本に対する平均数

例. 3 次水路  $a_3$  が持つ 2 次水路は、 $a_2, b_2, c_2$  でその数  ${}_3N_2=3$  である。又、 $a_3$  が持つ 1 次水路は直接  $a_3$  に流入する  $d_1, e_1$  の 2 本及び  $a_2, b_2, c_2$  がそれぞれ 3 本ずつの支流を持つから、これらの総計  ${}_3N_1=11$  である。

更に、ここで、2 つの仮定をする。この仮定と実際との対応は後で述べる。

仮 定

1.  ${}_n\varepsilon_{n-1} = {}_{n-1}\varepsilon_{n-2} = \dots = {}_2\varepsilon_1 = \varepsilon$   
 ${}_n\varepsilon_{n-2} = {}_{n-1}\varepsilon_{n-3} = \dots = {}_3\varepsilon_1 = \varepsilon_2$   
 .....  
 .....  
 ${}_n\varepsilon_m = {}_{n-1}\varepsilon_{m-1} = \dots = \varepsilon_{n-m}$
2.  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3} = \dots = \frac{\varepsilon_{n-m}}{\varepsilon_{n-m-1}} = K$

従って、

$$\varepsilon_2 = K\varepsilon, \quad \varepsilon_3 = K^2 \cdot \varepsilon, \dots, \quad \varepsilon_{n-m} = K^{n-m-1} \cdot \varepsilon$$

又、同次数の 2 本の水路が合流して、1 次高い次数の水路をつくり、それに次数の転換に無関係な水路が合流するから、ある次数の水路 1 本に、直接流入する、それより 1 次低い水路の数は、

$${}_nN_{n-1} = {}_{n-1}N_{n-2} = \dots = {}_2N_1 = 2 + \varepsilon$$

である。

${}_nN_m$  を  $K, \varepsilon, n, m$  で表わす式をつくる。

$$\begin{aligned} {}_2N_1 &= 2 + \varepsilon \\ {}_3N_1 &= {}_3N_2 \cdot {}_2N_1 + K \cdot \varepsilon \\ {}_4N_1 &= {}_4N_3 \cdot {}_3N_1 + K \cdot \varepsilon \cdot {}_2N_1 + K^2 \cdot \varepsilon \\ &\dots \\ &\dots \\ {}_{n-1}N_1 &= {}_{n-1}N_{n-2} \cdot {}_{n-2}N_1 + K \cdot \varepsilon \cdot {}_{n-3}N_1 + \dots + K^{n-4} \cdot \varepsilon \cdot {}_2N_1 + K^{n-3} \cdot \varepsilon \\ {}_nN_1 &= {}_nN_{n-1} \cdot {}_{n-1}N_1 + K \cdot \varepsilon \cdot {}_{n-3}N_1 + K^2 \cdot \varepsilon \cdot {}_{n-3}N_1 + \dots + K^{n-3} \cdot \varepsilon \cdot {}_2N_1 + K^{n-2} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} {}_nN_1 - K \cdot {}_{n-1}N_1 &= {}_nN_{n-1} \cdot {}_{n-1}N_1 + K \cdot \varepsilon \cdot {}_{n-2}N_1 - K \cdot {}_{n-1}N_{n-2} \cdot {}_{n-2}N_1 \\ &= (2 + \varepsilon) \cdot {}_{n-1}N_1 - 2K \cdot {}_{n-2} \cdot N_1 \end{aligned}$$

ここで、 $2+K+\varepsilon = a$ 、 $-2K = b$  とおき、3項関係の一般式を得る。

$${}_nN_1 = a \cdot {}_{n-1}N_1 + b \cdot {}_{n-2}N_1 \tag{III-1}$$

更に (III-1) 式を次のように変形する、

$$\begin{aligned} {}_nN_1 - \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \cdot {}_{n-1}N_1 &= \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \left( {}_{n-1}N_1 - \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \cdot {}_{n-2}N_1 \right) \\ \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} &= P, \quad \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} = Q \end{aligned}$$

とおく。

$${}_nN_1 - P \cdot {}_{n-1}N_1 = Q ({}_{n-1}N_1 - P \cdot {}_{n-2}N_1) \tag{III-2}$$

$$\left. \begin{aligned} {}_nN_1 - P \cdot {}_{n-1}N_1 &= Q ({}_{n-1}N_1 - P \cdot {}_{n-2}N_1) \\ {}_{n-1}N_1 - P \cdot {}_{n-2}N_1 &= Q ({}_{n-2}N_1 - P \cdot {}_{n-3}N_1) \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ {}_4N_1 - P \cdot {}_3N_1 &= Q ({}_3N_1 - P \cdot {}_2N_1) \end{aligned} \right\} \tag{III-2'}$$

(III-2') の両辺をかけ合すと

$${}_nN_1 - P \cdot {}_{n-1}N_1 = Q^{n-3} \{ (2+\varepsilon)^2 + K \cdot \varepsilon - P(2+\varepsilon) \} \tag{III-3}$$

を得る。

2項間の一般式を得る。

(III-3) より、

$$\begin{aligned} {}_nN_1 - P \cdot {}_{n-1}N_1 &= Q^{n-3} \{ (2+\varepsilon)^2 + K \cdot \varepsilon - P(2+\varepsilon) \} \\ P \cdot {}_{n-1}N_1 - P^2 \cdot {}_{n-2}N_1 &= P \cdot Q^{n-4} \{ (2+\varepsilon)^2 + K \cdot \varepsilon - P(2+\varepsilon) \} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ + P^{n-3} \cdot {}_3N_1 - P^{n-2} \cdot {}_2N_1 &= P^{n-3} \{ (2+\varepsilon)^2 + K \cdot \varepsilon - P(2+\varepsilon) \} \\ \hline {}_nN_1 - P^{n-2} \cdot (2+\varepsilon) &= P^{n-3} \{ (2+\varepsilon)^2 + K \cdot \varepsilon - P(2+\varepsilon) \} + \\ &\dots + P \cdot Q^{n-4} \{ (2+\varepsilon)^2 + K \cdot \varepsilon - P(2+\varepsilon) \} + Q^{n-3} \{ (2+\varepsilon)^2 + K \cdot \varepsilon - P(2+\varepsilon) \} \\ {}_nN_1 &= \frac{Q^{n-2} - P^{n-2}}{Q - P} \{ (2+\varepsilon)^2 + K \cdot \varepsilon - P(2+\varepsilon) \} + P^{n-2} (2+\varepsilon) \end{aligned} \tag{III-4}$$

但し、

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{2+K+\varepsilon - \sqrt{(2+K+\varepsilon)^2 - 8K}}{2} \\ Q &= \frac{2+K+\varepsilon + \sqrt{(2+K+\varepsilon)^2 - 8K}}{2} \end{aligned} \right\} \tag{III-4'}$$

(III-4) は  $n$  次に流入する、1 次の水路の数であるが、第 8 図のようなモデルにおいては、

次数の絶対値が問題となるのではなく、次数間の差が問題となる。従って、(III-4)式の添字の転換を行なって、 $n$ 次の水路の持つ、 $m$ 次の水路の数という、一般式に書きかえる。

$${}_nN_m = \frac{Q^{n-m-1} - P^{n-m-1}}{Q-P} \left\{ (2+\varepsilon)^2 + K \cdot \varepsilon - P(2+\varepsilon) \right\} + P^{n-m-1}(2+\varepsilon) \quad (\text{III-5})$$

(III-5)式は、水路数一次数間関係を表わす最も一般的な式である。更にこれを HORTON の式に対比するために、次のような変形を行なう。

$$\begin{aligned} \log {}_nN_m &= (n-m) \log Q + \log \left[ \frac{1 - \left(\frac{P}{Q}\right)^{n-m-1}}{Q(Q-P)} \left\{ (2+\varepsilon)^2 + K \cdot \varepsilon - P(2+\varepsilon) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{P}{Q}\right)^{n-m-1} \cdot \frac{2+\varepsilon}{Q} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-5'})$$

(III-4')式において、問題の性質上、 $\varepsilon > 0$ 、 $K \geq 0$  である。

その場合、 $(2+K+\varepsilon)^2 - 8K > 0$  である。

従って、 $Q > P$  である。上記の条件において、次数差が大きくなる場合片対数紙上で、(III-5')式がある直線に接近することを証明する。すなわち(III-5')式の漸近線を求める。

(III-5')式において、

$$(n-m) \rightarrow \infty \text{ ならば } \left(\frac{P}{Q}\right)^{n-m-1} \rightarrow 0$$

故に

$$\log {}_nN_m = (n-m) \log Q + \log \frac{(2+\varepsilon)^2 + K \cdot \varepsilon - P(2+\varepsilon)}{Q(Q-P)} \quad (\text{III-6})$$

なる式を得る。

一方 HORTON の式は

$$\log N = (S-O) \log r_b$$

である。両式の対応は、 $N$ に対しては、 ${}_nN_m$ が、 $(S-O)$ に対しては、 $(n-m)$ が対応する。 $r_b$ に対しては、 $Q$ が対応する。何故なら、(III-6)式は片対数紙上での直線関係を示し、 $\log Q$ は(III-5)を片対数紙に、プロットした場合の漸近線の勾配を示す。従って、 $Q$ を新たに分岐比と定義する。

第8図のようなモデルは、 $n$ 次 $\sim$  $m$ 次間の次数の差と水路の関係を示し、 $n$ 次の水路に対する $m$ 次の水路の関係は、 $(n-i)$ 次の水路に対する $(m-i)$ 次の水路の関係と同一であり、ある意味での、相似律がなりたっている。故に、仮定1, 2が実際問題において、証明されれば、都合のよい式である。その他、この式の持つ利点や、第II章で指摘された事実に適合することは、仮定1, 2を証明した後示す。

3. 仮定 1, 2 と実際との対応

AA, AB, BA, BB 流域に関して,  ${}_2\varepsilon_1, {}_3\varepsilon_2, {}_4\varepsilon_3$  ( ${}_5\varepsilon_4$  は AB, BB 流域のみ), 並びに  $K_1 = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ ,  $K_2 = \varepsilon_3/\varepsilon_2$  を計算した。

第 4 表において,  $\varepsilon$  の計算に際しては,  ${}_5\varepsilon_4$  は水路数が少ないため, 除いた。 ${}_4\varepsilon_3$  についても \* 印のついた値は, 一般的傾向と異なる値を示しており, 今回は個々の流域の特性を知るのではなく, 一般的な法則を求めることを目的としているため省略した。 $\varepsilon_2$  の計算の際にも, \* 印のついたものは省略した。

${}_2\varepsilon_1, {}_3\varepsilon_2, {}_4\varepsilon_3$  に関しては \* 印以外はすべて, 1.05~1.37 の間にあり, それぞれの流域に関しても, 一定の値を示す傾向がある。これに比べ,  ${}_4\varepsilon_2, {}_3\varepsilon_1$  はデータの数も少なく, 変動の範囲

第 4 表  $\varepsilon$  および  $K$  の計算  
Table 4. Calculation of  $\varepsilon$  and  $K$  (\* is not used for calculation).

	${}_2\varepsilon_1$	${}_3\varepsilon_2$	${}_4\varepsilon_3$	${}_5\varepsilon_4$	$\varepsilon$ (平均値)
AA	1.26 (214/170)	1.13 (44/39)	1.29 (9/7)		1.23
AB	1.13 (196/174)	1.11 (42/38)	2.17 (13/6)*	1.00* (3/3)	1.12
BA	1.37 (127/93)	1.21 (23/19)	1.25 (5/4)		1.29
BB	1.20 (332/277)	1.05 (59/56)	0.643 (9/14)*	1.00* (3/3)	1.13
平均値	1.24	1.12	1.27	1.00*	1.19
	${}_3\varepsilon_1$	${}_4\varepsilon_2$	${}_5\varepsilon_3$		$\varepsilon_2$ (平均値)
AA	2.43 (95/39)	3.57 (25/7)			3.00
AB	2.87 (109/38)	3.67 (22/6)	1.67* (5/3)		3.27
BA	3.37 (64/19)	4.25 (17/4)			3.81
BB	3.53 (181/56)	2.86 (40/14)	4.33 (13/3)		3.57
平均値	3.05	3.59	4.33		3.41
	${}_4\varepsilon_1$				$\varepsilon_3$ (平均値)
AA	9.00 (63/7)				9.00
AB	8.67 (52/6)				8.67
BA	10.32 (53/4)				10.32
BB	9.29 (130/14)				9.81
平均値	9.32				9.45

	$K_1$	$K_2$	$K$ (平均値)
AA	2.44	3.00	2.72
AB	2.92	2.65	2.76
BA	2.95	2.71	2.83
BB	3.16	2.78	2.97
平均値	2.87	2.77	2.82



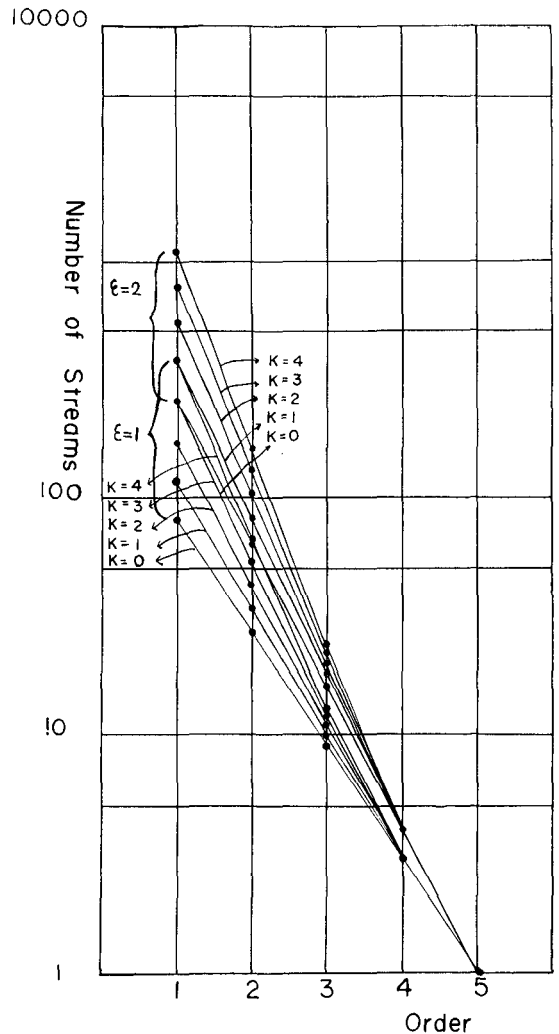
はやや、広くなるが、やはり一定の値をとる傾向にあるものとする。

次に、前に指摘したものを除き、 ${}_2\epsilon_1, {}_3\epsilon_2, {}_4\epsilon_3$ の平均値を $\epsilon$ 、 ${}_3\epsilon_1, {}_4\epsilon_2$ の平均値を $\epsilon_2, {}_4\epsilon_1$ の値をそのまま $\epsilon_3$ として、 $K_1, K_2$ を計算した。豊平川という同一水系内にあるのは、これらの値は、2.44~3.00という、比較的狭い範囲に分布する。以上の事実は、仮定1, 2が実際の水路に関しても成立っているように考えられる。各流域に関し、 $K_1, K_2$ の平均値を求め、 $K$ の値とした。

4. (III-5)式に関する若干の考察

(III-5)式において、5次~1次までの水路数を、 $\epsilon=1, K=0, 1, 2, 3, 4; \epsilon=2, K=0, 1, 2, 3, 4$ とにおいて、数値計算を行ない、片対数紙にプロットした(第9図)。5次~1次まで直線関係を示すのは、 $K=0$ の場合のみで、他はすべて、3次、4次、5次を結ぶ線が上に凹なる傾向を示し、1次、2次、3次を結ぶ線は、いずれも殆んど、一直線となる。又与えられた数値以内では、 $K, \epsilon$ が大なるほど、 $Q$ は大である。 $\epsilon$ が同じ値ならば、5次~4次間の勾配は同じであるが、それより低い次数の部分において、 $K$ が大なるほど、勾配も大となる。従って、 $K$ の値が大なるほど、3次、4次、5次の結ぶ線の上に凹なる度合が増す。

最高次とそれより1次低い水路との分岐比は常に $(2+\epsilon)$ であり、 $K$ の値は全く関係しない。即ち、1次から最高次にかけて、 $K=0$ であれば、分岐比は全次数を通じて $(2+\epsilon)$ であり、その場合は、片対数紙上で直線となる。このような場合は、ある次数の水路がそれより、1次高い水路に流入するのみで、2次違いの合流、3次違いの合流等は、考えられない。しかし、 $K \neq 0$ であれば、そのような場合は、最高次とそれより1次低い水路との関係のみであり、第8図を見れば分るように、3次の水路となると、4次の水路に流入するものの外に、5次の水路に直接流入するものが加わるように、一般に、次数が低くなるに従って、



第9図 (III-5)式による計算値

Fig. 9. Values evaluated from eq. (III-5)

2次違いの合流, 3次違いの合流等が加ってくる。又  $K$  の値は流長比や河系模様に関係があるように思われるが, この点に関する検討は, 別の機会にゆずりたい。

(III-5) 式は, これまでの多くの資料を考察して得た結論, 又豊平川からの資料に対して, 今回行なった統計的分析の結果を, 満足させるものと考えられる。更に, (III-5) 式の基礎となった, 第8図のようなモデルは, 相似律の理にもかなっている。

これまでの方法では, 次数は, 地形図の縮尺や, 対称とすべき地形の規模によって左右され, 場合, 場合に応じて決定されている。従って, 同じ1次と云っても, ある場合, 小さなリルのようなもの指し, ある場合には, 相当大きな河を指す。

(III-5) 式は,  $n$  次 $\sim$  $m$  次間の水路の相対的な次数差と, 水路数の関係を示すのみであるから, 水路の絶対的な次数を決定する必要はないし, 又, ある単位流域を1次と決定すれば, それより+, - 双方へ, 次数を考えることができる。

更に, この式は,  $K_1, \epsilon$  の大小を比較することにより, 河系模様に関して, 議論を展開することが出来るのではないかと思う。流長比や流域形状の問題も結びつけて, 考察すれば, 更に興味深い結果が期待できそうである。以上の諸点に関しては今後研究を進めたい。

#### IV. 結 語

豊平川上流部, 4流域に関して, 計測を行ない, HORTON の水路数の法則, 水路長の法則に関する考察を行なうとともに, 排水密度, 水路頻度を計算し, percentage hypsometric curve と, 主流の縦断面との比較, 対応を行なった。

結果は, 水路の発達状況が, 良好なる流域は, 概して, 地形も進化していることを示した。このことは, このような流域において, 数量的地形学の方法による考察が可能であることの一つの根拠を提供する。水路発達に対する地質の影響は明らかにすることは出来なかった。

HORTON の水路数の法則に関しては, これまでの数多くの例で指摘された, この法則より実際のデータがはずれる一定の傾向と内容を究明し, より事実適合する (III-5) 式を導いた。現在までのところでも, この式の持つ利点は, 種々考えられるが, 更に多くの流域から資料を得て, 一層検討を加えたい。

本研究を進めるに当たり, 終始御指導, 御助言をいただいた, 福富教授, 藤木助教授に厚く感謝します。

親切な御助言をいただいた, 地球物理学教室陸水学講座の皆様, に, 感謝します。とくに, 三好日出夫氏には, データ集約の作業上, 特別の協力をいただきました。ここに謝意を表します。

# 1. The Composition of Drainage Network in the Toyohira-River Basin and Valuation of HORTON's First Law

By Eiji TOKUNAGA

(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University)

One of the purpose of this paper is to investigate and characterize four watersheds in the Toyohira-River basin (Fig. 1) by quantitative geomorphic methods.

Calculated values are tabulated in Table 2. These values are also compared with the percentage hypsometric curves of respective watersheds, for the sake of studing the relationships between the system of drainage network and the stage of development of topography. According to percentage hypsometric curves, all of these watersheds have attained mature stage. And watersheds that indicate more developed stage of topography, seem to have comparatively high drainage density or stream frequency.

This paper is also contributed to examine the law of stream numbers by HORTON. Many examples done by many people following this law, suggested that the geometric progression is not really observed in the higher orders. Besides, it seems that, in many cases, the set of points proted on semi-logarithmic paper, shows a marked up-concavity at lower end.

Statistical analysis of stream systems in four watersheds in the Toyohira-River basin indicates that this tendency is rather reasonable. Therefore, it is needed to obtain an equation to rectify HORTON's equation and satisfy this tendency.

Stream order was designated by STRAHLER's method which is slightly modified from HORTON.

The equation is given by the following expression

$${}_nN_m = \frac{Q^{n-m-1} - P^{n-m-1}}{Q - P} \left\{ (2 + \epsilon)^2 + K \cdot \epsilon - P(2 + \epsilon) \right\} + P^{n-m-1}(2 + \epsilon) \quad \text{(III-5)}$$

where

$$P = \frac{2 + K + \epsilon - \sqrt{(2 + K + \epsilon)^2 - 8K}}{2}$$

$$Q = \frac{2 + K + \epsilon + \sqrt{(2 + K + \epsilon)^2 - 8K}}{2}$$

This equation (III-5) was derived from following definition and assumption

Definition

1.  ${}_n\epsilon_m$ ; average number of  $m$ th-ordered streams that join to one stream of  $n$  order and not form  $(m+1)$ th-ordered streams, such as  $c_1$  in Fig. 8.
2.  ${}_nN_m$ ; number of  $m$ th-ordered tributaries that one  $n$ th-ordered stream has.

Assumption

1.  ${}_n\epsilon_{n-1} = {}_{n-1}\epsilon_{n-2} = \dots = {}_2\epsilon_1 = \epsilon$   
 ${}_n\epsilon_{n-2} = {}_{n-1}\epsilon_{n-3} = \dots = {}_3\epsilon_1 = \epsilon_2$   
 .....  
 .....

$$n\epsilon_m = n-1\epsilon_{m-1} = \dots = \epsilon_{n-m}$$

$$2. \frac{\epsilon_2}{\epsilon} = \frac{\epsilon_3}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_4}{\epsilon_3} = \dots = \frac{\epsilon_{n-m}}{\epsilon_{n-m-1}} = K$$

Above assumptions were chequed in four watersheds in Toyohira-River basin. And, it can be presumed that the equation (III-5) is more fitted to describe the relationships between stream numbers and orders.