北海道大学地球物理学研究報告
Geophysical Bulletin of Hokkaido University, Sapporo, Japan
No.50,February.1988, p.55－61.

フーリエ変換による積分と線形加速度法による積分との関係

竹　中　博　士
北海道大学理学部地球物理学教室

（昭和62年12月8日受理）

Integration by Fourier Transformation and Its Connection with Integration by Linear Acceleration Method

Hiroshi TAKENAKA
Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University

(Received December 8, 1987)

The author studied the relation between the integration of a discretized function by linear acceleration method, which is commonly used as a direct numerical integration method for seismic traces, and that by Fourier transformation. Numerical examples are presented.

I. は　じ　め　に

Compani－Tabrizi and Geyer (1986) は，離散化された関数の微分を求める際に一般に用いられているフーリエ変換による方法と中央・前進・後退差分による方法の関係を明らかにした．たとえば，後退差分の場合は

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\Delta x}[1-\exp(-i\frac{2\pi}{N}\nu)]\cdot\mathcal{F}[f(x)]\right\}$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\Delta x}[i\frac{2\pi}{N}\nu+\frac{1}{2!}(\frac{2\pi}{N}\nu)^2+\cdots]\cdot\mathcal{F}[f(x)]\right\}$$

$$(\nu=0,1,\cdots\cdots,N-1)\cdots\cdots(1)$$

ここで，$f(x)$ は因果関数，Δx は $f(x)$ のサンプリング周期，$\mathcal{F}$，$\mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれフーリエ変換，逆フーリエ変換のオペレータである．

(1)の3番目の等式の〔　〕内の級数のうち，1次の項を残し，2次以上の項を無視すると，従来行われているフーリエ変換による微分の式と一致する．このことからわかるように $f(x)$ が高周波成分を豊富に含んでいる場合，従来のフーリエ変換による微分と差分法による微分とでは結果が大きく違ってくる．一般に差分法の方がよい近似を与える．このことは，高次の微分になるほど顕著になる．

以上がCompani−Tabrizi and Geyer (1986) が得た結果である．著者は，彼らの研究に触発され，幾つかの直接数値積分法についてフーリエ変換による積分との関係を考察した。本論文では，特に，地震波形を積分する際によく使用されている線形加速度法についての考察の結果を示す．

II．線形加速度法とフーリエ変換法

1．台形則

地震波形の積分には線形加速度法が有効であることが知られている（たとえば大崎，1982）．この方法は加速度波形を積分する段階で台形則を適用している．そこで，初めに台形則とフーリエ変換による積分との関係を導く．

$$g(x)=\int_0^x f(x')dx' \quad \cdots\cdots(2)$$

とする．台形則

$$g(x)=g(x-\Delta x)+\frac{\Delta x}{2}[f(x)+f(x-\Delta x)] \quad \cdots\cdots(3)$$

より

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\{[\delta(x)-\delta(x-\Delta x)]*g(x)\}\\&\qquad=\frac{\Delta x}{2}\mathcal{F}\{[\delta(x)+\delta(x-\Delta x)]*f(x)\} \quad \cdots\cdots(4)\end{aligned}$$

ここで，$\delta(x)$ はデルタ関数であり，$*$は合成積を表わす．

$$\mathcal{F}[\delta(x)]=1\ ,\ \mathcal{F}[\delta(x-\Delta x)]=\exp(-i\frac{2\pi}{N}\nu) \quad \cdots\cdots(5)$$

を(4)に代入して整理すると

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{\Delta x}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1+\exp(-i\frac{2\pi}{N}\nu)}{1-\exp(-i\frac{2\pi}{N}\nu)}\cdot\mathcal{F}[f(x)]\right\}\\&=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\Delta x}{2i}\cot(\frac{\pi}{N}\nu)\cdot\mathcal{F}[f(x)]\right\} \quad \cdots\cdots(6)\end{aligned}$$

$\cot(\pi\nu/N)$ を展開すると(6)は

$$g(x)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\Delta x\left[\frac{1}{i\frac{2\pi}{N}\nu}+\frac{i}{2\cdot3\cdot2}(\frac{2\pi}{N}\nu)+\cdots\cdots\right]\cdot\mathcal{F}[f(x)]\right\} \quad \cdots\cdots(7)$$

となり，右辺の〔　〕内の級数のうち，第1項だけを残してそれ以後を無視すると従来のフーリエ変換による積分の式と一致する．

次に，台形則(3)を線形システムの立場から考察する．

(3)のZ変換は

$$G(z)=z^{-1}G(z)+\frac{\Delta x}{2}[F(z)+z^{-1}F(z)] \cdots\cdots (8)$$

ここで，$F(z)$，$G(z)$はそれぞれ$f(x)$，$g(x)$のZ変換である．(8)を整理すると

$$G(z)=\left[\frac{\Delta x}{2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right]F(z) \cdots\cdots (9)$$

となり，$z=\exp(i\frac{2\pi}{N}\nu)$ とすると(6)の右辺の｛　｝内の式と同じものが得られる．

また，$f(x)$が因果関数であることに注意して(2)をラプラス変換すると

$$G(s)=s^{-1}F(s) \cdots\cdots (10)$$

(10)を線形システムとしてみると連続伝達関数 $H_A(s)$は

$$H_A(s)=s^{-1} \cdots\cdots (11)$$

である．(11)に双一次変換

$$s=\frac{2}{\Delta x}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \cdots\cdots (12)$$

を施して離散伝達関数 $H_D(z)$を求めると

$$H_D(z)=\frac{\Delta x}{2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \cdots\cdots (13)$$

となる．これは，(9)の右辺の〔　〕内の式に一致する．このことは，線形システムの立場からみたとき，台形則は積分オペレータを双一次変換によって離散化したものと等価であることを意味している．

次に数値計算例を示す．被積分関数として単位インパルスを考え，$\Delta x=1$，$N=128$とする．フーリエ変換及び逆フーリエ変換はFFTを用いて行うので，被積分関数及びその積分は有限フーリエ級数で近似される．従って，実際に(6)を実行する際，$g(x)$ の複素フーリエ係数 D_ν を $f(x)$ の複素フーリエ係数 C_ν を用いて次のように計算する．

$$D_0=-\Delta x\sum_{\nu=1}^{N/2-1}[\cot(\frac{\pi}{N}\nu)\cdot\mathrm{Imag}(C_\nu)]+\frac{(N-1)\Delta x}{2}C_0$$

$$D_\nu=\frac{\Delta x}{2}[-1+i\cot(\frac{\pi}{N}\nu)]\cdot C_0-i\frac{\Delta x}{2}\cot(\frac{\pi}{N}\nu)\cdot C_\nu$$

$$D_{N-\nu}=D_\nu^* \qquad (\nu=1,2,\cdots\cdots,N/2-1)$$

$$D_{N/2}=-\frac{\Delta x}{2}C_0 \cdots\cdots (14)$$

ここで，Imag (C_ν) は C_ν の虚数部分を表わし，＊は複素共役を意味する．

Fig. 1 は従来のフーリエ変換による積分の結果であり，Fig. 2 は(6)を実行した結果である．計算はすべて倍精度で行った．Fig. 1 (b)と Fig. 2 (b)を比べると，Fig. 1 (b)に見られる振動部分が Fig. 2 (b)では完全に消えていることがわかる．

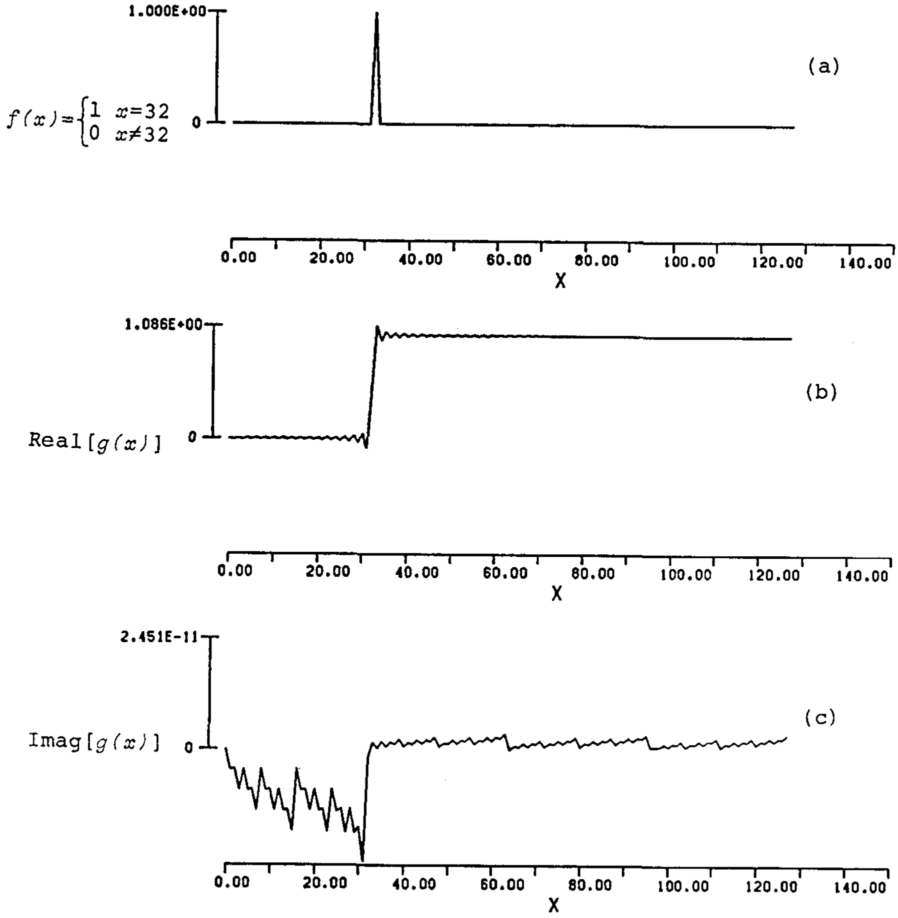

Fig. 1 Integration of a "discretized delta" function by conventional rule.

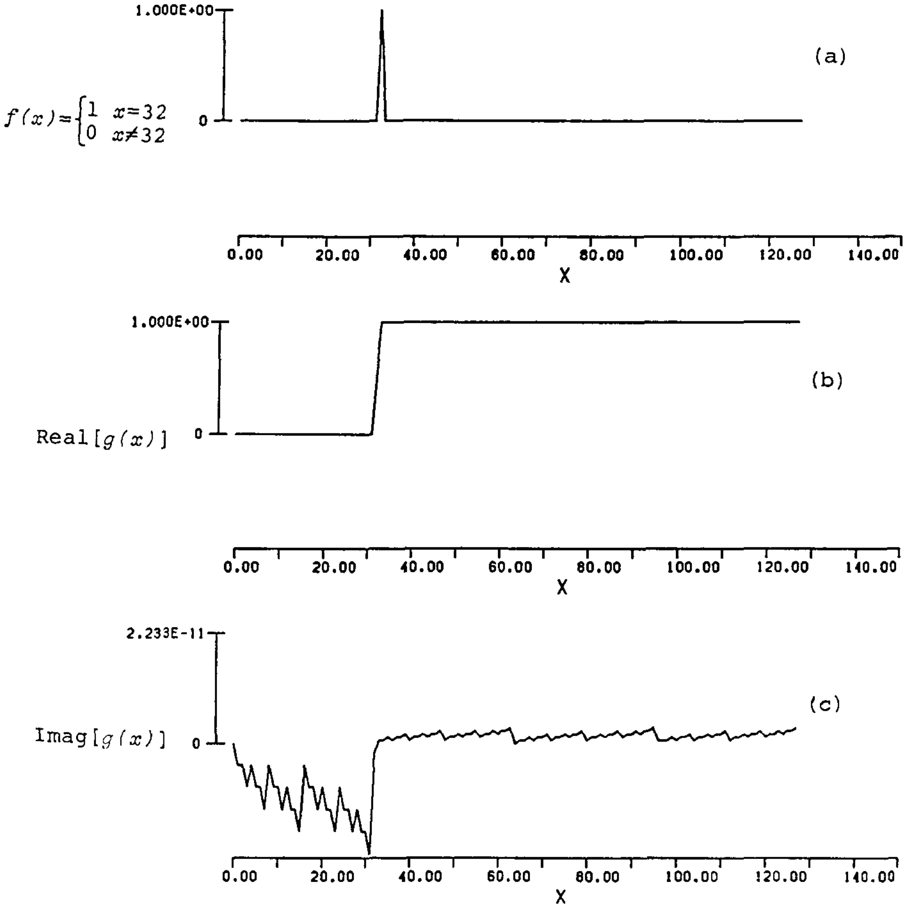

Fig. 2 Integration of a "discretized delta" function by trapezoidal rule relation (6).

2. 線形加速度法

線形加速度法は，加速度の時刻歴から速度と変位の時刻歴を遂次求める方法で，変位，速度，加速度をそれぞれ $y(t)$，$y(t)$，$\ddot{y}(t)$ とすると次式で表わされる．

$$\dot{y}(t)=\dot{y}(t-\Delta t)+\frac{\Delta t}{2}[\ddot{y}(t)+\ddot{y}(t-\Delta t)] \qquad (15)$$

$$y(t)=y(t-\Delta t)+(\Delta t)\dot{y}(t-\Delta t)+\frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{y}(t-\Delta t)+\frac{(\Delta t)^2}{6}[\ddot{y}(t)-\ddot{y}(t-\Delta t)] \qquad (16)$$

(16)は

$$y(t)=\{y(t-\Delta t)+(\Delta t)\dot{y}(t-\Delta t)+\frac{(\Delta t)^2}{4}[\ddot{y}(t)+\ddot{y}(t-\Delta t)]\}-\frac{(\Delta t)^3}{12}\{\frac{1}{\Delta t}[\ddot{y}(t)-\ddot{y}(t-\Delta t)]\} \qquad (17)$$

と変形できる．右辺の最初の｛　｝は $\ddot{y}(t)$ に台形則を2回適用することを意味しており，2番目の｛　｝は $\ddot{y}(t)$ の後退差分である．

(1)，(6)，(16)を用いると

$$y(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[\left\{[\frac{\Delta t}{2i}\cot(\frac{\pi}{N}\nu)]^2-\frac{(\Delta t)^2}{12}[1-\exp(-i\frac{2\pi}{N}\nu)]\right\}\cdot\mathcal{F}[\ddot{y}(t)]\right] \quad (18)$$

が得られる．

Fig. 3 は Fig. 1 と同じ被積分関数について(18)を実行した結果である．

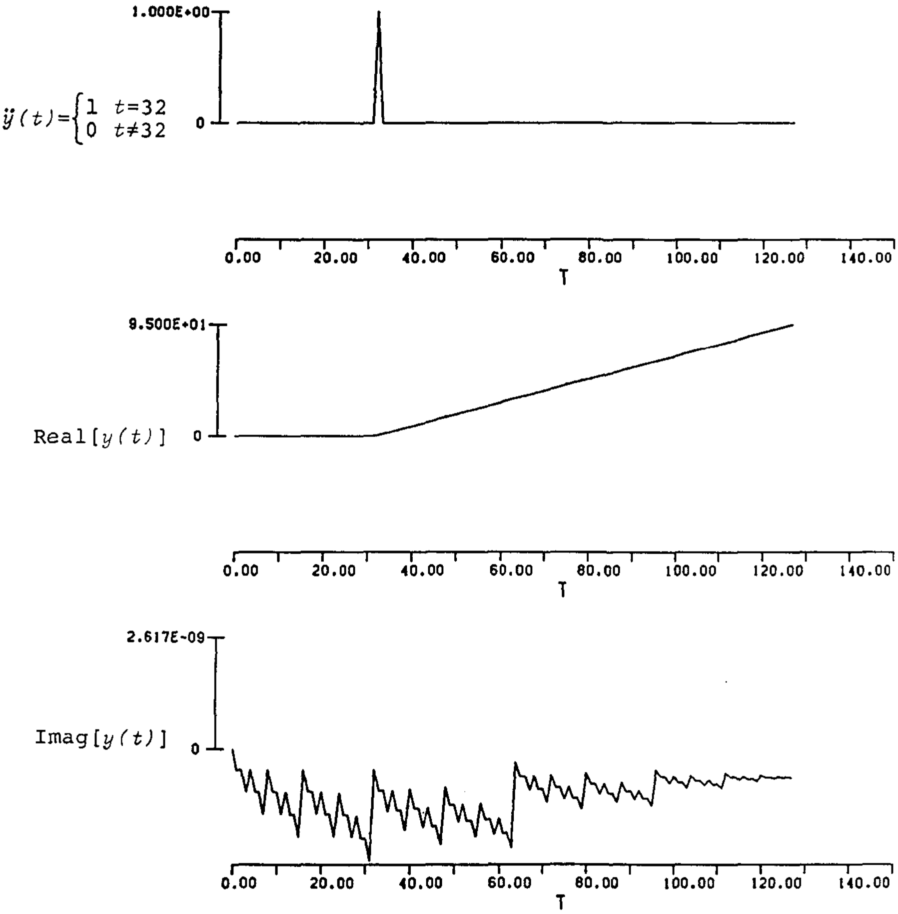

Fig. 3　Acceleration $\ddot{y}(t)$("discretized delta" function) and displacement $y(t)$ calculated by relation (18).

謝辞 本研究中いろいろ相談にのって下さった笹谷努講師並びに原稿を読んで下さった中西一郎講師に感謝いたします．最後に，本研究を論文にすることを勧めて下さった西田泰典助教授に心から感謝いたします．

なお計算には北海道大学大型計算機センターの HITAC M－680 Hを使用した．

文 献

Compani－Tabrizi, B. and R. G. Geyer, 1986. Differentiation by Fourier transformation and its connection with differentiation by finite differencing. *Quart. Appl. Math.*, **44**, 519－528.

大崎順彦，1982．地震動のスペクトル解析入門．鹿島出版会，260 pp.