HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	超幾何関数早春学校
Author(s)	Matsumoto, Keiji
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 110, 1
Issue Date	2006-01-01
DOI	10.14943/13384
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/14555; http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1567/
Type	bulletin (article)
File Information	tech110.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

超幾何関数早春学校

開校期間：平成 18 年 3 月 6 ～ 10 日
開校場所：北海道大学理学部 8 号館 3 階 8-309
講演対象：大学院生

Series #110. July, 2006

Publication of this series is partly supported by Grant-in-Aid for formation of COE.
‘Mathematics of Nonlinear Structures via Singularities’（Hokkaido University）
URL:http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#86 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), Lectures on nonlinear dispersive equations II, 47 pages. 2004.

#87 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), COE Symposium Nonlinear Dispersive Equations, 85 pages. 2004.

#88 T. Namiki, M. Hatakeyama, S. Tadokoro and H. Aoi (Eds.), 北海道大学数学教室におけるメタデータ交換プロトコル OAI-PMH に準拠した e-print サーバ構築, 14 pages. 2004.

#89 S. Izumiya (Ed.) M. Takahashi, T. Miyao, G. Okuyama, Y. Nakano and K. Inui, 第 1 回数学総合若手研究集会　COE Conference for Young Researchers, 143 pages. 2005.

#90 J. Saal, 1st COE Lecture Series H^{∞}-calculus for the Stokes operator on L_q-spaces, 34 pages. 2005.

#91 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第 13 回関数空間セミナー報告集, 111 pages. 2005.

#92 N. Umeda, 第 4 回ＣＯＥ研究員連続講演会　反応－拡散方程式の大域解と爆発解について, 8 pages. 2005.

#93 K. Arima, 第 2 回ＣＯＥ研究員連続講演会　極小モデルプログラムの入門およびその正標数への拡張, 25 pages. 2005.

#94 Y. Nakano, 学位論文 Doctoral thesis " OPTIMAL HEDGING IN THE PRESENCE OF SHORTFALL RISK " 43 pages. 2005.

#95 Keiji Matsumoto and Masao Jinzenji (Eds.), 2004 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 17 pages. 2005.

#96 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 30th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 83 pages. 2005.

#97 M. Watanabe, 第 5 回 COE 研究員連続講演会　『逆散乱法』入門, 52 pages. 2005.

#98 M. Takeda, T. Mikami (Eds.), Probability and PDE, 48 pages. 2005.

#99 M. Van Manen, The 6th COE Lecture Series "From the cut-locus via medial axis to the Voronoi diagram and back " 42 pages. 2005.

#100 K. Hayami, T. Nara, D. Furihata, T. Matsuo, T. Sakurai and T. Sakajo (Eds.), 応用数理サマーセミナー「逆問題」, 196 pages. 2005.

#101 B. Forbes, The 7th COE Lecture Series トーリックミラー対称性、56 pages. 2005.

#102 H. Kubo, T. Ozawa and K. Yamauchi, SAPPORO GUEST HOUSE SYMPOSIUM ON MATHEMATICS 20 "Nonlinear Wave Equations", 68 pages. 2005.

#103 A. Miyachi and K. Tachizawa, Proceedings of the Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, 107 pages. 2005.

#104 S. Izumiya (Ed), Y. Numata, J. Ishimoto, I. Sasaki, Y. Nagase and M. Yamamoto, 第 2 回数学総合若手研究集会 - The 2nd COE Conference for Young Researchers -, 274 pages. 2006.

#105 T. Yamamoto, O. Hatori, M. Hayashi and T. Nakazi (Eds.), 第 14 回関数空間セミナー, 112 pages. 2006.

#106 Y. Daido, 学位論文 Doctoral thesis "RECONSTRUCTION OF INCLUSIONS FOR THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT EQUATION USING PROBE METHOD", 68 pages. 2006.

#107 T. Yamamoto, 学位論文 Doctoral thesis "Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants", 333 pages. 2006.

#108 S. Izumiya, Singularity theory of smooth mappings and its applications: a survey for non-specialists, 41 pages. 2006.

#109 J. Cheng, B. Y. C. Hon, J. Y. Lee, G. Nakamura and M. Yamamoto, Inverse Problems in Applied Sciences - towards breakthrough - Organizing Committee, 96 pages. 2006.

超幾何関数早春学校

開校期間：平成 18 年 3 月 6〜10 日
開校場所：北海道大学理学部 8 号館 3 階 8–309
講演対象：大学院生

講演予定表

3 月 6 日 (月)

13:30–15:00　予備講義 (基礎知識の復習)
15:30–17:00　吉田 正章 (九大 数理 教授)「私は超幾何関数 序章」

3 月 7 日 (火)

10:00–11:30　吉田 正章 (九大 数理 教授)「私は超幾何関数 第 2 章」
13:30–15:00　志賀 弘典 (千葉大 理 教授)「算術幾何平均：初期データ」
15:30–17:00　志賀 弘典 (千葉大 理 教授)「算術幾何平均：極限移行過程」

3 月 8 日 (水)

10:00–11:30　吉田 正章 (九大 数理 教授)「私は超幾何関数 第 3 章」
13:30–15:00　斎藤　睦 (北大 理 助教授)「A 超幾何関数入門」
15:30–17:00　松本 圭司 (北大 理 助教授)「超幾何関数の幾何学」

3 月 9 日 (木)

10:00–11:30　吉田 正章 (九大 数理 教授)「私は超幾何関数 第 4 章」
13:30–15:00　佐々木 武 (神戸大 理 教授)「曲面論と超幾何関数 1」
15:30–17:00　佐々木 武 (神戸大 理 教授)「曲面論と超幾何関数 2」

3 月 10 日 (金)

10:00–11:30　吉田 正章 (九大 数理 教授)「私は超幾何関数 最終章」

私は超幾何関数　於北大早春学校

吉田正章*

平成 18 年 3 月 6〜10 日

表題の説明：私は 9 州大学の吉田です. なのにどうして「私は超幾何関数」なのか. 助詞「は」には色々の用法がありますが, 表題で使いましたのは, 限定を表すものです. 飲み屋で「皆さん麦酒でいいですね」といわれた時「いや, 私は焼酎だ」という風に使われるものです.

抽象：この講義では超幾何関数に関する基本的事項を述べるのが主な目的ですが, 唯それらを羅列したのでは面白くもなく退屈なので, 私の趣味の黒写像を話の軸にして述べます.

お詫び：これは色々のところに書き散らした物を抜いてきたので, 粗密度や口調が不揃いですがご勘弁下さい. また私は長年数学用語から外国語の片仮名表示を追放する（単に中国語に置き換える訳ではない）運動をしているので, 通常とは異なる表現が所々にあります：例えば, 多価性を記述する群は普通希臘語で monodromy 群と呼ばれているようですが, 私は意味を採って「測多価群」と言っています. また人名では, Cauchy を腰, Schwarz を黒等と書いています. お許し下さい.

目 次

1　序 **3**
1.1　冪級数 3
1.2　微分方程式 3
1.3　黒写像 4

2　冪関数 **4**
2.1　a が実の時 5
2.2　a が純虚の時 5
2.3　その他 6

3　超幾何微分方程式の局所的性質 **7**
3.1　正則点で 7
3.2　$x = 0$ の周りで 7
3.3　$x = 1$ や ∞ の周りで 8

*810-8560 福岡市中央区 6 本松 9 州大学数理　myoshida@math.kyushu-u.ac.jp

4 超幾何微分方程式の大域的性質 8
4.1 接続行列 8
4.2 測多価群の生成元 9
4.3 積分表示 10
4.4 隣接関係 11

5 実指数超幾何微分方程式の黒写像 11
5.1 実で一般指数 12
5.2 黒写像 12
5.3 多面体的測多価群（標準径数） 13
5.4 乱舞だ関数 16
5.5 高次元化 16

6 純虚指数差超幾何微分方程式の黒写像 17
6.1 未知関数の射影的変換 17
6.2 各区間の像は円です 18
6.3 原点の近くでは黒写像は $x \mapsto x^{\lambda}$ に近い 18
6.4 三円の配置 19
6.5 証明 20
6.6 黒写像の大域的性質 21
6.6.1 解析接続 I 22
6.6.2 解析接続 II 23
6.7 発展学習 24

7 又曲黒写像 24
7.1 ３次元又曲空間 24
7.2 又曲黒写像 25
7.3 燕尾 25
7.3.1 ３次方程式の判別式 26
7.3.2 燕尾の影 26
7.3.3 燕尾 26
7.4 又曲黒写像の特異点 27
7.5 曲線 $|q(x)| = 1$ 30
7.6 絵 30
7.7 近未来的計画 31

1　序

超幾何関数は冪関数に毛が生えたものである. このことを色々な方面から観察しつつ超幾何関数の基本事項を順次述べる. 冪関数による「写像」の超幾何版が黒写像となるのである.

1.1　冪級数

二項定理より冪関数は以下の冪級数展開を有する.

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,n)}{(1,n)} x^n,$$

ここで $(a,n) = a(a+1)\cdots(a+n-1)$, 特に, $(1,n) = n!$　　分母と分子に $(*,n)$ の様な項をひとつづつ増やして超幾何級数

$$F(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)} x^n$$

を得る.

1.2　微分方程式

上記二項級数の係数を

$$A_n = \frac{(a,n)}{(1,n)},$$

と置くと以下の差分方程式を満たす：

$$A_{n+1} = A_n \frac{n+a}{n+1}.$$

これより冪関数 $(1-x)^{-a}$ は以下の線形微分方程式の解であることが分かる.

$$(D+a)u = (D+1)\frac{1}{x}u, \qquad D = x\frac{d}{dx}.$$

実際, $Dx^n = nx^n$, 故

$$(D+a)\sum A_n x^n = \sum A_n (D+a)x^n = \sum A_n (n+a)x^n = \sum A_{n+1}(n+1)x^n$$

となり

$$(D+1)\frac{1}{x}\sum A_n x^n = \sum A_n (D+1)x^{n-1} = \sum A_n n x^{n-1}.$$

この方程式は以下と同値.

$$(1-x)u' - au = 0, \quad \text{ここで} \quad u' = \frac{du}{dx}.$$

この方程式は $x=1$ と ∞ に特異性を有する. 同じ方法により超幾何級数 $F(a,b,c;x)$ は微分方程式

$$(D+a)(D+b)u = (D+c)(D+1)\frac{1}{x}u,$$

の解である（演習）. これは以下と同値（演習）.

$$x(1-x)u'' + \{c-(a+b+1)x\}u' - abu = 0;$$

これらいずれも超幾何微分方程式と称し, $E(a,b,c)$ と記す. この方程式の特異点は $x = 0, 1, \infty$ である. これは線形で 2 階である故（腰の定理）

- $x_0 \neq 0, 1, \infty$ 以外の如何なる点 x_0 での局所解は正則で $\mathbf{C}$ 上 2 次元線形空間をなす.
- x_0 での任意の解は x_0 を始点とする如何なる道に沿っても $0, 1, \infty$ を通らない限り解析接続さる.

1.3 黒写像

超幾何微分方程式 $E(a,b,c)$ の二つの線形独立解を使った写像

$$s : x \longmapsto u_0(x)/u_1(x)$$

を黒写像と呼ぶ. 唯これだけのことだが, これで「幾何」が始まるのである. 先ずこれは冪関数 x^a による写像 $x \mapsto x^a$ の一寸した一般化であることを体感して頂き, 最後に時間があれば, 最近考案した又曲黒写像に付き合ってください.

2 冪関数

冪関数が超幾何関数の雛型でありますから, 冪関数を注意深く観察する. 一見簡単そうに見えるこの関数は実はかなり複雑な関数であることが分かるだろう. 冪関数 x^a は以下のように三つの関数の合成で定義さる：

$$x \xrightarrow{\log} \log x \xrightarrow{\times a} a\log x \xrightarrow{\exp} \exp(a\log x) = x^a.$$

ここで, 指数関数と対数関数を目で見る形で復習しておこう; 図 1 を見よ. x-空間内の上半

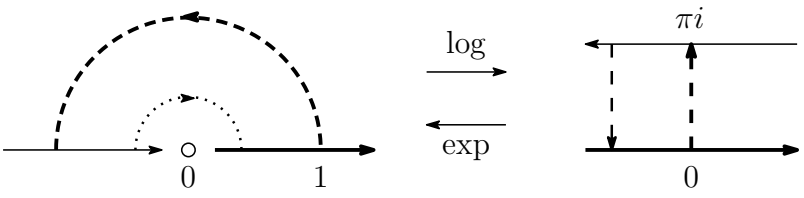


図 1: 対数関数と指数関数

平面 $\mathbf{H}_x = \{x \in \mathbf{C} \mid \Im x > 0\}$ は対数関数 $x \mapsto \exp x$ によって帯に写さる. 対数関数は指数関数の逆関数であるから, 冪写像 $x \mapsto x^a$ は a 倍する写像 $\times a$ と共役であると考えられる. 複素数倍写像は帯を拡大, 縮小, 回転する. 冪関数の逆関数も再び冪関数であることに注意.

2.1 a が実の時

指数 a 実の時 – 簡単の為 $a > 0$ とする – 写像 $x \mapsto z = x^a$ は上半平面を等角に開角 πa の扇

$$\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \arg z < \pi a\}$$

に写す. 更に $|a| \leq 1$ なら写像は単葉である. 扇は 2 角形とも思えることに注意. 図 2 参照. この写像の大域的振舞は x-空間の区間 $(-\infty, 0)$ と $(0, +\infty)$ 及び対応する z-空間の扇の両

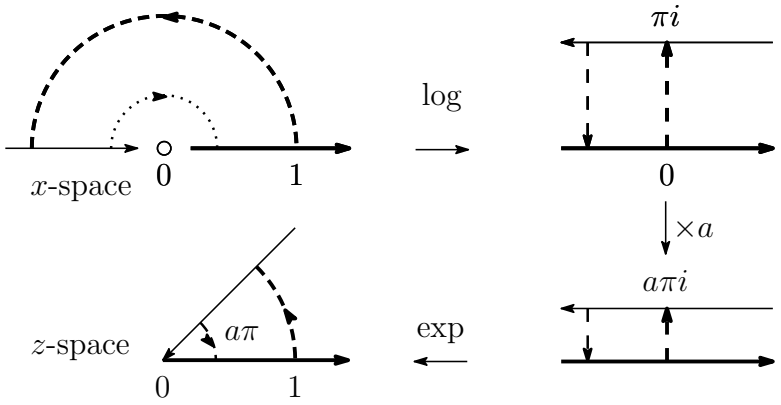


図 2: 実指数の冪関数

側で繰返し黒鏡像原理を適用することにより分かる.

もし x-空間の原点の周りを一周すれば, 値は z から $e^{2\pi i a} z$ へと変化する. 何故なら $\exp(a \log x)$ が $\exp(a(\log x + 2\pi i))$ へと変わるからである. 変換

$$z \mapsto e^{2\pi i a n} z, \quad n \in \mathbf{Z}$$

のなす群 $M(a)$ は, a が有理数の時に限り, z-空間に真に不連続に働く.

2.2 a が純虚の時

指数 a が純虚の時, $a = i\theta$ と置き簡単の為 $\theta > 0$ とする. すると上半平面 $\mathbf{H}_x$ は円環 $\{z \in \mathbf{C} \mid e^{-\pi\theta} < |z| < 1\}$ を無限回覆う. もし写像を半円環 $\{x \in \mathbf{H}_x \mid e^{-\pi} < |x| < 1\}$ 上に制限すれば, それは単葉に半円環 $\{z \in \mathbf{H}_z \mid e^{-\pi\theta} < |z| < 1\}$ に写さる; 図 3 を見よ.

大域的振舞は対応する半円環の境界成分で黒鏡像原理の反復使用で分かる. 円弧は区間に対応し, 区間は円弧に対応することに特に注意せよ. x-空間で原点の周りを回れば像は z-空間の 0 か ∞ に近付く, 逆に x-空間で 0 か ∞ に近付くと像は原点の周りをぐるぐる回るのである.

変換 $z \mapsto e^{2\pi\theta n} z$, $n \in \mathbf{Z}$ のなす群 $M(a)$ は一穴 z-空間 $\mathbf{C}_z^\times$ に真に不連続に働く. 商空間 $\mathbf{C}_z^\times / M(a)$ は楕円曲線である；その母数は一般でない, 特徴付けは演習.

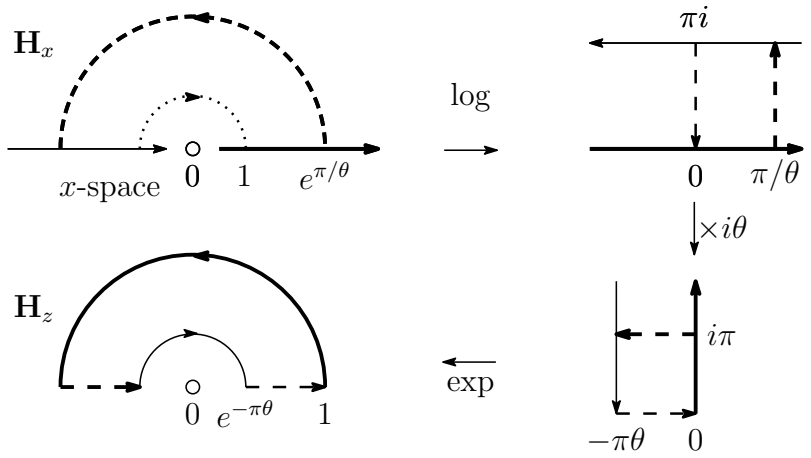


図 3: 純虚指数 $a = i\theta,\ \theta > 0$ の冪関数

2.3 その他

指数 a が実でも純虚でもないと, 像は螺旋帯状である：業界用語で「さざえのうんこ」という. 半円環 $\{x \in \mathbf{H}_x \mid e^{-\pi} < |x| < 1\}$ の像を $a = e^{it},\ 0 \le t \le 1/2$ と動かしながら描いてみるのも一興である（演習）. 図 4 は中間点 $(t = 1/4)$ の様子である; 線対称が見える.

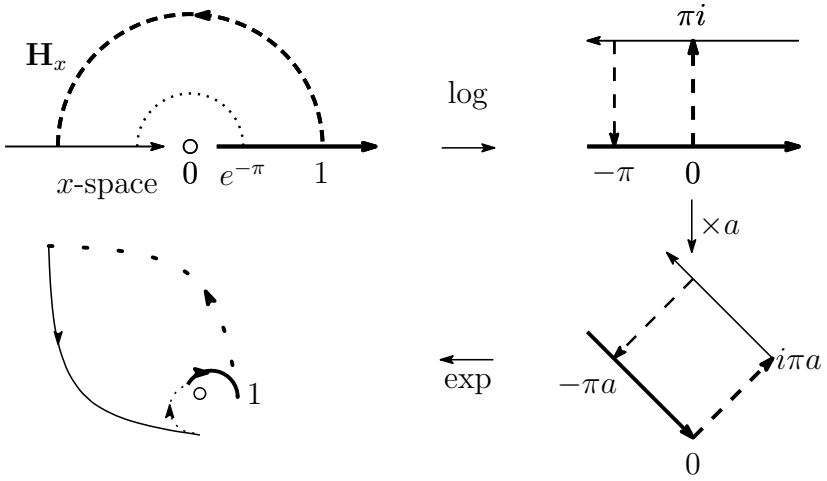


図 4: 複素指数の冪関数

変換 $z \mapsto e^{2\pi i a n} z,\ n \in \mathbf{Z}$ のなす群 $M(a)$ は一穴 z-空間 $\mathbf{C}_z^\times$ に真に不連続に働き, 商空間 $\mathbf{C}_z^\times / M(a)$ は母数一般の楕円曲線である.

3　超幾何微分方程式の局所的性質

3.1　正則点で

正則点 $\xi \neq 0, 1, \infty$ では, $E(a, b, c)$ は

$$u_0 = 1 + O((x - \xi)^2),$$

の形の解を唯ひとつ持ち,

$$u_1 = x + O((x - \xi)^2);$$

の形の解を唯ひとつ持ち, それらは x_0 に於ける局所解の基底をなす. ここに $O((x - \xi)^2)$ は $(x - \xi)^2$ と $x - \xi$ に関する収束冪級数の積を表す.

3.2　$x = 0$ の周りで

$D(x^\alpha u) = \alpha x^\alpha u + x^\alpha Du = x^\alpha(\alpha + D)u$ 故, D や x^α を関数に働く演算子と見做すと

$$Dx^\alpha = x^\alpha(\alpha + D)$$

となる. これを 'x^α が D を右から左に通り抜ければ D は α を得る' 或は 'x^α が D を左から右に通り抜ければ D は α を失う' と記憶されよ.

級数 $F(a, b, c; x)$ は

$$(D + a)(D + b)u = (D + c)(D + 1)\frac{1}{x}u$$

の解であることを思い起こせ. x^{c-1} を上の方程式の両辺に左から掛けて右方向に移動させよ. さすれば各々の D は $c - 1$ を失い,

$$(D + a - c + 1)(D + b - c + 1)(x^{c-1}u) = (D + 1)(D - c + 2)\frac{1}{x}(x^{c-1}u)$$

となる. $v = F(a - c + 1, b - c + 1, -c + 2; x)$ は

$$(D + a - c + 1)(D + b - c + 1)v = (D + 1)(D - c + 2)\frac{1}{x}v$$

の解故, $x^{1-c}F(a - c + 1, b - c + 1, -c + 2; x)$ は $E(a, b, c)$ の $x = 0$ での今ひとつの解であると結論するに至るのである. しかるに不幸にしてもし $c = 1$ ならば, それは元の級数 $F(a, b, c; x)$ に他ならなず, さらなる工夫が必要であるが, それは省略する.

冪関数 x^{1-c} は一般に一価でないので, その値を真剣に問題にする時には x の偏角を決めなくてはいけないことを記憶に止められよ.

ともかく, $\{0, 1 - c\}$ を $E(a, b, c)$ の $x = 0$ での（局所）指数と称する.

3.3 $x = 1$ や ∞ の周りで

特異点 $x = 1$ や ∞ の周りでは, 超幾何方程式の対称性を利用するのが賢い. 変数変換 $x = 1 - y$ で, 方程式

$$x(1-x)u'' + \{c - (a+b+1)x\}u' - abu = 0$$

は

$$y(1-y)u'' + \{-c+a+b+1 - (a+b+1)y - abu = 0,$$

となる；これは何を隠そう超幾何方程式 $E(a, b, -c+a+b+1)$ である. よって

$$F(a, b, -c+a+b+1; 1-x) \quad と \quad (1-x)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c+1-a-b; 1-x)$$

は $E(a, b, c)$ の解である. 故に $\{0, c-a-b\}$ が $E(a, b, c)$ の $x = 1$ での局所指数と言うことになる.

無限遠点では方程式

$$(D+a)(D+b)u = (D+c)(D+1)\frac{1}{x}u$$

を使うのが得策である. 変数変換 $x = 1/y$ で問題の方程式は再び超幾何方程式に変わる, そして $\{a, b\}$ が $E(a, b, c)$ の $x = \infty$ での指数と呼ばれることになるのである; 詳細演習.

各特異点での指数を並べて表にしたもの

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} \right\}$$

を理満表とか理満 P 関数とか称する. 慣習に従い指数差を以下のごとく記す：

$$\lambda = 1-c, \quad \mu = c-a-b, \quad \nu = a-b.$$

4 超幾何微分方程式の大域的性質

4.1 接続行列

正則点で二組の局所解系があればそれらは線形に関係している筈である. その線形関係を表す行列は接続行列と呼ばれている. 超幾何方程式については接続行列は具体形が知られている. ここではそのうちの一つをおめにかける. 前節で現れた解系を二組

$$f_0(0, x) = F(a, b, c; x), \quad f_0(\lambda, x) = x^{\lambda}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x),$$

と

$$f_1(0, x) = F(a, b, a+b-c+1; 1-x), \quad f_1(\mu, x) = (1-x)^{\mu}F(c-a, c-b, c+1-a-b; 1-x)$$

を区間 $(0, 1)$ で比べる, ここで実正数 x と $1-x$ の偏角は 0 とする. これらの関係は

$$(f_0(0, x), f_0(\lambda, x)) = (f_1(0, x), f_1(\mu, x))P,$$

で与えられ, 接続行列

$$P = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$$

は

$$D = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad C = \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)},$$
$$B = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \quad A = \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)},$$

である, ここで Γ は蝦蟇関数. これは賀臼による. 証明は超幾何関数と名が付く全ての本に載っている; 例えば [IKSY] には複数の証明がある.

4.2 測多価群の生成元

$\mathbf{C} - \{0, 1\}$ の（起点 $x = 1/2$ の）基本群は 0 の周りの道 ρ_0 と 1 の周りの道 ρ_1 で生成される；図 5 を見よ. 組 $(f_0(0, x), f_0(\lambda, x))$ を道 ρ_0 に沿って接続すれば

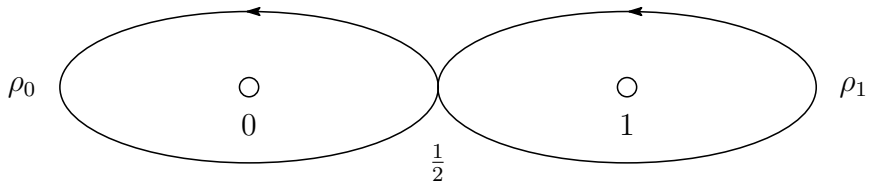


図 5: 道 ρ_0 と道 ρ_1

$$(f_0(0, x), f_0(\lambda, x)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\lambda} \end{pmatrix}$$

となり, 組 $(f_1(0, x), f_1(\mu, x))$ を道 ρ_1 に沿って接続すれば

$$(f_1(0, x), f_1(\mu, x)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\mu} \end{pmatrix}$$

となることは, §2 の冪関数の振舞の所で既に見た. 組 $(f_0(0, x), f_0(\lambda, x))$ と組 $(f_1(0, x), f_1(\mu, x))$ の関係は前節で述べた通りであるからして, 組 $(f_0(0, x), f_0(\mu, x))$ を道 ρ_1 に沿って接続すればそれは

$$(f_0(0, x), f_0(\mu, x))P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\mu} \end{pmatrix} P$$

となる. (起点 $x = 1/2$ での線形独立解の組 $(f_0(0, x), f_0(\lambda, x))$ に関する) 微分方程式 $E(a, b, c)$ の測多価群はその定義から 2 元

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\lambda} \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\mu} \end{pmatrix} P$$

で生成さる. 別の起点で別の解の組に関してやれば別のものが出来るがそれらは $GL_2(\mathbf{C})$ の中で共役である. よって微分方程式は測多価群の供役類を定める；横着をしてこの類のことも測多価群と呼ぶ.

上の 2 つの行列は測多価群の「生成元」である. およそ, 群を定義するのに色々のやり方があるが, 生成元だけを行列の形で与えるやりかたほど始末の悪いものは無い. 殆んどの場合, そんなことをされても群そのものについて, 何も分からないのである.

4.3 積分表示

先に与えた接続公式は色々な証明が知られている. 以下の証明は最短なものではないが, 途中で, 色々の知っておくべきことが出てくるので, 筋を述べる. この様な順序でやれば出るはずである. 先ず有名な積分公式

$$F(a,b,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \varphi dt, \quad \varphi = t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}$$

から始める；積分が収束するにはどういう条件が必要かは演習（以下この文を「収束条件演習」と略す）. ここで Γ は蝦蟇関数で,

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t}t^{p-1}dt$$

（収束条件演習）で与えられる. この積分公式は, φ の最後の項を二項定理

$$(1-y)^{-a} = \sum_0^\infty \frac{(a)_n}{n!}y^n$$

（収束条件演習）で展開して, 無限和を積分記号の外に出して（そんなことをしていいかは演習）下手関数公式

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

（収束条件演習）を使えば分かる（詳細演習）. ここまで黙っていたが, 積分の中の冪関数は多価関数なので, 偏角を指定しないと値が決まらないが, 全て 0 に近いとする. 気持ちが悪いが仕方ない. そこを何とかしようとして生まれた理論はある（捩表裏路地群 [MY] 参照）.

ところで, 上記積分に限らず, 積分

$$F_p^q = \int_p^q \varphi dt, \quad p,q \in \{0,1,\frac{1}{x},\infty\}$$

は（収束すれば）方程式 $E(a,b,c)$ の解である（演習）. 例えば $1/x$ を上半平面に採って, 相異なる p,q を線分で結んでそれに沿って積分すると考えれば, 4 面体の頂点を結ぶ訳だから, 符号を除いて 6 通りある. 一方 4 面体は読んで字の如く三角形 4 つで出来ている；各々の三角形で腰の積分定理を適用すると, 6 つの積分の間の 3 項関係が 4 つ出来る. 実際に腰の定理を適用する時に φ の多価性に泣かされるだろうが（演習, 細心の注意が必要）. 径数が特殊な場合を除きそれらの関係式は線形独立となり（演習）, 任意の二つの積分は任意の二つの積分の線形結合で書ける.

一方, 積分の形から F_0^1 は $x=0$ で正則であり, それ故 $f_0(0;x)$ の定数倍であるように, 各積分 F_p^q は $0,1,\infty$ のどこかでの局所指数を指数に持つ解の定数倍である；定数を決めるのには一寸した計算（置換積分）が必要である（演習）.

これらを全て実行すれば接続係数が求まる筈である（演習）.

注意：接続公式は, 普通, 賀臼悲哀（Gauss-Kummer）の公式

$$F(a,b,c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad \text{if}\quad \Re(c-a-b)>0$$

(この節の一番初めの積分公式から出る, 演習）を用いて証明する（演習）.

4.4 隣接関係

微分方程式 $E(a,b,c)$ や関数 $F(a,b,c;x)$ 等に於いて径数 (a,b,c) を整数だけずらした時に元のものと或関係がある；それを記述するのが隣接関係である. 例えば

$$\left\{x\frac{d}{dx}+a\right\}F(a,b,c;x)=aF(a+1,b,c;x),$$
$$\left\{x(1-x)\frac{d}{dx}+(c-a-bx)\right\}F(a+1,b,c;x)=-(a-c+1)F(a,b,c;x)$$

（証明は演習）. 更に上の一階の微分作用素は $(a(a-c+1)\neq 0$ なら）$E(a,b,c)$ の解全体と $E(a+1,b,c)$ の解全体の同型を与える（証明は演習）.

注意：「径数 (a,b,c) を整数だけずらしても, 測多価群は変わらない」とよく言われる；微分方程式は測多価群の共役類を決めるのだから, その共役類が変わらないと言う意味である. 隣接関係を使えば証明できる（演習）が, 前々節で与えた測多価群の生成元から, そのことを証明出来るならして下さい（演習）. 前節で出てきた積分表示された６つの解の内の２つを使って測多価群を定義すると, 積分で定義された関数の多価性は

$$\varphi=t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}$$

の多価性だけで決まっており（演習）, それは冪指数 $(b-1,c-b-1,-a)$ で決まり, それは整数差には依らないから, 測多価群の不変性は明らか（演習）といえば明らかである. 案外気持ちの悪いものである.

5 実指数超幾何微分方程式の黒写像

超幾何方程式 $E(a,b,c)$ の線形独立解 u_0,u_1 を用いて黒写像 $s:x\to z=u_0(x)/u_1(x)$ を定義した. この節では径数 a,b,c は実数とする. x が実である限り, 方程式 $E(a,b,c)$ の係数は実である. 3 区間

$$(-\infty,0),\quad (0,1),\quad (1,+\infty)$$

の各々の区間上では二つの線形独立解でその区間上では実数値なるものが存在する. 或区間での実解が別の区間では必ずしも実解でないことに注意. 黒写像は多価なので源（定義域）を上半平面 $\mathbf{H}_x$ に制限して, 的空間 $\mathbf{P}^1_z$ $(\cong \mathbf{C}\cup\{\infty\})$ に於ける像を観察する. 黒写像

は線形独立解の採り方に依存する; 別のを採ってきて定義すればその黒写像は元のとは 1 次分数変換で結ばれている.

以下の基本事項を思い出せ: 1 次分数変換は円を円に写す, 直線は無限遠点を通る円と見做す.

特異点 $x = 0, 1, \infty$ の周りでは, 黒写像 s は, 適当な 1 次分数変換をすれば, 冪関数 $x \to x^{|\lambda|}, (1-x)^{|\mu|}$ と $x^{|\nu|}$ に夫々似ている. 故に小半円盤で $x = 0, 1, \infty$ を中心とするものは角型域で開角 $\pi|\lambda|, \pi|\mu|, \pi|\nu|$ なるものに写る. 図 6 参照.

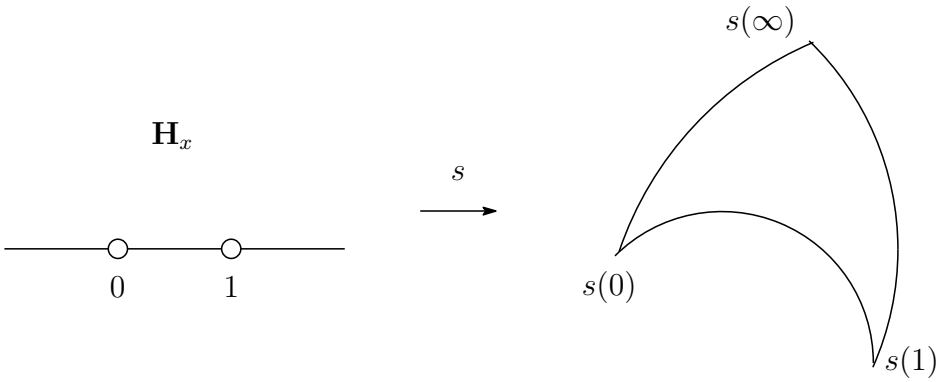


図 6: 黒三角形

まとめると, s による $\mathbf{H}_x$ の像は 3 つの円弧で囲まれ, それらは角 $\pi|\lambda|, \pi|\mu|, \pi|\nu|$ で交わる. もし

$$|\lambda| < 1, \quad |\mu| < 1, \quad |\nu| < 1,$$

なら像は円弧三角形となる；黒三角形と呼ばれている. この時は黒写像は $\mathbf{H}_x$ と黒三角形の等角同値を与える.

5.1 実で一般指数

上の不等式条件が満たされないと, 一般には的空間 $\mathbf{P}^1_z$ を何度も覆う. 例を数個挙げる. 三つの円が的球面を 8 つの三角形 $A, B, C, D, \bar{A}, \ldots, \bar{D}$ に分けると仮定せよ（図 7）. 像がどうなっているかを的空間で示す変わりに源空間 $\mathbf{H}_x$ に, 黒写像による的の 8 三角形の逆像を描く（図 8）. 絵を奇麗にする為に源空間 $\mathbf{H}_x$ を円盤に移しておく. もし $|\lambda|, |\mu|, |\nu| < 1$, なら勿論 $\mathbf{H}_x$ は D 色の一つの三角形である.

5.2 黒写像

黒写像の大域的なことは黒鏡像原理を黒三角形の角辺で繰返し使うことで分かる. 一般の径数ではやればやるほど滅茶苦茶になるが, 特別な場合には奇麗になる. 例えばもし

$$|\lambda| = \frac{1}{p}, \quad |\mu| = \frac{1}{q}, \quad |\nu| = \frac{1}{r}, \quad p, q, r \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$$

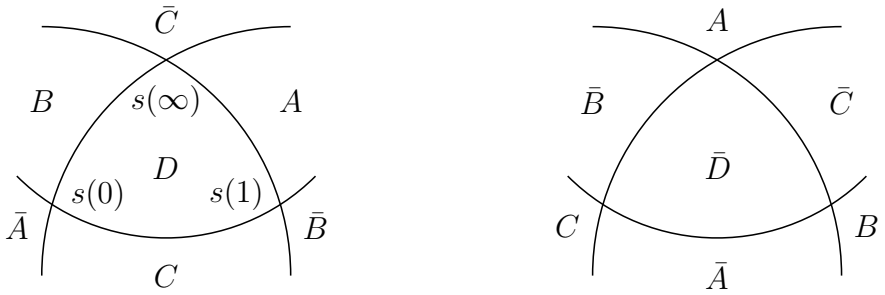


図 7: 8 つの三角形 $A, \ldots, \bar{D}$ が s-球面を分割

ならよい；これは必要条件ではない. 始めの三角形を黒く塗って, 隣の奴は白く塗る, その隣は黒くとやって行く. この黒白三角形模様はざっと三通りに分類さる.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

が 1 より大きいか, 等しいか, 小さいか, によってである.

- 第一類は, 三角形の数は有限でそれらは球面を覆い尽くす. 可能な 3 つ組 $(p \leq q \leq r)$ は

  $$(2, 2, r), \quad (2, 3, 3), \quad (2, 3, 4), \quad (2, 3, 5).$$

  それに応じて測多価群は二面体群, 四面体群, 八面体群, 二十面体群となる. 次節で少し詳しく述べる.

- 第二類は, 三角形の三辺を延長した三円が一点で交わる. その点を無限遠点に持って行けば三角形は三直線で囲まれ, 黒白三角形模様は全平面を覆う. 可能な 3 つ組 $(p \leq q \leq r)$ は

  $$(2, 2, \infty), \quad (3, 3, 3), \quad (2, 4, 4), \quad (2, 3, 6).$$

- 第三類は, 三角形の三辺を延長した三円に直交する円が唯一つ存在する. 黒白三角形模様はその円で囲まれた円盤内部を覆う. この場合は無数の 3 つ組 $(p \leq q \leq r)$ がある. 特に有名なのとして

  $$(p, q, r) = (2, 3, \infty), \quad (\infty, \infty, \infty), \quad (2, 3, 7),$$

  がある. これらの黒白三角形模様はよく見かけるであろう. (∞, ∞, ∞) の時だけ次次節で少し詳しく述べる.

5.3 多面体的測多価群（標準径数）

径数 a, b, c が有理数で

$$k_0 := \frac{1}{\lambda}, \quad k_1 := \frac{1}{\mu}, \quad k_\infty := \frac{1}{\nu}$$

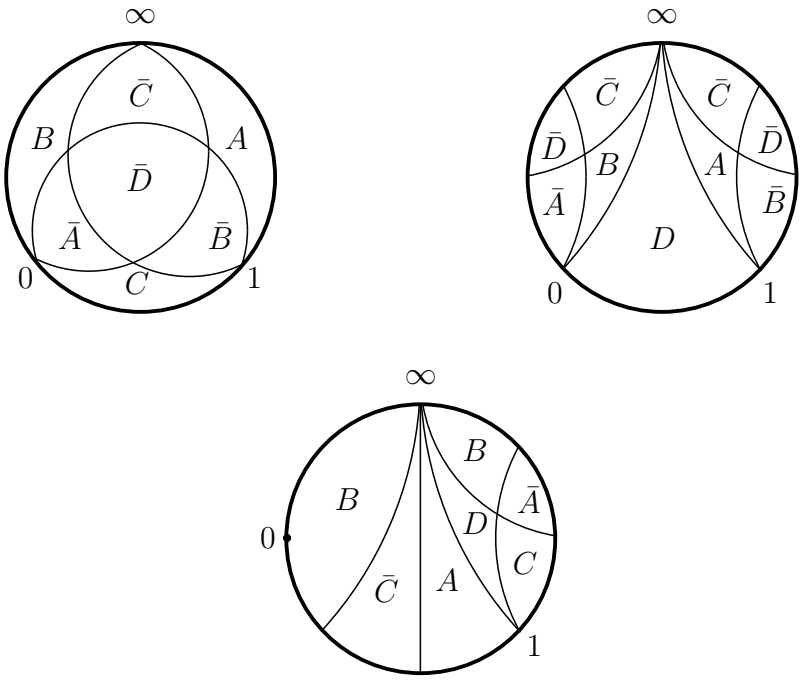


図 8: ８つの三角形の逆像 各種

が整数で, 三つ組み (k_0, k_1, k_∞) が以下

$$(2,2,n)\ (n=1,2,\ldots), \quad (2,3,3), \quad (2,3,4), \quad (2,3,5)$$

のとき射影的測多価群は夫々位数 $N = 2n,\ 12,\ 24,\ 60$ の有限群である.

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_\infty} - 1$$

に注意.

最高次係数 1 の z に関する多項式 $f_0(z), f_1(z), f_\infty(z)$ を（多価）像点 $s(0), s(1), s(\infty)$ だけで丁度一位の零を持つものとする. もし, $\infty \in Z$ がそれらの像点に入ってないなら, これらの多項式の次数はそれぞれ $N/k_0, N/k_1, N/k_\infty$ となる. もし, 例えば $\infty \in s(0)$ ならば f_0 の次数は $N/k_0 - 1$ となる.

逆黒写像

$$s^{-1} : Z \ni z \longmapsto x \in \bar{X} \cong \mathbf{P}^1$$

は一価で

$$x = A_0\ \frac{f_0(z)^{k_0}}{f_\infty(z)^{k_\infty}}$$

(A_0 は定数) で与えられる. 以下が成立（A_1, A は定数)：

$$1 - x = A_1\ \frac{f_1(z)^{k_1}}{f_\infty(z)^{k_\infty}}, \quad \frac{dx}{dz} = A\ \frac{f_0(z)^{k_0-1} f_1(z)^{k_1-1}}{f_\infty(z)^{k_\infty+1}}.$$

便利な表

二面体: $(k_0, k_1, k_\infty) = (2, 2, n)$, $N = 2n$.

$$A_0 = \frac{1}{4}, \quad A_1 = -\frac{1}{4}, \quad A = \frac{n}{4},$$

$$f_0 = z^n + 1, \quad f_1 = z^n - 1, \quad f_\infty = z.$$

f_∞ is of degree $1 = 2n/n - 1$, since $\infty \in s(\infty)$, that is, $x(\infty) = \infty$.

四面体: $(k_0, k_1, k_\infty) = (2, 3, 3)$, $N = 12$.

$$A_0 = -12\sqrt{3}, \quad A_1 = 1, \quad A = 24\sqrt{3},$$

$$\begin{aligned} f_0 &= z(z^4 + 1), \\ f_1 &= z^4 + 2\sqrt{3}z^2 - 1 = (z^2 - 2 + \sqrt{3})(z^2 + 2 + \sqrt{3}), \\ f_\infty &= z^4 - 2\sqrt{3}z^2 - 1 = (z^2 - 2 - \sqrt{3})(z^2 + 2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

f_0 is of degree $5 = 12/2 - 1$, since $\infty \in s(0)$, that is, $x(\infty) = 0$.

八面体: $(k_0, k_1, k_\infty) = (3, 2, 4)$, $N = 24$.

$$A_0 = \frac{1}{108}, \quad A_1 = \frac{-1}{108}, \quad A = \frac{1}{27},$$

$$\begin{aligned} f_0 &= z^8 + 14z^4 + 1 = (z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1)(z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1), \\ f_1 &= z^{12} - 33z^8 - 33z^4 + 1 = (z^4 + 1)(z^2 + 2z - 1)(z^2 - 2z - 1)(z^4 + 6z^2 + 1), \\ f_\infty &= z(z^4 - 1) = z(z^2 + 1)(z^2 - 1). \end{aligned}$$

f_∞ is of degree $5 = 24/4 - 1$, since $\infty \in s(\infty)$, that is, $x(\infty) = \infty$.

二十面体: $(k_0, k_1, k_\infty) = (3, 2, 5)$, $N = 60$.

$$A_0 = \frac{-1}{1728}, \quad A_1 = \frac{1}{1728}, \quad A = \frac{-5}{1728},$$

$$\begin{aligned} f_0 &= z^{20} - 228z^{15} + 494z^{10} + 228z^5 + 1 \\ &= (z^4 - 3z^3 - z^2 + 3z + 1)(z^8 - z^7 + 7z^6 + 7z^5 - 7z^3 + 7z^2 + z + 1) \\ &\quad \times (z^8 + 4z^7 + 7z^6 + 2z^5 + 15z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 4z + 1), \\ f_1 &= z^{30} + 522z^{25} - 10005z^{20} - 10005z^{10} - 522z^5 + 1 \\ &= (z^2 + 1)(z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1)(z^4 + 2z^3 - 6z^2 - 2z + 1) \\ &\quad \times (z^8 + 4z^7 + 17z^6 + 22z^5 + 5z^4 - 22z^3 + 17z^2 - 4z + 1) \\ &\quad \times (z^8 - 6z^7 + 17z^6 - 18z^5 + 25z^4 + 18z^3 + 17z^2 + 6z + 1), \\ f_\infty &= z(z^{10} + 11z^5 - 1) \\ &= z(z^2 + z - 1)(z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 3z + 1)(z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 2z + 1). \end{aligned}$$

f_∞ is of degree $11 = 60/5 - 1$, since $\infty \in s(\infty)$, that is, $x(\infty) = \infty$.

5.4 乱舞だ関数

径数が $(\lambda,\mu,\nu)=(0,0,0)$ のとき, 逆黒写像は乱舞だ関数の名で知られる保形関数（楕円芋蔓関数）で与えられる. 先ず３つの手多関数を

$$\theta_2=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{(2n-1)^2/2},\quad \theta_3=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{2n^2},\quad \theta_0=\sum_{-\infty}^{\infty}(-)^n q^{2n^2}$$

$(z\in\mathbf{C},\Im(z)>0,q=e^{\pi iz/2})$ で定義する. 有名な等式

$$\theta_3^4-\theta_0^4=\theta_2^4$$

は（ここで直ぐ使わなくとも）覚えておいて損はない. このとき乱舞だ関数を例えば

$$\lambda(z)=\left(\frac{\theta_0}{\theta_3}\right)^4=1-16q^2+128q^4-704q^6+3072q^8-11488q^{10}+38400q^{12}-\cdots$$

と定義する. （この定義では $\lambda:\infty\mapsto 1,0\mapsto 0,1\mapsto\infty$ となるが, 順列の数 3! だけ定義があるので文献に当たる時は注意を要する. ）　有用な公式として鉄石級数（殆ど保型形式）

$$E_2(z)=\frac{1}{24}\frac{\eta'(z)}{\eta(z)}=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}d\right)e^{2\pi inz}=1-24(q^4+3q^8+4q^{12}+7q^{16}+\cdots)$$

を使うと,

$$\frac{\theta_0'}{\theta_0}-\frac{1}{6}E_2=-\frac{1}{6}(\theta_2^4+\theta_3^4),\quad \frac{\theta_2'}{\theta_2}-\frac{1}{6}E_2=\frac{1}{6}(\theta_0^4+\theta_3^4),\quad \frac{\theta_3'}{\theta_3}-\frac{1}{6}E_2=-\frac{1}{6}(\theta_0^4-\theta_2^4)$$

が成立, ここで

$$'=q\frac{d}{dq}=\frac{2}{\pi i}\frac{d}{dz}.$$

故に

$$\lambda'=-2\theta_2^4\lambda\quad\text{とか}\quad\frac{\lambda''}{\lambda'}=(\log\lambda')'=4\frac{\theta_2'}{\theta_2}+\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{4}{6}E_2+\frac{4}{6}(\theta_0^4+\theta_3^4)-2\theta_2^4$$

となる.

5.5 高次元化

上に述べた実指数の超幾何的黒写像の話は（前々世紀終わりから前世紀初頭にかけて）黒氏による. これは微分方程式から発し, 初等関数論の定理が次々とうまく適用できて誠に気持ちがいいし, 面白い群が測多価群として見つかり, それに関する不変式・保型形式・保形関数も出てきて, 色々遊べて, 楽しい物です. 感心ばかりしていても仕様がないので, これ以上これに関してすることが無い訳では無いでしょうが, 一般化を考えるのが普通です. それには色々の方向があります.

１）超幾何微分方程式は特異点が３つだったので, ４つにしてみる — 昔から試みられているが, 難しいことが知られている.

２）超幾何微分方程式は２階だったので, ３階にしてみる — 特に ${}_3F_2$ で色々研究されている. 一般に

$$ {}_pF_q\left(\begin{array}{c} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{array} |x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}. $$

３）実指数でないときを考える — 特別な場合を次節でやる.

しかし, 何といっても（数学の多くの問題でもそうであるように）一番手頃なのは高次元化です；というか, 数学はそうして発展してきたのでしょう. 大方針は示されているから, 迷わないし, 適当に複雑になるから, 出来た時の満足度もあるという訳です. 既に前世紀初頭には光◦が２次元の時に例を一つ計算した；Appell が定義した２変数超幾何微分方程式のうちの F_1 といわれる物をから出発する. その逆写像の精密化は志賀弘典氏による. この方向の組織的研究は７０年代から８０年代にかけて寺田俊明氏によってなされた; n 変数 $(x_1,\ldots,x_n)$ で, 局所解空間が $n+1$ 次元で, 超平面族

$$ \prod_i x_i(1-x_i) \prod_{i\neq j} (x_i - x_j) = 0 $$

で特異な（超幾何）方程式を使う. それからも発展が続いているが, 段々代数幾何的技術の追求になってきたようである. ２０世紀の黒写像の研究の主流は実指数のそれの高次元化だったのであります.

ここで, 元に帰って, もう一度元祖超幾何関数で勝負してみようと思う.

6　純虚指数差超幾何微分方程式の黒写像

この節では指数差は純虚とする. その前に微分方程式の重要な変形をする.

6.1　未知関数の射影的変換

黒写像 $s : x \to z = u_0(x)/u_1(x)$ は解の比で定義されている故, 未知関数にどんな関数(多価でもいいし, どんな特異性を持っていようと構わない, 恒等的に零でなければ）を掛けても黒写像は変わらない. 以下の変形は大変有名なもの（これは黒微分の発祥であった, 黒微分をご存知ない方は気にしないで結構です, 以下出てきません. 佐々木さんの講義録の極初めのほうに丁寧な説明がありますから見てください.）であります. 一般に

$$u'' + pu' + qu = 0$$

の形の方程式を考えて, 未知関数 u を $u = fv$ なる v に替えると

$$v'' + \left(p + 2\frac{f'}{f}\right)v' + \left(q + p\frac{f'}{f} + \frac{f''}{f}\right)v = 0$$

となりますから, f として $p + 2f'/f = 0$ の解（求積可）を採ってくると, v の係数は

$$q - \frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2$$

となります.

6.2　各区間の像は円です

前小節の変換を $E(a, b, c)$ に於いてなせば (v を u に戻しておく)

$$u'' + \frac{1}{4}\left(\frac{1-\lambda^2}{x^2} + \frac{1-\mu^2}{(1-x)^2} + \frac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{x(1-x)}\right)u = 0$$

となる. 係数を見ると, もし, 指数差 λ, μ, ν が純虚なら, x が実なら方程式の係数は実である. よって, 前節と同じ理由で三区間

$$(-\infty, 0), \quad (0, 1), \quad (1, +\infty),$$

の各区間で実数値なる二つの線形独立解が存在する. 故に黒写像による三区間の像は円であります.

黒写像を x-上半平面に制限する. 三実区間は円に行くのだから, 三円の配置が問題である. 球面上の三円は交わらないので, 位相的に二つの配置が考えられる: 矢的状か豚鼻状かである（図 9）. どっちが正しいか当ててみよ.

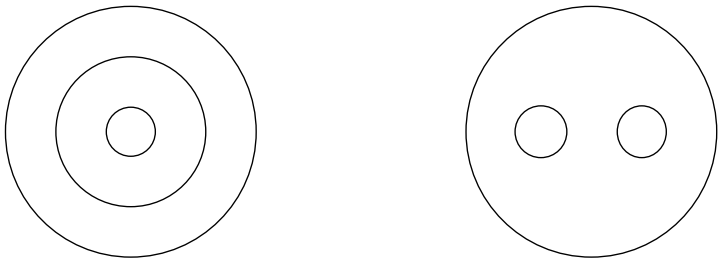


図 9: 矢的と豚鼻

6.3 原点の近くでは黒写像は $x \mapsto x^\lambda$ に近い

$$\lambda = i\theta_0, \quad \mu = i\theta_1, \quad \nu = i\theta_2,$$

$(\theta_0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R})$ と置く, 即ち

$$a = \frac{1}{2} - i\frac{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2}{2}, \quad b = \frac{1}{2} - i\frac{\theta_0 + \theta_1 - \theta_2}{2}, \quad c = 1 - i\theta_0.$$

純虚指数の虚部は正としておく (この仮定は図を書きやすくする為で他意はない.) 二つの黒写像

$$s_0 = \frac{f_0(x;\lambda)}{f_0(x;0)} \quad と \quad s_1 = \frac{f_1(x;\mu)}{f_1(x;0)},$$

を考える, それらの関係は

$$s_0 = \frac{As_1 + C}{Bs_1 + D} \quad と \quad s_1 = \frac{Ds_0 - C}{-Bs_0 + A}.$$

それらの局所的振舞は

$$\begin{aligned} s_0 &\approx x^\lambda \quad x = 0 \quad の周りで, \\ s_1 &\approx (1-x)^\mu \quad x = 1 \quad の周りで, \end{aligned}$$

であった, ここで $\approx$ は 'とても近い' を意味する.

区間 $(-\infty, 0)$ と $(0, 1)$ の像は二円であることを忘れるな.

上半平面の $x = 0$ の近傍で s_0 は冪関数 x^λ でいくらでも近似できる. §2.2 で冪関数のことを調べたことを思い出す: どんな自然数 $n \in N$ に対しても s_0 は半円環 $\{x \in \mathbf{H}_x \mid e^{-2n-1} < |x| < e^{-2n}\}$ と半円環 $\{z \in \mathbf{H}_z \mid e^{-\pi\theta_0} < |z| < 1\}$ の等角同値を与える. s_0 は $x = 0$ の周り (例えば半径 ϵ の半円盤) で冪関数 x^λ と近く, それは区間 $(-\epsilon, 0)$ と $(0, \epsilon)$ を半径 1 と $e^{-\pi\theta_0}$ の円に移す. 一方 s_0 はそれらの区間を円に移すことは予め分かっていたのだった. よって, s_0 はそれらの区間を丁度それらの円に写し, どんな小さな半円盤を円環 $\{z \in \mathbf{C}_z \mid e^{-\pi\theta_0} < |z| < 1\}$ に写すのである.

くどいが, $x = 0$ の上半平面での近傍は s_0 によって半径 $\exp(-\theta_0\pi)$ と半径 1 の円で囲まれる円環に写される; 単位円は区間 $(0, 1)$ の像, 小さい方は区間 $(-\infty, 0)$ の像.

同様に十分小さい $x = 1$ の上半平面内の近傍は s_1 によって半径 1 と半径 $\exp(\theta_1\pi)$ の円で囲まれる円環に写される; 単位円は区間 $(0, 1)$ の像 (これは変数 $1 - x$ が区間 $(0, 1)$ で実正だからである.) 図 10 参照.

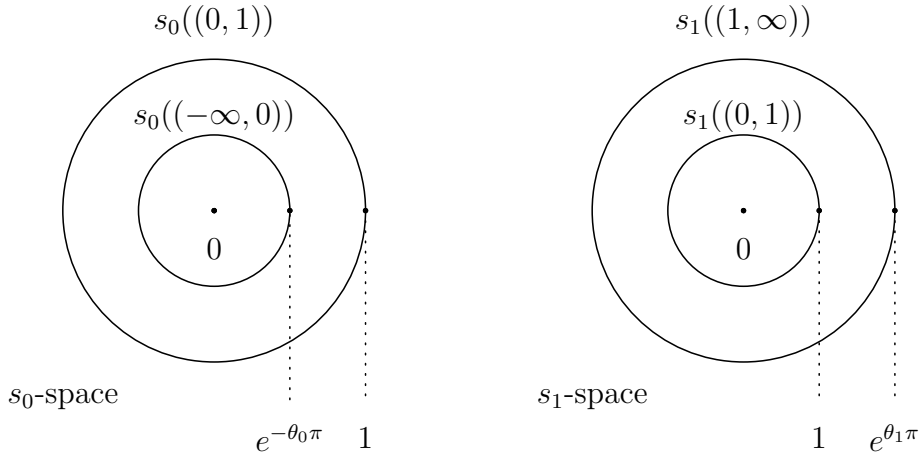


図 10: s_0-空間での同心円と s_1-空間での同心円

6.4 三円の配置

三つの円を同じ平面, そうだな s_1-平面, に描こう. §4.1 の接続行列がそれを可能ならしめる. 三円が矢的を成すか豚鼻をなすかと以前問うたが, 実は豚鼻が正解である（図 11.）正確に述べれば以下のようになろう.

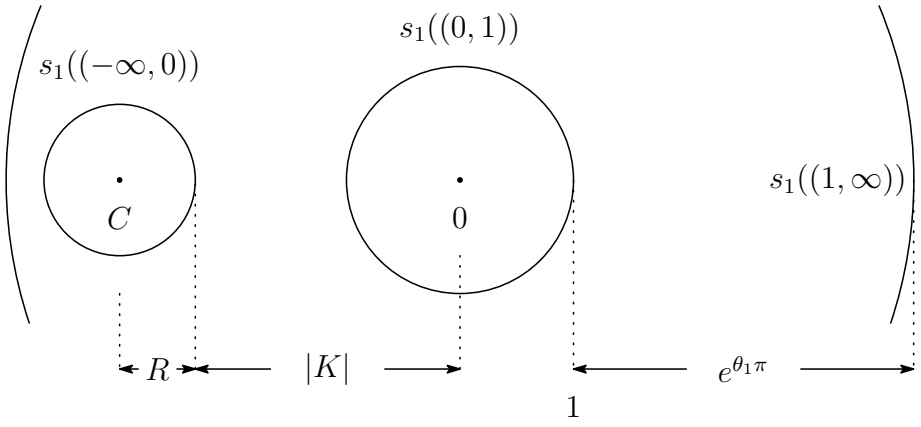


図 11: s-空間内の 3 円が豚鼻 $\mathcal{PN}$ をなす

命題 6.1 三指数差を $\lambda = i\theta_0,\ \mu = i\theta_1,\ \nu = i\theta_2$, $(\theta_0, \theta_1, \theta_2 > 0)$ とする. x-上半平面の黒写像 $s_1 = f_1(x;\mu)/f_1(x;0)$ による像は交わらない三円

- 中心 0 の単位円, 区間 $(0,1)$ の像,
- 半径 $\exp(\theta_1\pi)$, 中心 0 の円, 区間 $(1,\infty)$ の像,
- 半径 R, 中心 K の円, 区間 $(-\infty,0)$ の円（R と K の正確な値は次節で与える）

で囲まれている. 二番目の円が後の二つを含み, 全体で豚鼻を成す.

図 11 では s_1-平面を回転して三番目の円の中心が実負になるようにした. 言葉を変えれば, 新たに黒写像を

$$s : x \longmapsto \frac{\bar{\xi}}{|\xi|} s_1(x)$$

(ξ の値は次節の補題 6.2) で定義したとき, 三区間の像の三円が丁度図 11 となる. 大きな円盤から二つの小円盤を除いたものを $\mathcal{PN}$ と書き豚鼻と呼ぶ.

上半平面の s による像が $\mathcal{PN}$ だと早合点しないで下さい; どうなるかは §6.6.2 で分かる.

次の小節はこのことの証明に費やされる.

6.5 証明

$a - 1/2,\ b - 1/2, c - 1$ が純虚故 $\bar{a} = 1 - a,\ \bar{b} = 1 - b,\ \bar{c} = 2 - c$ となり, また蝦蟇関数は実関数 ($\Gamma(\bar{t}) = \bar{\Gamma}(t)$) 故, $A = \bar{D},\ B = \bar{C}$ となる. s_0 と s_1 は 1 次分数変換で結ばれている（§6.3）から, 単純計算で以下が分かる.

補題 6.2 もし s_0 が中心 0 半径 r の円を動けば, s_1 は中心 K 半径 R の円を動く, ここで

$$K = -\frac{\xi(1 - r^2)}{|\xi|^2 - r^2}, \quad R = \frac{r(1 - |\xi|^2)}{|\xi|^2 - r^2}, \qquad \xi = \frac{\bar{A}}{B}.$$

故に単位円は単位円に写り, s_0-平面にある半径 $r = \exp(-\theta_0\pi)$ の円は s_1-平面の中心と半径は上に与えた円に写る訳です. 次の補題は問題の第三の円が大人しく第一の円と第二の円の間に収まることを保証する.

補題 6.3 $|K| - R - 1 > 0, \quad \exp(\theta_1\pi) - |K| - R > 0$ が成立.

よく知られた等式

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

(これの幾何的意味に興味があれば [MY] 参照) の特別な場合として

$$|\Gamma(\frac{1}{2} + iy)|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi y}, \quad y : \text{実}$$

が分かる. また ξ の定義から

$$|\xi| = \left| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a + i\theta_0)} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b + i\theta_0)} \right|$$

を得る. a と b の実部は $1/2$ だから, 上のことを使える：

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= \frac{\cosh((-\theta_0 + \theta_1 + \theta_2)\pi/2) \cosh((\theta_0 - \theta_1 + \theta_2)\pi/2)}{\cosh((\theta_0 + \theta_1 + \theta_2)\pi/2) \cosh((\theta_0 + \theta_1 - \theta_2)\pi/2)} \\ &= \frac{\cosh \theta_2\pi + \cosh(\theta_0 - \theta_1)\pi}{\cosh \theta_2\pi + \cosh(\theta_0 + \theta_1)\pi}. \end{aligned}$$

だから $\theta_2 \geq 0$ の関数として $|\xi|$ は単調増加で値 1 に至り,

$$1 > |\xi|_{\theta_2 = 0} = \frac{\exp(\theta_1 - \theta_0)\pi + 1}{\exp(-\theta_0\pi) + \exp(\theta_1\pi)} > r \ (= e^{-\theta_0\pi}).$$

今や準備は出来た；以下の不等式が補題を証明する:

$$\begin{aligned} |K|-R-1 &= \{(1-r^2)|\xi|-r|1-|\xi|^2|-||\xi|^2-r^2|\}/||\xi|^2-r^2| \\ &= \{(1-r^2)|\xi|-r(1-|\xi|^2)-(|\xi|^2-r^2)\}/(|\xi|^2-r^2) \\ &= (1-r)(|\xi|-r)(1-|\xi|)/(|\xi|^2-r^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\theta_1\pi}-|K|-R &= e^{\theta_1\pi}-\frac{|\xi|(1-r^2)}{|\xi|^2-r^2}-\frac{r(1-|\xi|^2)}{|\xi|^2-r^2} \\ &= e^{\theta_1\pi}-\frac{(1-r|\xi|)(|\xi|+r)}{|\xi|^2-r^2}=\frac{e^{\theta_1\pi}(|\xi|-r)-1+r|\xi|}{|\xi|-r} \\ &= \frac{(e^{\theta_1\pi}+e^{-\theta_0\pi})|\xi|-(e^{(\theta_1-\theta_0)\pi}+1)}{|\xi|-r}. \end{aligned}$$

6.6 黒写像の大域的性質

我が黒写像 s は $\mathbf{C}-\{0,1\}$ 内を自由に解析接続すれば双方向多価である, 即ち ∞ 対 ∞. だから定義域を x-上半平面に制限した. しかしそれでもまだ ∞ 対 1 である.

領域 $F_x \subset \mathbf{H}_x$ と $F_s \subset \mathbf{H}_s$ をうまくとってきて, 黒写像 s の F_x への制限が F_x と F_s との間の等角同値を与え, 黒写像の全体像はその制限されたものから黒鏡像原理を繰返し使えば分かるという具合にしたい. 以下のようにやればいい: 豚鼻 $\mathcal{PN}$ を実軸で切り, 上半分の二重橋状のものを F_s とし, その逆像を F_x とする.

領域 F_s も二重橋状ではある (図 12) が少し歪んでいる— 三実区間と三曲線で囲まれているが, それらの曲線は円弧ではない. このことは別に意外ではない, なぜなら黒写像の逆写像は超幾何方程式の黒写像ではないからである.

ともかく, これらの二重橋状領域 F_x と F_s を s の基本領域と呼ぶ. §2.2.2 では純虚指数冪関数で二つの一重橋状領域を得たのであった.

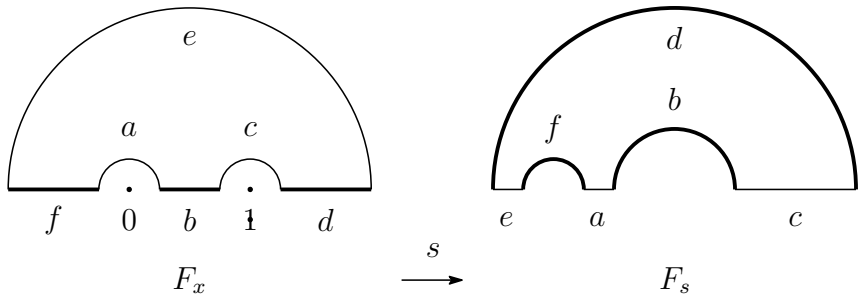


図 12: 基本領域 F_x と F_s

6.6.1 解析接続 I

基本領域に制限された黒写像

$$s|_{F_x} : F_x \longrightarrow F_s$$

に黒鏡像原理を適用して三実区間 (実軸と F_x の交わり) を通して F_x の (複素共役) 鏡映 $\bar{F}_x$ に解析接続する . 三区間の像は半円故 $\bar{F}_x$ の像はそれらの円による鏡像となる (図 13.) 次

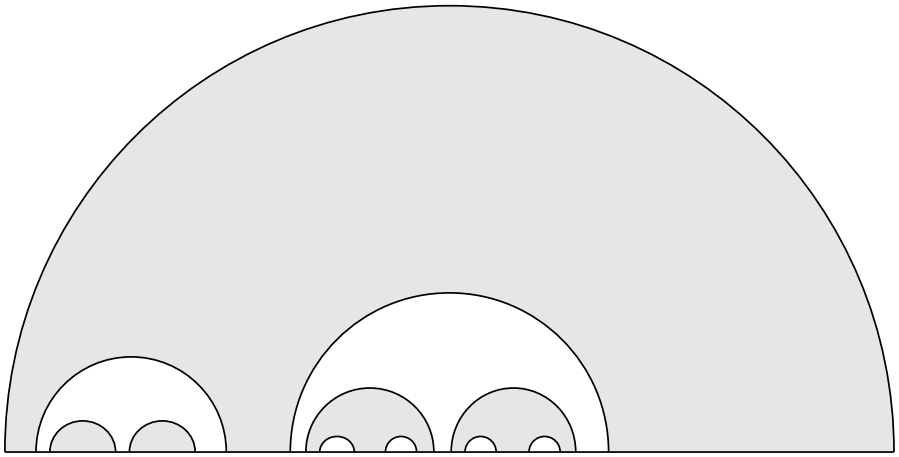


図 13: $\mathbf{H}_s$ 上の一寸来群の作用

に鏡像原理を再び三区間で使って $\bar{F}_x$ から F_x へ接続する, この調子でどんどんやる.

命題 6.4 2-連結領域 $F_x \cup \bar{F}_x \cup \{$ 三区間 $\}$ の s による像は s-平面の上半平面 $\mathbf{H}_s$ を覆い尽くす. $\mathbf{H}_s$ で定義された逆写像は一価で領域 $F_x \cup \bar{F}_x \cup \{$ 三区間 $\}$ を無限回覆い, 同型

$$\mathbf{H}_s/\Lambda \cong F_x \cup \bar{F}_x \cup \{ \text{三区間} \}$$

を与える, ここで Λ は超幾何方程式の測多価群.

群 Λ は種数 2 の一寸来群である. この一寸来群に関する保型関数については [IY1] 参照.

6.6.2 解析接続 II

次に制限黒写像 $s|_{F_x} : F_x \mapsto F_s$ を x-平面の上半平面 $\mathbf{H}_x$ に接続する.

命題 6.5 鏡像原理を $s|_{F_x}$ の逆写像に適用する. F_s から実区間 (実軸と F_s の交わり) を通して (複素共役) 鏡像 $\bar{F}_s$ へ, またそれらの三区間を通して F_s へ, とどんどんやっていく. すると, 逆写像による全像, 即ち $s^{-1}(\mathcal{PN})$, は上半平面 $\mathbf{H}_x$ 全体を覆わない. それは $\mathbf{H}_x$ から無数の交わらない位相的円盤を除いたものになる. 図 *15* 参照.

雑な説明: 鏡像原理を s に F_x の境界曲線 c と F_s の境界線分 c に適用する. 図 12 とその ($x = 1$ 中心の) 拡大図である図 14 を見て納得して下さい.

上の命題は以下のように言い替えられる: 上半平面 $\mathbf{H}_x$ は写像 s により全 s-球面を無限回覆う, $\mathbf{H}_x$ の境界である三実区間は三円に写る. 図 16 の方がもっと印象的かも知れない; 上半平面 $\mathbf{H}_x$ は円盤に移され, b, d, f 色の泡が $0, 1, \infty$ に収束している.

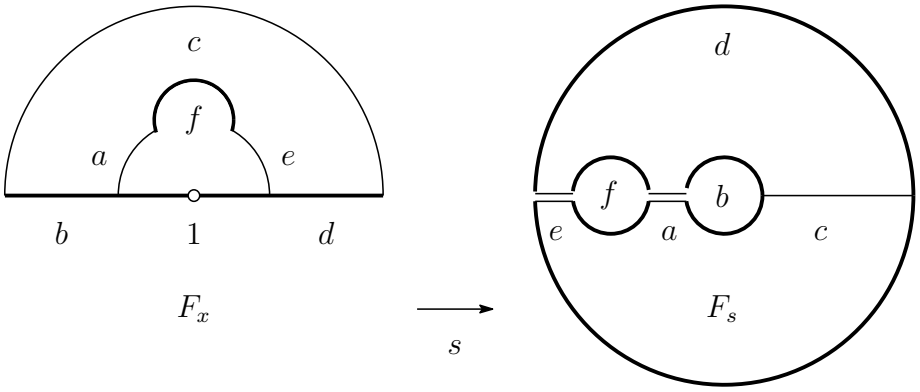


図 14: 曲線/区間 c を越えて解析接続

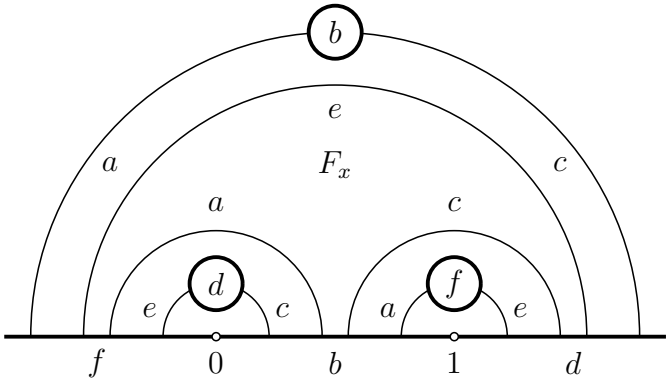


図 15: $\mathcal{PN}$ の逆像

6.7　発展学習

以上の指数差純虚数の話は, 何処にでも載っていることではないが, 一旦演習問題として与えられれば誰にでも出来ることである. この先に何か面白いことがあるだろうか.

例えば, 一寸来群は一寸位変形しても一寸来群だから, (λ, μ, ν) を純虚から少し動かしても測多価群は一寸来群. (a, b, c) の空間で $E(a, b, c)$ の測多価群が（種数 2 の）一寸来群であるものの全体は複素 3 次元の開集合である. この空間について [IY2] で一寸調べてみた.

7　又曲黒写像

黒写像の的は複素射影直線で位相的には球面であった. 一方超幾何微分方程式の測多価群は $GL(2, \mathbf{C})$ の部分群である. 群 $GL(2, \mathbf{C})$ が自然に働くのは複素射影直線よりも 3 次元又曲空間である；群 $GL(2, \mathbf{C})$ の離散部分群は 3 次元又曲空間には必ず完全不連続に働くが, 複素射影直線では必ずしもそうならないからである（空でないどんな開集合にも不連続に働かない意）. 一方, 3 次元又曲空間の理想境界が複素射影直線と考えられるから, 黒

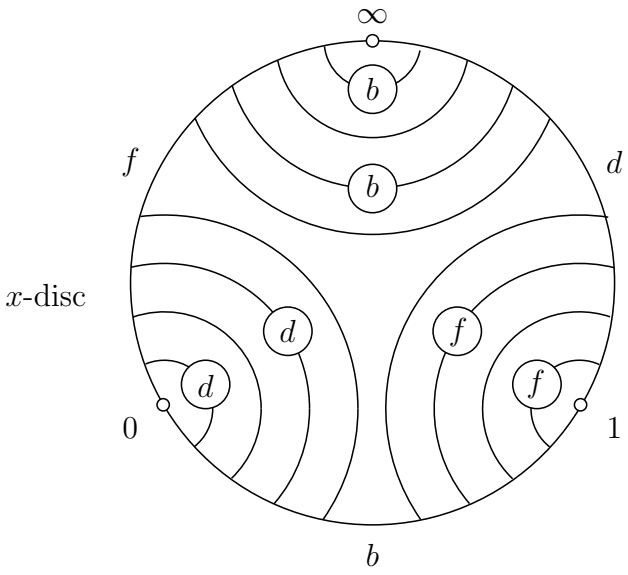


図 16: b, d, f 色の泡がもっと印象的か

写像の的を複素射影直線から 3 次元又曲空間に「上空移行」出来ないかと考えるのは自然であろう. それには次のようにやるとよい. 先ず的空間の又曲空間の解説から.

7.1 3 次元又曲空間

小学校で習う反比例の graph は双曲線ではない；又曲線である. さて, 3 次元又曲空間 $\mathbf{H}^3$ を 2×2-正値 Hermit 行列全体を「正定数倍」という関係で割った商空間とする. 色々な雛形が使われる. 先ず上半空間 $\mathbf{C} \times \mathbf{R}_{>0}$：

$$\mathbf{C} \times \mathbf{R}_{>0} \ni (z,t) \qquad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} t^2+|z|^2 & \bar{z} \\ z & 1 \end{pmatrix} \in Her^+(2),$$

$$\mathbf{C} \times \mathbf{R}_{>0} \ni \frac{1}{k}\Big(w, \sqrt{hk-|w|^2}\Big) \quad \longleftarrow \quad \begin{pmatrix} h & \bar{w} \\ w & k \end{pmatrix} \in Her^+(2).$$

次に明国好き空間

$$L(+,-,-,-) = \{(x_0,x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^4 \mid x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0, x_0 > 0\}$$

の部分

$$L_1 : x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1;$$

これが一番又曲という感じがするでしょう:

$$L_1 \ni \frac{1}{2\sqrt{hk-|w|^2}}(h+k, w+\bar{w}, \frac{w-\bar{w}}{i}, h-k) \longleftarrow \begin{pmatrix} h & \bar{w} \\ w & k \end{pmatrix} \in Her^+(2).$$

そして最後に球の内部

$$B_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}.$$

対応は以下の通り：

$$L_1 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \frac{1}{1+x_0}(x_1, x_2, x_3) \in B_3.$$

これらをその時々使い分ける.

7.2 又曲黒写像

超幾何微分方程式の（独立）解 u_0, u_1 に対して値の比 $u_0(x) : u_1(x)$ を対応させる黒写像の代わりに

$$H(x) := U(x)\ {}^t\bar{U}(x), \qquad U(x) = \begin{pmatrix} u_0 & u_0' \\ u_1 & u_1'' \end{pmatrix}(x)$$

を対応させるのである. 行列 $U\ {}^t\bar{U}$ は正値 Hermit なので, 3 次元又曲空間への写像が定義されるのである. 実際にはある理由から, 超幾何微分方程式 $E(a, b, c)$ その物でなく, 6.2 節に書いた SL 型のものを使う；$\det U$ が定数となる.

正則行列 P で U を PU と変換すれば H は $PH\ {}^t\bar{P}$ と変わるの. 特に方程式の測多価群は又曲空間の自己同形として働く.

7.3 燕尾

曲面の特異性で一番月並な物は尖端と呼ばれるもので, 平面曲線の $(2, 3)$ 型尖点 $(x^2 = y^3)$ がずらっと並んだ物である. その次に月並（年並）なもののひとつが燕尾である. これを観察しよう.

7.3.1 3 次方程式の判別式

t に関する実係数 3 次方程式

$$t^3 + xt - y = 0$$

が 3 つの異なる実根を持つための条件は, その判別式

$$27y^2 + 4x^3$$

が負であることである. また重根を持つのはそれが消える時である. 高校の教科書には載ってないが, 気の利いた参考書にはある；証明は演習.

7.3.2 燕尾の影

写像

$$F : \mathbf{R}^2 \ni (s, t) \longrightarrow (x, y) = (s - t^2, st) \in \mathbf{R}^2$$

を考える. その関数行列式（夜媚庵）は

$$s + 2t^2$$

となる. この（滑らかな）曲線 $C : s + 2t^2 = 0$ の F による像は原点に $(2, 3)$ 型尖点を持つ曲線

$$F(C) : 27y^2 + 4x^3 = 0$$

となる. 一般に「像」を求めることは「逆像」を求めるより格段に難しい。この場合も直接消去しようとせずに、x, y を与えられた時に s, t に関する方程式 $s - t^2 = x, st = y$ を解くことを考えて、s を消去すると t に関する方程式 $t^3 + xt - y = 0$ となり、前小節で準備したことが使えるのである. 写像 F は t 軸を二つ折りにして x 軸の負半分に移す, また像 $F(C)$ の逆像は C と, C に原点で接する曲線である；実際

$$27y^2 + 4x^3|_{x=s-t^2, y=st} = (s + 2t^2)^2(4s - t^2).$$

(s, t) 空間の原点中心の円周の F による像は図 17 のようになる; 右の図は完成してないから読者が完成させよ (演習).

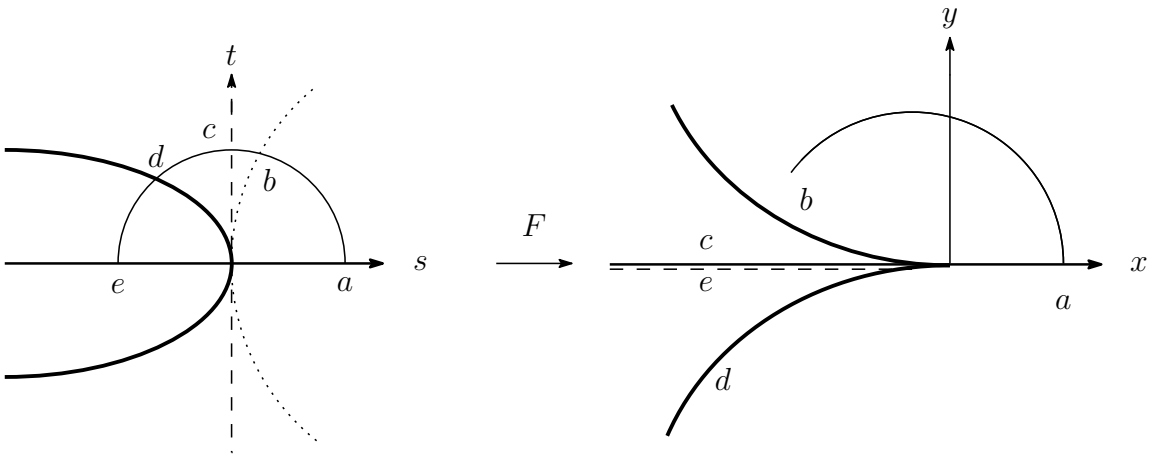


図 17: 写像 F とその像

7.3.3 燕尾

写像

$$\tilde{F} : \mathbf{R}^2 \ni (s, t) \longrightarrow (x, y, z) = (s - t^2, st, s^2 - 4st^2) \in \mathbf{R}^3$$

を考える. この写像は曲線 C に沿って退化する（微分の階数が 2 未満になる）; 点 $(-2t^2, t) \in C$ の行き先は

$$(-3t^2, -2t^3, 12t^4).$$

このようなことを色々注意してちょこちょこっと計算すると, (s, t) 空間の原点中心の円周の $\tilde{F}$ による像は図 18 のようになる; 右の図は完成してないから読者が完成させよ (演習). 前小節の的（平面）で起こったことが空間に持ち上がっていることが分かる. 燕の尻尾と言うよりも, 私には烏賊の頭部を想像させる.

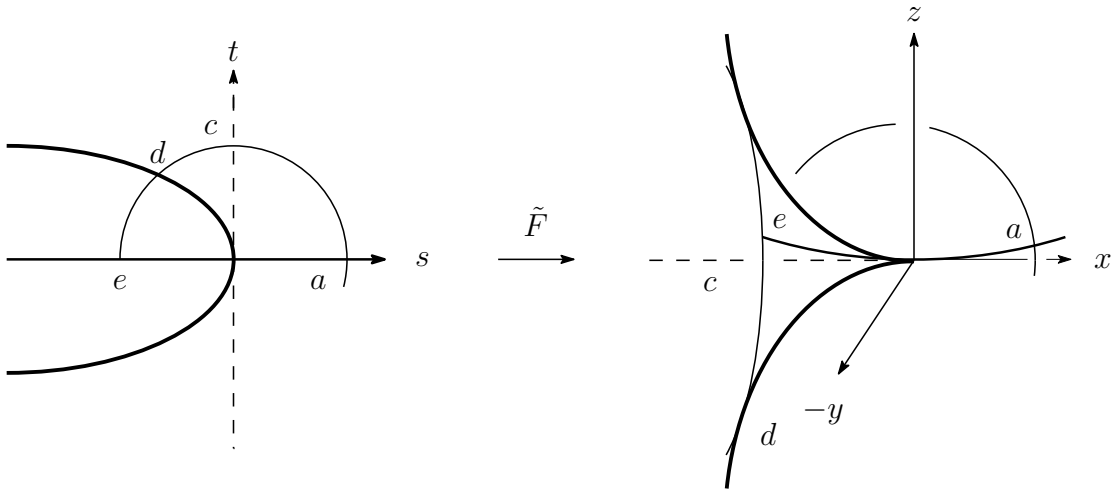


図 18: 燕尾: 写像 $\tilde{F}$ とその像

7.4 又曲黒写像の特異点

方程式の正則点（そこでは黒写像は正則）に於いても又曲黒写像は特異になりうる. [KRSUY] では幾何的な考察がなされているが, ここでは冪級数だけを用いてひたすら計算することで, どこでどんな特異性が現れるかを調べる.

SL 型微分方程式 $u'' - q(x)u = 0$ を正則点 ξ の周りで考える. $x = \xi + y$ と置いて, 展開する：

$$q(\xi + y) = q(\xi) + q'(\xi)y + \cdots = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots.$$

この方程式は以下の解を有する：

$$u_1 = y + c_3 y^3 + c_4 y^4 + \cdots, \qquad u_0 = 1 + \frac{q_0}{2} y^2 + d_3 y^3 + d_4 y^4 + \cdots.$$

初めの何項かを決めよう：

$$\begin{aligned} u_1'' &= 6c_3 y + 12c_4 y^2 + 20c_5 y^3 + \cdots \\ &= (q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots)(y + c_3 y^3 + \cdots) \\ &= q_0 y + q_1 y^2 + (q_0 c_3 + q_2) y^3 + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &= q_0 + 6d_3 y + 12d_4 y^2 + \cdots \\ &= (q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots)(1 + \tfrac{q_0}{2} y^2 + d_3 y^3 + \cdots) \\ &= q_0 + q_1 y + (q_2 + \tfrac{q_0^2}{2}) y^2 + \cdots \end{aligned}$$

故

$$6c_3 = q_0, \quad 12c_4 = q_1, \quad 20c_5 = q_0 c_3 + q_2 \quad \text{とか} \quad 6d_3 = q_1, \quad 12d_4 = q_2 + \frac{q_0^2}{2}$$

が分かる；即ち

$$u_1 = y + \frac{q_0}{6} y^3 + \frac{q_1}{12} y^4 + \frac{1}{20}\left(\frac{q_0^2}{6} + q_2\right) y^5 + O(y^6),$$

$$u_0 = 1 + \frac{q_0}{2}y^2 + \frac{q_1}{6}y^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{q_0^2}{2} + q_2\right)y^4 + O(y^5).$$

又曲黒写像は

$$X \ni x \longmapsto \begin{pmatrix} |u_1|^2 + |u_1'|^2 & \bar{u}_1 u_0 + \bar{u}_1' u_0' \\ u_1\bar{u}_0 + u_1'\bar{u}_0' & |u_0|^2 + |u_0'|^2 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}^3$$

で与えられるのであった.

$$\begin{aligned} u_1' &= 1 + \tfrac{q_0}{2}y^2 + \tfrac{q_1}{3}y^3 + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{q_0^2}{6} + q_2\right)y^4 + O(y^5), \\ u_0' &= q_0 y + \tfrac{q_1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{q_0^2}{2} + q_2\right)y^3 + O(y^4) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} u_0u_1' - u_0'u_1 &= 1 + O(y^5), \\ |u_1|^2 + |u_1'|^2 &= 1 + \Re(q_0y^2 + |y|^2) + \Re\left(\tfrac{2}{3}q_1y^3\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{3}\Re(q_0y^3\bar{y}) + \tfrac{1}{4}|q_0y^2| + \tfrac{1}{12}\Re(q_0^2 + 6q_2) + O(y^5), \end{aligned}$$

とか

$$u_1\bar{u}_0 + u_1'\bar{u}_0' = y + \bar{q}_0\bar{y} + \frac{\bar{q}_1}{2}\bar{y}^2 + y\left(\frac{q_0}{6}y^2 + \frac{\bar{q}_0}{2}\bar{y}^2\right) + \bar{y}\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}(\bar{q}_0^2 + 2\bar{q}_2)\bar{y}^2\right) + O(y^4)$$

となる. ここで

$$\frac{u_1\bar{u}_0 + u_1'\bar{u}_0'}{|u_1|^2 + |u_1'|^2} \quad \text{と} \quad \frac{-1}{|u_1|^2 + |u_1'|^2}$$

の展開で定数と夫々$O(y^4)$ と $O(y^5)$ の項を捨てると, 多項式

$$\begin{aligned} f &= y + \bar{q}_0\bar{y} + \tfrac{1}{2}\bar{q}_1\bar{y}^2 \\ &\quad -\tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{2}(1 + |q_0|^2)y^2\bar{y} - \bar{q}_0y\bar{y}^2 + \tfrac{1}{3}(\bar{q}_2 - \bar{q}_0^2)\bar{y}^3, \\ g &= \Re(q_0y^2 + |y|^2) + \Re\left(\tfrac{2}{3}q_1y^3\right) \\ &\quad -\tfrac{5}{3}|y|^2\Re(q_0y^2) - (1 + \tfrac{3}{4}|q_0|^2)|y|^4 - \tfrac{1}{2}\Re\left\{(\tfrac{5}{6}q_0^2 - q_2)y^4\right\} \end{aligned}$$

を得る. 写像

$$F : (y, \bar{y}) \longmapsto (f, \bar{f}, g)$$

の微分（2×3-行列）の小行列式は

$$\begin{vmatrix} \partial f/\partial y & \partial f/\partial\bar{y} \\ \partial\bar{f}/\partial y & \partial\bar{f}/\partial\bar{y} \end{vmatrix} = J, \quad \begin{vmatrix} \partial f/\partial y & \partial f/\partial\bar{y} \\ \partial g/\partial y & \partial g/\partial\bar{y} \end{vmatrix} = -yJ,$$

となる；ここで

$$J = 1 - |q_0|^2 - (q_0\bar{q}_1\bar{y} + \bar{q}_0q_1y + |q_1y|^2 + \bar{q}_0q_2y^2 + q_0\bar{q}_2\bar{y}^2).$$

微分の階数が落ちるところが特異点だから, 写像 F が $y = 0$ で特異である条件は

$$|q_0| = 1;$$

以後これを仮定して, 曲線 $C : J = 0$ の像 $F(C)$ を調べる. 大方のところでは像曲面は像曲線 $F(C)$ に沿って尖端である. 曲線 C の点 $y = 0$ に於ける接線は

$$\bar{q}_0q_1y + q_0\bar{q}_1\bar{y} = 0$$

で与えられるので, f の線形部分 $y+\bar{q}_0\bar{y}$ を観察することにより, 像曲線 $F(C)$ が点 $F(0)$ で特異である条件は

$$q_0^3\bar{q}_1 - q_1 = 0.$$

この点で（$q_1 \neq 0$ なら）大方, 像曲線は $(2,3)$ 型尖点, 像曲面は燕尾となる. それより悪くならない条件を求めるには, 面倒だけど正直に曲線 C を媒介変数（t とする）表示して（$t=0$ が原点）, 像曲線 $F(C)$ を t を用いて表す：

$$\Re(f) = \alpha t^2 + \beta t^3 + O(t^4), \quad \Im(f) = \gamma t^2 + \delta t^3 + O(t^4).$$

係数の具体的表示は省略するが, 行列式 $\alpha\delta - \beta\gamma$ を計算するとやね

$$\Re\left\{\left(4\frac{q_2}{q_0} - 3\frac{q_1^2}{q_0^2}\right)\frac{1}{q_0}\right\}$$

の自乗の定数倍となります, 信じてください. ちゃんとした証明は [KRSUY] 参照. 以上のことをまとめる:

1) $hs(x)$ が像曲面の特異点である条件は $|q(x)| = 1$,
2) $hs(x)$ が尖端である条件は $|q(x)| = 1,\ q'(x) \neq 0,\ q^3(x)\bar{q}'(x) - q'(x) \neq 0$,
3) $hs(x)$ が燕尾である条件は, $|q(x)| = 1$,

$$q'(x) \neq 0, \quad q^3(x)\bar{q}'(x) - q'(x) = 0, \quad \Re\left(\left\{\left(\frac{q'(x)}{q(x)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{q'(x)}{q(x)}\right)^2\right)\frac{1}{q(x)}\right\} \neq 0.$$

注意：例えば $q_0 = q_1 = 1, y = s + it$ とでも置くと, 写像 $(s,t) \mapsto (f,g)$ は本質的に

$$\begin{aligned} f_r &= 2s + (s^2 - t^2)/2 = 2s(1 + s/4) - t^2/2, \\ f_i &= st, \\ g &= 2s^2 + 2s^3/3 - 2st^2 = 2s^2(1 + s/3) - 2st^2 \end{aligned}$$

となる；これを §2.4.3 の写像 $\tilde{F}$ と比べてみよ.

以上の結果を我々の場合に適用する. SL 型に書いた超幾何方程式の係数は

$$q = -\frac{1}{4}\left\{\frac{1-\mu_0^2}{x^2} + \frac{1-\mu_1^2}{(1-x)^2} + \frac{1+\mu_\infty-\mu_0^2-\mu_1^2}{x(1-x)}\right\} =: \frac{-Q}{4x^2(1-x)^2},$$

ここで

$$Q = 1 - \mu_0^2 + (\mu_\infty^2 + \mu_0^2 - \mu_1^2 - 1)x + (1 - \mu_\infty^2)x^2.$$

次に R を以下で定める：

$$q' = -\frac{Q'x(1-x) - 2Q(1-2x)}{4x^3(1-x)^3} =: \frac{-R}{4x^3(1-x)^3}.$$

すると,

$$q^3(x)\bar{q}'(x) - q'(x) = \frac{Q^3}{4^3x^6(1-x)^6} \cdot \frac{\bar{R}}{4\bar{x}^3(1-\bar{x})^3} + \frac{R}{4x^3(1-x)^3}$$

となるので, 条件 $|Q| = 4|x(1-x)|^2$ の下で, 燕尾条件 $q^3(x)\bar{q}'(x) - q'(x) = 0$ は以下のようにかける

$$\frac{Q^3}{|Q|^3} = -\frac{R^2}{|R|^2}.$$

7.5 曲線 $|q(x)| = 1$

描いてみたら分かるけど, 多面体的測多価群（標準径数）のときとか乱舞だ関数が出てくるとき等には z-平面内の曲線 $|q(x)| = 1$ は点 $x = 0, 1$ を囲む冬瓜型の曲線（実軸に関して対称）となり, 燕尾を与える点は曲線の鞍に当たる点（上半平面に一つ）となる. 像曲線の自己交差を与える z-平面内の曲線はその点で鞍に接して, 両端は区間 $(0, 1)$ に直交する. 図 19.

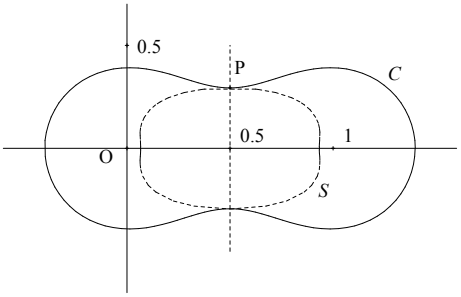


図 19: 二面体 $(n = 3)$ の時の曲線 $C : |q(x)| = 1$ と自己交叉曲線

7.6 絵

$(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$ のとき（逆黒は乱舞だ）又曲黒写像の像を佐々木武さんが楓に描かせたものを添付する. x-平面に於いて上半平面から 3 区間を超えてどんどん接続して行くのだが z-平面内の円盤を埋め尽くす黒三角形に符牒を付けて、(図 20 左) 接続の様子を表す。又曲黒写像の像は図 20 右から図 23. 実有理点に突き刺さっている爪も鋭い細密画でしょう。

7.7 近未来的計画

測多価群が白頭絡群とか三輪群とかの鞍印群（$\mathbf{H}^3$ には不連続に働くがその境界 $\mathbf{P}^1$ では全ての軌道が稠密となるもの）になる時に又曲黒写像の像を目で見てみたい. 原理的には松本圭司さんが作った保形関数を使えばできる筈である.

参考文献

[IY1] 市川尚志, 吉田: 純虚指数差的超幾何方程式から生ずる一寸来群, 米数学会報 132(2003), 447 – 454.

[IY2] 同上: 超幾何方程式から生ずる一寸来群の族, 米数学会報 (2006).

[IKSY] 岩崎, 木村, 下村, 吉田: 賀臼から揚げ麺麭へ, 獣道出版 1991.

[KRSUY] 国分, 留守番, 佐治, 梅原, 山田: 又曲空間内の平坦曲面の特異点, 太平数学雑誌 **221**(2005), 303–351.

[MY] 松本圭司, 吉田: 捩表裏路地群の最近の発展, 純粋数学の発展学習 27(2000), 217–237.

[SYY] 佐々木武, 山田, 吉田: 超幾何的又曲黒写像, 前刷.

[SY] 佐々木, 吉田: 純虚指数差的超幾何的黒写像, 実験数学 **10**(2000), 321 – 330.

[Sch] F. Schilling, 黒写像の幾何的研究, Math. Annalen **44**(1894), 161 – 260.

[一寸] F. Schottky, 或線形変換で値が不変な特殊な関数について, 純粋と応用数学, 101 (1887), 227 – 272.

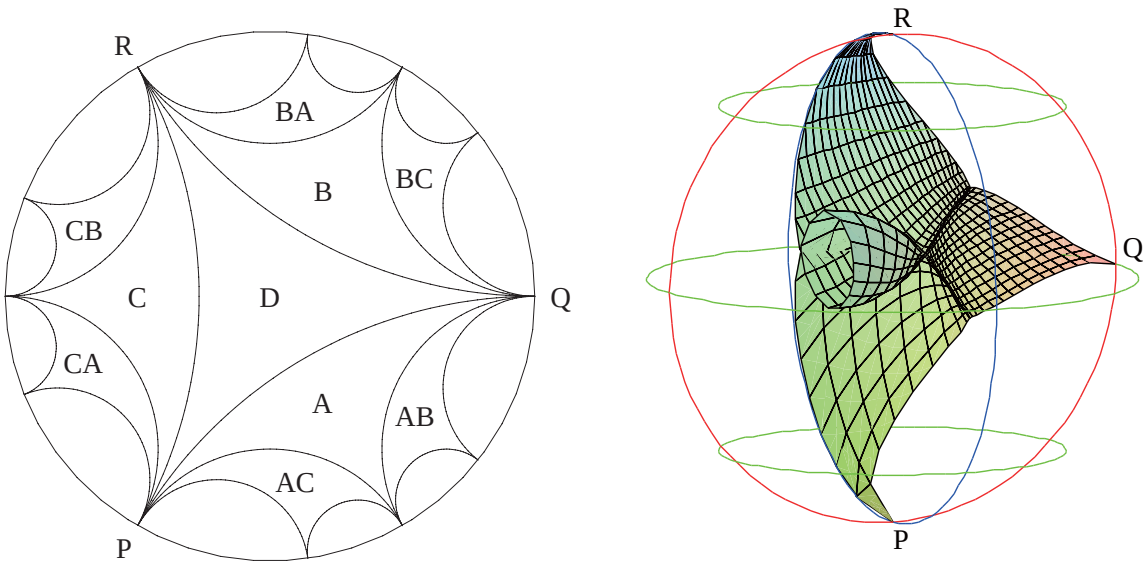


図 20: 左: 黒三角形の符牒, 右: D の像

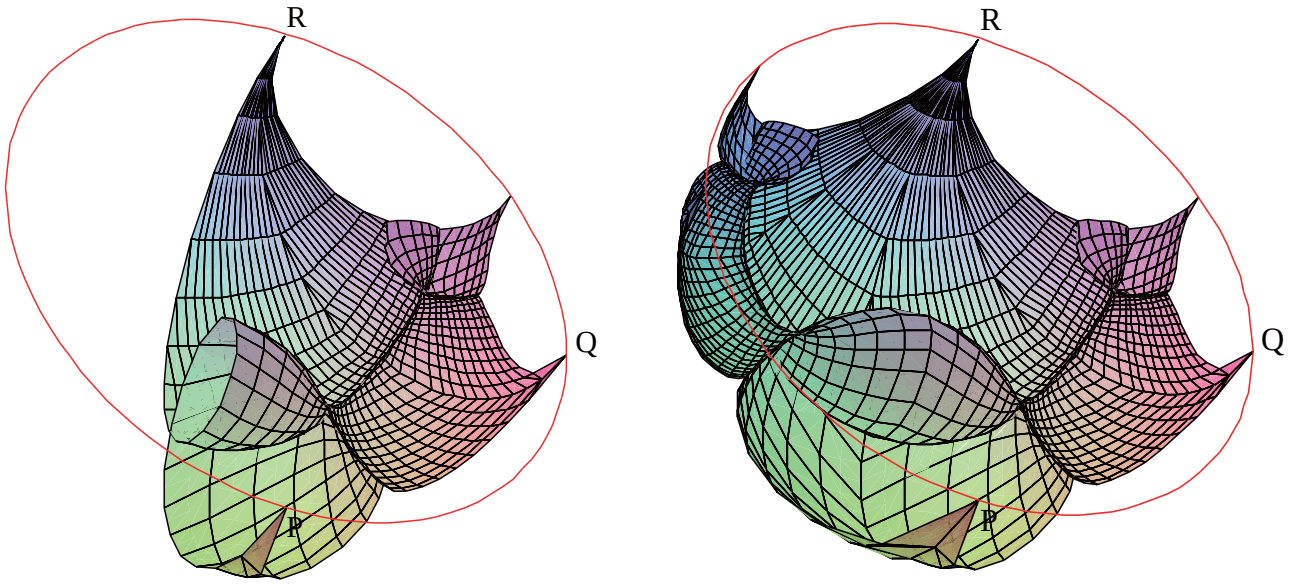


図 21: 左：$\{D, A\}$ の像, 右: $\{D, A, B, BA\}$ の像

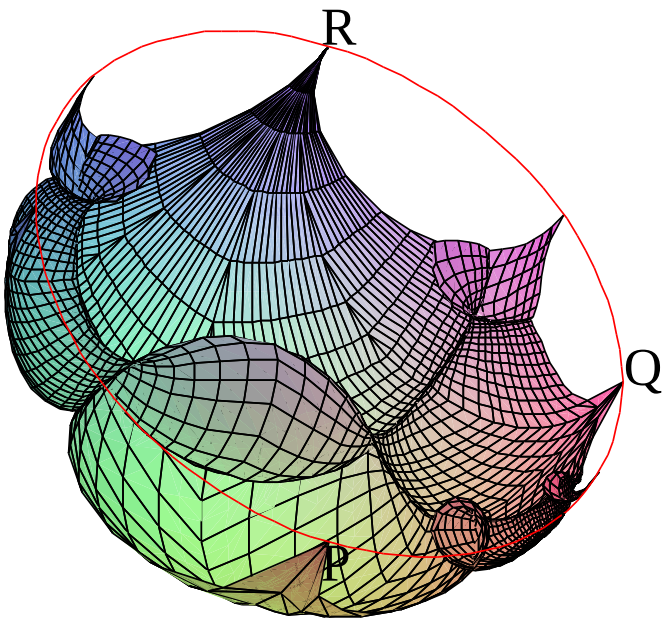


図 22: $\{D, A, B, BA, C, CA\}$ の像

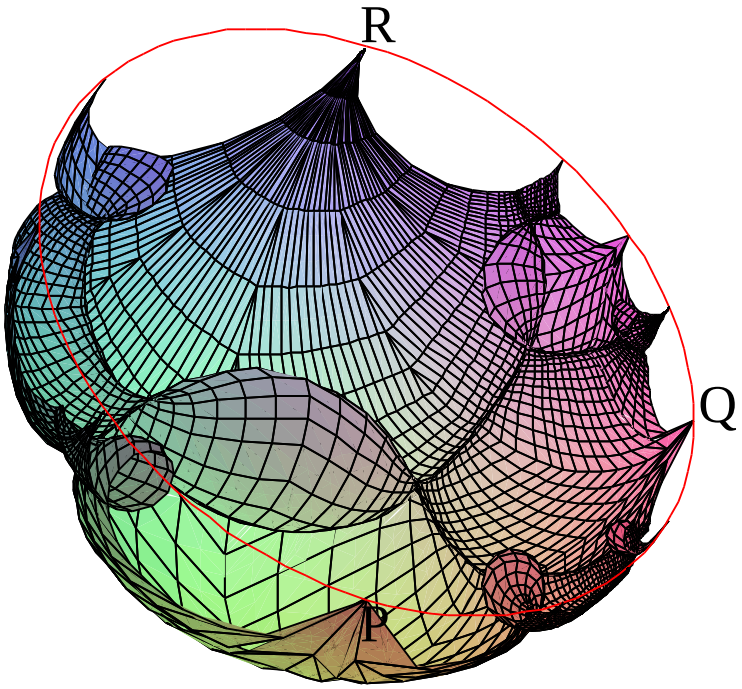


図 23: $\{D, A, B, C, AB, BA, AC, CA, BC, CB\}$ の像

算術幾何平均に関する三位一体定理

Hironori Shiga(Chiba Univ.)

March 7, 2006

Contents

1 Gauss の三位一体定理 **1**
1.1 三位一体定理とその意味 1
1.2 定理の証明の概略 2
1.3 このレクチャーの意図 3

2 超幾何函数から導かれる保型函数 **3**
2.1 超幾何微分方程式の Schwarz 写像 3
2.2 $E(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ の場合 4
2.3 K.Takeuchi のリスト 7

3 Borwein 兄弟の３次算術幾何平均 **7**
3.1 Borweins による拡張された算術幾何平均と cubic AGM 7
3.2 cubic case の Schwarz 写像 8

4 算術幾何平均と theta 函数 **9**

5 多変数保型函数を導く微分方程式系 **11**
5.1 Terada , Deligne-Mostow の表 11
5.2 興味深い例と Schwarz inverse の theta 表示 12

6 $F_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1;\lambda_1,\lambda_2\right)$ と新しい３項算術幾何平均 **13**
6.1 Picard modular form とその theta 表示 13
6.2 Picard case の isogeny formula と 3 項算術幾何平均 15
6.3 cubic case での isogeny formula 16

7 問題 **17**

1 Gauss の三位一体定理

1.1 三位一体定理とその意味

次の定理から出発する。

Theorem 1.1 *(Gauss 1799)* $x \in (0,1)$ に対して

$$\frac{1}{AGM(1,x)} = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} = F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda),\ (\lambda = 1-x^2) \tag{1.1}$$

この等式の各辺の意味を考えよう。

右辺は、一般に複素 parameter a,b,c と変数 λ に対して

$$F(a,b,c;\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)n!}\lambda^n \tag{1.2}$$

で定義される Gauss 超幾何函数である。ただし $(a,n) = a\cdot(a+1)\cdot\cdots\cdot(a+n-1)$ で a,b,c は負の整数でないとする。このとき、右辺の巾級数は収束半径 1 となる。

中辺の積分は、収束する広義積分であるが、楕円曲線

$$w^2 = z(z-1)(z-\lambda) \quad (\lambda \in \boldsymbol{P}^1 - \{0,1,\infty\})$$

の分岐点 $z = 1,\infty$ を往復する 1 cycle に沿っての正則微分 $\dfrac{dz}{w}$ の周期の半分と見ることが出来る。

左辺は以下の方法で得られる算術幾何平均の逆数である。

$a \geq b > 0$ に対して $a_0 = a,\ b_0 = b$ とし、以下

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

によって順次 a_n, b_n を定める。このとき $\{a_n\}, \{b_n\}$ は共通の極限に収束する。

$$AGM(a,b) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

によって a, b の算術幾何平均を定義する。

右辺の超幾何函数は一般に複素パラメータ $a, b, , c$ を含む超幾何微分方程式

$$E(a,b,c) : \lambda(1-\lambda)f'' + (c-(a+b+1)\lambda)f' - abf = 0 \tag{1.3}$$

の解であり、その意味で解析的な対象である。中辺は楕円曲線という代数多様体の周期であるから代数幾何的な対象であり円周率 π を係数に含んでいるから周期の比であるとも考えられる。左辺は算術的操作の極限として生じる量である。こうして、上の等式において微分方程式、代数幾何、算術という数学の異なる側面、三つの位格、が一体の数学となっているのが見られる。

****

今日”三位一体改革”などと気軽に使われているが、三位一体の原義について若干述べておく。この用語はローマカソリック、プロテスタント諸派、東方正教会、すなわち多くのキリスト教諸教会における中心的教義で、父である神、その子イエス、聖霊（”父と子と聖霊”と呼びならわされる）が同一の実体の異なる現れであるという考えを表す (http://ja.wikipedia.org/wiki 参照)。この教義は紀元 325 年ローマ帝国におけるキリスト教公認直後のニケーア（現在はトルコに属し Iznik (www.asahi-net.or.jp/ qn9e-nkd/iznik/iznik.htm) という地名）における第 1 回公会議 (www.tabiken.com/history/doc/N/N326L100.HTM) で決定され、その内容は”ニケーア信経”の信仰告白の文言として、一言の変更もなく今日まで引き継がれている。われわれが耳にする多くのミサ曲のクレドの楽章の歌詞がそれである。

****

1.2 定理の証明の概略

Theorem 1.2 （超幾何函数のオイラー積分表示）([IKSY] ,p.52)

Re c > Re b > 0 の下で $|\lambda| < 1$ に対して

$$F(a,b,c;\lambda) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_1^\infty z^{a-c}(z-1)^{c-b-1}(z-\lambda)^{-a}dz \tag{1.4}$$

が成り立つ。ただし、右辺は $0 < \lambda < 1$ での $z, z-1, z-\lambda$ の実数値を用いた枝を λ の函数として解析接続して考える。

を援用すれば右側の等式が得られる。

次に左側の等式を示す。$AGM(a,b)$ の定義に従って

$$AGM(a,b) = AGM(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) = \frac{a+b}{2} AGM(1, \frac{2\sqrt{ab}}{a+b})$$

である。よって AGM の関数等式

$$AGM(1,x) = \frac{1+x}{2} AGM(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}) \tag{1.5}$$

が得られる。一方超幾何函数 $F(\lambda)=F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda)$ に関して

$$\frac{1+x}{2}F(1-x^2)=F\left(\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right)=F\left(1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2\right) \tag{1.6}$$

が両辺の微分方程式を比較して得られる。

$$AGM(1,1)=F(0)=1$$

であるから $g(x)=1/AGM(1,x)$ として上記２つの関数等式を用いれば

$$\frac{g(x)}{F(1-x^2)}=\frac{g(2\sqrt{x}/(1+x))}{F(1-(2\sqrt{x}/(1+x))^2)}.$$

$\psi(x)=2\sqrt{x}/(1+x)$ としてこの操作を繰り返せば

$$=\frac{g(\psi^n(x))}{F(1-(\psi(x)^n)^2)},\quad (n=1,2,\ldots)$$

が得られ $\lim_{n\to\infty}\psi^n(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$ ゆえ $x\in(0,1)$ に対して $g(x)=F(\lambda)$ が得られる。

q.e.d.

1.3　このレクチャーの意図

Theorem 1.1 の等式に戻って、この状況の特殊性について考えてみる。第２の等式は超幾何微分方程式の解の積分表示である。一般に、解が積分表示を持つ微分方程式は希少であり、そのような微分方程式はわれわれに様々な考察の機会を提供するものである。また、中辺からこの等式を見れば周期がパラメータの関数として、ある種の確定特異点型微分方程式を満たすという主張に見える。周期微分方程式は様々な数論的特徴を有し、そこから G 函数の理論が発展する。しかしながら、このような微分方程式ないし周期が算術的過程と呼応することはさらに希である。現在までに、上記の三位一体定理の純然たる拡張は 1 変数における Borwein 兄弟の結果と、2005 年に得られた Koike-Shiga の 3 項算術幾何平均のみである。そこに算術的現象の解明の困難さが現れているように思われる。Theorem 1.1 に相当する事実をガウスは 1799 年に数値実験的に見いだし、有名な彼の「数学日記帳 (Mathematisches Tagebuch)」に記し、さらに ”この等式に真の証明を与えることができるならば、そこから確固とした新しい解析学が始まるであろう ” と付け加えている（[Ga] 参照)。

われわれは後に紹介するように３つの三位一体定理の例を有している。それらがなぜ成り立ち、他の試みはなぜ成功しないのか？成功した例を包含するような理論的根拠は何なのか？私としては、このような疑問を今後追求していきたいと考え、分かっている限りの状況を説明したいと考えた。

2　超幾何函数から導かれる保型函数

2.1　超幾何微分方程式の Schwarz 写像

この小節で Schwarz 写像を概説するが、超幾何微分方程式の Schwarz 写像に関しては、私の愛読する藤原松三郎の名著 [FM] の第３章に詳細を究めて述べられている。

超幾何微分方程式 (1.3) において実数パラメータ a,b,c を持つ場合に限定して考察する。この微分方程式は $\lambda=0,1,\infty$ のみに特異点を持つ。ということは上半平面 $\boldsymbol{H}$ では線形独立な２つの一価正則な解 $\varphi_1(\lambda),\varphi_2(\lambda)$ がとれることを意味する。そこで $\boldsymbol{H}$ から τ 平面 $\boldsymbol{P}^1$ への写像

$$\tau=\Phi(\lambda)=\frac{\varphi_2(\lambda)}{\varphi_1(\lambda)}$$

を考える。その像を確定するために特異点での解の挙動を述べる。しばらくの間 a,b,c およびそれらの差は整数でないとする。$\lambda=0$ の近傍では２つの独立な解は

$$\varphi_1=\lambda^0u_1(\lambda)=u_1(\lambda),\varphi_2=\lambda^{1-c}u_2(\lambda)$$

の形で得られる。ここで $u_i(\lambda)$ は $\lambda=0$ の近傍で 0 にならない一価正則函数 (unit function) である。λ の巾 $0, 1-c$ は local exponent と呼ばれ微分方程式の係数関数の $\lambda=0$ での展開係数から計算される。

このことから $\Phi(\lambda)$ は $\lambda=0$ の付近で２つの線分 $[-\varepsilon, 0]$ および $[0, \varepsilon]$ を角度 $|1-c|\pi$ で折れ曲がった２つの円弧に写像することが導かれる。

各特異点での local exponents を表にした Riemann scheme は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

で与えられる。上で仮定した a, b, c の非整数条件が満たされない場合にも写像 Φ の局所挙動の解釈は拡張される。こうして Φ は $\boldsymbol{H}$ を頂角 $|1-c|\pi, |c-a-b|\pi, |a-b|\pi$ を持つ円弧三角形に写像することが導かれる。

$$\nu_0 = |1-c|,\ \nu_1 = |c-a-b|,\ \nu_\infty = |a-b|,\ p = \frac{1}{|1-c|},\ q = \frac{1}{|c-a-b|},\ r = \frac{1}{|a-b|}$$

とする。

以後、条件

$$\begin{cases} \nu_0 + \nu_1 + \nu_\infty < \pi \\ \\ p, q, r \in \boldsymbol{Z} \cup \{\infty\} \end{cases} \tag{2.2}$$

を課して考える。このとき、円弧三角形 $\Phi(\boldsymbol{H})$ の三辺に直交する円または直線 B が一意的に定まるが、解 φ_1, φ_2 を適当に取れば、この像は一次分数変換されて B は実軸にでき、$\Phi(\boldsymbol{H})$ は上半平面での、頂角がそれぞれ $\nu_0\pi,\ \nu_1\pi,\ \nu_\infty\pi,$ の非ユークリッド三角形 $\Delta(p, q, r)$ となる。解析函数 $\Phi(\lambda)$ を、区間 $(0, 1)$ を通って下半平面 $\boldsymbol{H}^-$ に解析接続したものの像は $\Delta(p, q, r)$ の弧 $\overline{\Phi(0)\Phi(1)}$ に関する鏡映である。以下、$\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{H}^-$ の解析接続を繰り返すと、次々に境界辺に関する鏡映を生じる。(2.2) の整数条件から、これら鏡映たちは決して重複することなく像の τ 平面における上半平面を埋め尽くす。ここで得られる多価解析写像 Φ を微分方程式 (1.3) の Schwarz 写像という。このとき、偶数回鏡映の作る τ 平面の上半平面 $\boldsymbol{H}$ の変換全体は Aut $(\boldsymbol{H}) = SL(2, \boldsymbol{R})$ の部分群をなす。これを三角群 $\Delta(p, q, r)$ と呼んだり微分方程式 (1.3) のモノドロミー群と呼んだりする。

Theorem 2.1 条件 *(2.2)* の下で、*Schwarz* 写像 Φ の逆写像 $\lambda(\tau)$ は $\boldsymbol{H}$ 上一価正則な関数で、三角群 $\Delta(p, q, r)$ に関する保型函数、すなわち $\lambda(g(\tau)) = \lambda(\tau), \forall g \in \Delta(p, q, r)$ を満たすものとなる。

2.2 $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ の場合

前節の議論を $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ の場合に詳しく見ることにする。

この場合 Riemann scheme (2.1) は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

で、 $p = q = r = \infty$ となる。$\boldsymbol{H}$ における $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ の２つの解として

$$\begin{cases} \eta_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} \\ \eta_2(\lambda) = \int_{1}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} \end{cases}$$

をとり、

$$\Phi(\lambda) = \frac{\eta_2(\lambda)}{\eta_1(\lambda)}, \quad \lambda \in \boldsymbol{H}$$

と定める。ここで $\lambda \in (0, 1)$ において η_2 が正の実数となるように $\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}$ の枝を定める。すると $\eta_1(\lambda)$ は虚部が負の純虚数となる。さらに $\lambda \to 0, 1$ での広義積分の挙動から

$$\lim_{\lambda \to 0} \Phi(\lambda) = 0, \lim_{\lambda \to 1} \Phi(\lambda) = i\infty$$

が分かる。さらに λ が $\boldsymbol{H}$ 上 1 を越えて $+\infty$ に近づくとき

$$\eta_2 = \int_1^{\infty} \frac{dz}{w} = \int_1^{\lambda} \frac{dz}{w} + \int_{\lambda}^{\infty} \frac{dz}{w}$$

かつ楕円曲線 $w^2 = z(z-1)(z-\lambda)$ 上での 1 cycle の変形によって

$$\int_1^{\lambda} \frac{dz}{w} = -\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{w}$$

が分かるから

$$\Phi(\lambda) = -1 + \frac{\int_{\lambda}^{\infty} \frac{dz}{w}}{\int_0^{-\infty} \frac{dz}{w}} \to -1 \quad (\lambda \to +\infty)$$

が得られる。結局 $\Phi(0) = 0, \Phi(1) = i\infty, \Phi(\infty) = -1$ となり、$\Phi(\boldsymbol{H})$ は Figure 3.1 のように τ 平面の $\boldsymbol{H}$ における $0, i\infty, -1$ を頂点とする頂角 0 の非ユークリッド三角形となり、対応する三角群は $\Delta(\infty, \infty, \infty)$ である。

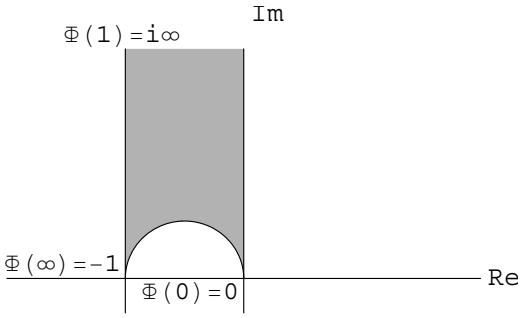


Figure3.1

この三角形の各辺に関する鏡映を実際に書き出せば Theorem 2.1 から次が導かれる。

Theorem 2.2

$$\Delta(\infty, \infty, \infty) =< \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} >= \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \boldsymbol{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod 2 \}$$

となり、*Schwarz* 写像 Φ の逆写像 $\lambda = \lambda(\tau)$ は $\boldsymbol{H}$ 上定義された一価正則関数で保型性

$$\lambda(g(\tau)) = \lambda(\tau), \quad (g \in \Delta(\infty, \infty, \infty))$$

をもつ。ここに現れた三角群 $\Delta(\infty, \infty, \infty)$ は $SL(2, \boldsymbol{Z})$ の *Level 2* の主合同部分群で通常 $\Gamma(2)$ と表記される。

Definition 2.1 G を $SL(2, \boldsymbol{Z})$ の指数有限な部分群とする。$\boldsymbol{H}$ 上正則な関数 $f(\tau)$ は以下の条件を満たすとき G に対する *weight* d の（正則）保型形式であるという。

$$*) \ f(g(\tau)) = (c\tau + d)^d f(\tau), \ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$$

であって、

$**$*)* $\boldsymbol{H}/G$ の各尖点においても極限値が有限確定。

なお、上記補足条件 "$**$)" の正確な定義は [Sch] V章, [M] p.37 等を参照。また、$-Id \in G$ のとき一次変換としての $g \in G$ には c, d の符号の不定性を生じるので普通は偶数 weight のみ考える。G に関する weight $2d$ の保型形式全体は $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間をなす。これを $M_{2d}(G)$ で表す。$M(G) = \oplus_{2d} M_{2d}(G)$ は次数環となる。

Definition 2.2 収束無限級数

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}\exp[\pi i(n+\frac{a}{2})^2\tau+2\pi i(n+\frac{a}{2})\frac{b}{2}],\ a,b\in\{0,1\}$$

で与えられる $\boldsymbol{H}$ 上正則な関数を *Jacobi theta constant* という。

このとき $q=\exp[\pi i\tau]$ として Fourier 展開表示

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}q^{n^2},$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}(-1)^n q^{n^2},$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}q^{(n+\frac{1}{2})^2}$$

が与えられる。なお、$(a,b)=(1,1)$ のときは総和は正負相殺して 0 になるので考えない。以下が成立する。

Theorem 2.3 *(Jacobi's identity)* ([M] p.23)

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^4(\tau)=\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^4(\tau)+\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^4(\tau).$$

Jacobi theta constants は以下の保型性を持つ（[M] p.36 参照）。

Proposition 2.1

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau+1)=\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau),\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau+1)=\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau),\ \vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau+1)=\exp[\frac{\pi i}{4}]\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau),$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\frac{-1}{\tau})=\exp[\frac{-\pi i}{4}]\sqrt{\tau}\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau),$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\frac{-1}{\tau})=\exp[\frac{-\pi i}{4}]\sqrt{\tau}\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau),$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\frac{-1}{\tau})=\exp[\frac{-\pi i}{4}]\sqrt{\tau}\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau).$$

この命題から $\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}^4(\tau),\ (a,b\in\{0,1\})$ は $\Gamma(2)$ に関する weight 2 の保型形式であることが分かる。さらに保型形式環は以下で与えられる。

Theorem 2.4

$$M(\Gamma(2))=\boldsymbol{C}[\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^4(\tau),\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^4(\tau)].$$

Theorem 2.5 *(*λ 函数の *theta* 表示*)*

$$\lambda(\tau)=\frac{\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^4(\tau)}{\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^4(\tau)}.$$

この表示は以下の方針で示される。Jacobi theta constants の保型性と Fourier 展開

$$\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau)=q^{1/4}(1+\text{unit function})$$

および Jacobi's identity から、右辺は $\overline{\boldsymbol{H}/\Gamma(2)} \cong \boldsymbol{P}^1$ での位数 1 の有理型関数であることが分かる。すると、この右辺の函数と $\lambda(\tau)$ とは高々一次変換の違いしかないことになる。あとは $\tau = 0, 1, i\infty$ での両辺の値を比較すればよい。

実はこの定理から $\mathrm{Proj}(\boldsymbol{C}[\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^4 (\tau), \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^4 (\tau)]) = \boldsymbol{P}^1$ となり Theorem 2.4 も導かれる。

以上の状況を図示すると Diagarm 3.1 のようになる。

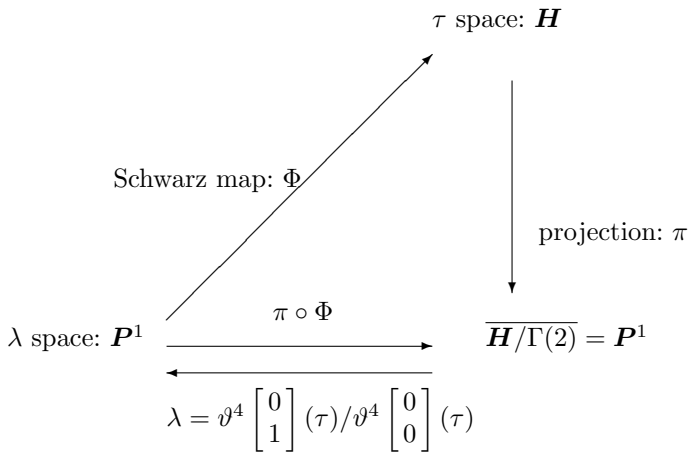


Diagram 3.1 (Schwarz map Φ and its inverse.)

2.3 K.Takeuchi のリスト

$\Gamma(2)$ 以外の三角群に関しても、前節の条件の下で同様の保型函数が得られるが、その中で数論的三角群は有限個で、列挙できることを K. Takeuchi （竹内喜佐雄）が示している (J. Math. Soc. Japan 29 (1977)) 。ここには種々の有力な一変数保型函数が内蔵されていると考えられる。結論は以下の通り (compact type とは $\boldsymbol{H}/\Delta(p,q,r)$ がそのままコンパクトになるという意味である)。

Table 2.1 *List of 85 arithmetic triangle groups* (list of $(p,q,r) = (1/\nu_0, 1/\nu_1, 1/\nu_\infty)$)

compact type

$(2,3,7), (2,3,8), (2,3,9), (2,3,10), (2,3,11), (2,3,12), (2,3,14), (2,3,16), (2,3,18), (2,3,24), (2,3,30),$
$(2,4,5), (2,4,6), (2,4,7), (2,4,8), (2,4,10), (2,4,12), (2,4,18), (2,5,5), (2,5,6), (2,5,8), (2,5,10),$
$(2,5,20), (2,5,30), (2,6,6), (2,6,8), (2,6,12), (2,7,7), (2,7,14), (2,8,8), (2,8,16), (2,9,18), (2,10,10),$
$(2,12,12), (2,12,24), (2,15,30), (2,18,18), (3,3,4), (3,3,5), (3,3,6), (3,3,7), (3,3,8), (3,3,9), (3,3,12),$
$(3,3,15), (3,4,4), (3,4,6), (3,4,12), (3,5,5), (3,6,6), (3,6,18), (3,8,8), (3,8,24), (3,10,30), (3,12,12),$
$(4,4,4), (4,4,5), (4,4,6), (4,4,9), (4,5,5), (4,6,6), (4,8,8), (4,16,16), (5,5,5), (5,5,10), (5,5,15),$
$(5,10,10), (6,6,6), (6,12,12), (6,24,24), (7,7,7), (8,8,8), (9,9,9), (9,18,18), (12,12,12), (15,15,15)$

non-compact type

$$(2,3,\infty), (2,4,\infty), (2,6,\infty), (2,\infty,\infty), (3,3,\infty), (3,\infty,\infty), (4,4,\infty), (6,6,\infty), (\infty,\infty,\infty)$$

3 Borwein 兄弟の３次算術幾何平均

3.1 Borweins による拡張された算術幾何平均と cubic AGM

Ramanujan は 1914 年の論文で

「$F(\frac{1}{2}-s,\frac{1}{2}+s,1;\lambda)$ に対して $s=(0),\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6}$ のとき、modular equation が導かれ、超幾何函数から得られる modular equation は本質的にはこれらのみである。」と述べている。Borwein 兄弟は 1987,1991 年に [B-B], [B-2] でこれらの場合を研究し $s=1/6$ に対して三位一体定理を発見しているので以下で紹介する。しかし、他の 2 つの場合には三位一体型定理への言及がない。

Theorem 3.1 （*Borweins の cubic AGM:* 1 変数唯一の成功例）

$$\frac{1}{AG_3(1,x)}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\int_1^\infty\frac{dz}{\sqrt[3]{z(z-1)(z-\lambda)^2}}=F\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},1;\lambda\right),\quad(\lambda=1-x^3)\tag{3.1}$$

ここで $AG_3(a,b)$ は以下にのべる Borweins による拡張された算術幾何平均である。

$a\geq b>0, N\in\{2,3,\ldots\}$ に対して $a_0=a, b_0=b$ とし

$$a_{n+1}=\frac{a_n+(N-1)b_n}{N}, c_{n+1}=\frac{a_n-b_n}{N}, b_n=a_n^N-c_n^N\tag{3.2}$$

によって帰納的に a_n,b_n,c_n を定める。このとき $c_n\to 0\quad(n\to\infty)$ で $\{a_n\},\{b_n\}$ は共通の極限を持つ。そこで

$$AG_N(a,b)=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$$

と定義する。$AG_2(a,b)$ は Gauss の算術幾何平均であり $N=3$ のとき

$$a_{n+1}=\frac{a_n+2b_n}{3}, b_{n+1}=\sqrt[3]{\frac{b_n}{3}(a_n^2+a_nb_n+b_n^2)}\tag{3.3}$$

である。このように算術幾何平均のシステムが確定すれば、上記定理の証明は Gauss の場合と同じ方法が適用される。

3.2 cubic case の Schwarz 写像

代数曲線

$$w^3=z(z-1)(z-\lambda)^2,\quad(\lambda\in\boldsymbol{P}^1-\{0,1,\infty\})$$

を考える。とりあえず $\lambda\in(0,1)$ のときに

$$\eta_1=\int_{-\infty}^0\frac{dz}{w}=\int_{-\infty}^0\frac{dz}{\sqrt[3]{z(z-1)(z-\lambda)^2}},\ \eta_2=\int_1^\infty\frac{dz}{w}=\int_1^\infty\frac{dz}{\sqrt[3]{z(z-1)(z-\lambda)^2}}$$

とする。$z\in\boldsymbol{H}$ のときの w の分枝は $\lim_{z\to+\infty}\arg w=0$ によって定める。このとき

$$\arg\,\eta_1=\frac{2\pi}{3},\ |\lim_{\lambda\to1}\eta_1|<\infty,\ |\lim_{\lambda\to0}\eta_1|=\infty$$

となり、

$$\arg\,\eta_2=0,\ |\lim_{\lambda\to0}\eta_2|<\infty,\ |\lim_{\lambda\to1}\eta_2|=\infty$$

である。この η_1,η_2 を λ の関数として解析接続すれば、Schwarz 写像

$$\Phi(\lambda)=\frac{\eta_2}{\eta_1}$$

が $\boldsymbol{H}$ における一価正則函数として定まる。このとき上の考察から以下が導かれる。

Proposition 3.1

$$\lim_{\lambda\to0}\Phi(\lambda)=0,\ \lim_{\lambda\to1}\Phi(\lambda)=\omega\cdot\infty,\ \lim_{\lambda\to\pm\infty}\Phi(\lambda)=-1.$$

したがって $\Phi(\boldsymbol{H})$ は Figure 4.1 のようになり、縮小回転 $\tau=\frac{1-\omega}{3}\Phi(\lambda)$ によって $\boldsymbol{H}$ の像は Figure 4.2 のように τ 平面の半平面における非ユークリッド三角形になる、ここで $\omega=\exp[2\pi i/3]$。

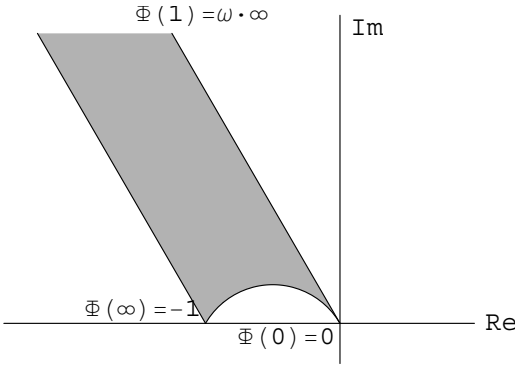


Figure4.1

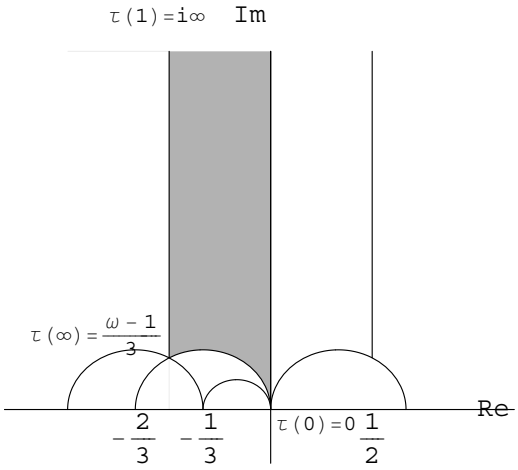


Figure4.2

この形状から第 2 節と同様の議論で以下が導かれる。

Proposition 3.2 $E\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},1\right)$ の 射影 *monodromy* 群は三角群 $\Delta(\infty,\infty,3)$ で、この三角形の偶数回鏡映の作る群であり、

$$\Gamma_0(3)=\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\boldsymbol{Z}):\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & *\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ (\mathrm{mod}\ 3)\}=<\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}>$$

に一致する。

4 算術幾何平均と theta 函数

Jacobi theta constants に対して以下の Jacobi の isogeny formula が成り立つ：

Theorem 4.1

$$\begin{cases}\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^2(2\tau)=\frac{1}{2}\left(\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^2(\tau)+\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2(\tau)\right)\\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2(2\tau)=\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau)\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau).\end{cases}$$

この定理は pair $\left(\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^2(\tau),\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2(\tau)\right)$ から pair $\left(\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^2(2\tau),\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2(2\tau)\right)$ への移行が Gauss の算術幾何平均のプロセスに一致していることを示している。

われわれは、次節以降で新しい算術幾何平均をこのような theta constants の isogeny formula を通じて発見することを目指す。

以下本節では Jacobi の isogeny formula の証明法の概略を述べる。

ここで

$$\Gamma_\vartheta = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a-1 \equiv d-1 \equiv b \equiv 0 \pmod 2, c \equiv 0 \pmod 4\} =< \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、Diagram 5.1 の図式が得られる。

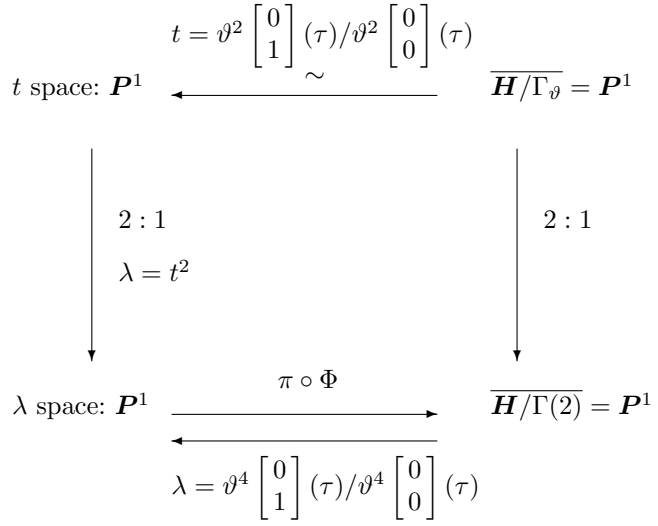


Diagram 5.1 (covering space $\overline{\boldsymbol{H}/\Gamma_\vartheta}$.)

Diagram 5.1 と命題 2.1 および $[\Gamma(2), \Gamma_\vartheta] = 2$ であることから

Theorem 4.2

$$M(\Gamma_\vartheta) = \boldsymbol{C}\left[\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^2 (\tau), \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 (\tau)\right]$$

が得られる。

Definition 4.1 $f(\tau) \in M(\Gamma(2))$ に対して $f^\sharp(\tau) = f(2\tau)$ とし、

$$M(\Gamma(2))^\sharp = \{f^\sharp : f \in M(\Gamma(2))\}$$

と定める。

このとき Γ_ϑ に関する $\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(2\tau), \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(2\tau)$ の保型挙動が命題 2.1 から計算され

Theorem 4.3

$$M(\Gamma(2)) \cap M(\Gamma(2))^\sharp = \boldsymbol{C}\left[\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^2 (2\tau), \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^4 (2\tau)\right]$$

が得られる。$\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^2 (2\tau), \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^4 (2\tau)$ の Fourier 展開を数項計算すれば $\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^2 (\tau), \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 (\tau)$ による表示が決定でき、われわれの目指した isogeny formula Theorem 4.1 が得られる。

5 多変数保型函数を導く微分方程式系

5.1 Terada , Deligne-Mostow の表

$\xi_1,\ldots,\xi_N \in \boldsymbol{C}$ $(\xi_i \neq \xi_j,\ i \neq j)$ と $d,\mu_1,\ldots,\mu_N \in \boldsymbol{Z}^+$, $(d|\mu_1+\ldots+\mu_N)$ に対して $\xi_1,\ldots,\xi_N$ を parameter とする (z,w) 空間の曲線族

$$w^d = \prod_{i=1}^{N}(z-\xi_i)^{\mu_i} \tag{5.1}$$

を考える。z-座標の一次変換で $\xi_{N-2}=0,\xi_{N-1}=1,\xi_N=\infty$ とすることができるから、これは

$$C(\xi) = w^d = \prod_{i=1}^{N-3}(z-\lambda_i)^{\mu_i}\cdot z^{\mu_{N-2}}(z-1)^{\mu_{N-1}} \tag{5.2}$$

を考えるのと同じである。$C(\xi)$ 上の積分

$$\int_0^{\lambda_i} \frac{dz}{\sqrt[d]{\prod_{i=1}^{N-3}(z-\xi_i)^{\mu_i}\cdot z^{\mu_{N-2}}(z-1)^{\mu_{N-1}}}} = \eta_i(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-3})$$
$$(\lambda_\infty=\infty,\ \mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{N}-3,\infty)$$

を解とする $N-3$ 変数の線形偏微分方程式系が定まる。これを Appell-Lauricella の微分方程式という。$N=4$ のときは Gauss の超幾何微分方程式であり、$N=5$ のとき Appell の超幾何函数

$$F_1(a,b,b',c;\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{m,n\geq 0}\frac{(a,m+n)(b,m)(b',n)}{(c,m+n)m!n!}\lambda_1^m\lambda_2^n$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_1^\infty z^{b+b'-c}(z-1)^{c-a-1}(z-\lambda_1)^{-b}(z-\lambda_2)^{-b'}dz$$

を解とする。このとき、

$$\frac{\mu_1}{d}=b,\frac{\mu_2}{d}=b',\frac{\mu_3}{d}=c-b-b',\frac{\mu_4}{d}=a+1-c,\frac{\mu_5}{d}=1-a$$

であり、対応する微分方程式を $E_1(a,b,b',c)$ で表す。Appell-Lauricella の微分方程式は解空間の次元が $N-2$ であり、特異点集合 X は

$$\{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-3})\in\boldsymbol{P}^{N-3} : \lambda_i=\lambda_j\ 1\leq i<j\leq N-3\}$$

および無限遠超平面である。これから Schwarz 写像

$$\Phi : \boldsymbol{P}^{N-3}-X \to \boldsymbol{P}^{N-3}$$

が定まる。

Theorem 5.1 (T.Terada (寺田俊明), J. Math. Soc. Japan,35(1983))
条件

$$\begin{cases} \sum_i \mu_i = 2d \\ \frac{1}{1-\mu_j-\mu_k}\in\boldsymbol{Z}\cup\{\infty\} \quad (j\neq k) \end{cases}$$

が満たされることは、 Appell-Lauricella の微分方程式の Schwarz 写像の逆写像が $N-3$ 次元超球 $\boldsymbol{B}^{N-3}$ で定義された一価写像で、 monodromy 群に関する保型函数となるための必要十分条件である。

上記条件を満たす $(d,\mu_1,\ldots,\mu_N)$ の組は以下に与えられる有限である (Deligne-Mostow, I.H.E.S.Pub. Math.,63(1986) の List)。ここで NA は monodromy 群が非数論的であること、∞ は monodromy 群 G による商空間 $\boldsymbol{B}^{N-3}/G$ が尖点を持ち non-compact であることを示す。われわれは、このリストの中からさまざまな有用な多変数保型函数を取り出すことができるのである。

no.	N	d	μ_i	Arith	comp
1	5	3	$2,1,1,1,1$		∞
2	5	4	$2,2,2,1,1$		∞
3	5	4	$3,2,1,1,1$		∞
4	5	5	$2,2,2,2,2$		
5	5	6	$3,3,2,2,2$		∞
6	5	6	$3,3,3,2,1$		∞
7	5	6	$4,3,2,2,1$		∞
8	5	6	$5,2,2,2,1$		
9	5	8	$4,3,3,3,3$		
10	5	8	$5,5,2,2,2$		
11	5	8	$6,3,3,3,1$		
12	5	9	$4,4,4,4,2$		
13	5	10	$7,4,4,4,1$		
14	5	12	$5,5,5,5,4$		
15	5	12	$6,5,5,4,4$	NA	
16	5	12	$6,5,5,5,3$		
17	5	12	$7,5,4,4,4$	NA	
18	5	12	$7,6,5,3,3$	NA	∞
19	5	12	$7,7,4,4,2$		∞
20	5	12	$8,5,5,3,3$		
21	5	12	$8,5,5,5,1$		
22	5	12	$8,7,3,3,3$	NA	
23	5	12	$10,5,3,3,3$		
24	5	15	$8,6,6,6,4$	NA	
25	5	18	$11,8,8,8,1$		
26	5	20	$14,11,5,5,5$	NA	
27	5	24	$14,9,9,9,7$	NA	
1	6	3	$1,1,1,1,1,1$		∞
2	6	4	$2,2,1,1,1,1$		∞
3	6	4	$3,1,1,1,1,1$		∞
4	6	6	$3,2,2,2,2,1$		∞
5	6	8	$3,3,3,3,3,1$		
6	6	12	$5,5,5,3,3,3$		
7	6	12	$7,5,3,3,3,3$	NA	∞
	7	4	$2,1,1,1,1,1,1$		∞
	8	4	$1,1,1,1,1,1,1,1$		∞

5.2 興味深い例と Schwarz inverse の theta 表示

Terada and Deligne-Mostow の表で Schwarz inverse の theta 表示が得られているのは以下の場合である。

(i) Picard case $(d,\mu_1,\dots,\mu_5)=(3,1,1,1,1,2)$.

この場合は 1881 年の Picard の研究に始まり、その後 1988 年に保型函数の theta 表示および Jacobi-Fourier 型展開が与えられた（[S]）。次節でこの場合を詳しく論じる。ここで $\lambda_1=\lambda_2$ となって退化すると Borwein 兄弟の超幾何函数が現れる。

(ii) Matsumoto case $(d,\mu_1,\dots,\mu_5)=(4,2,2,2,1,1)$.

対応する曲線族が超楕円曲線のせいか、あまり研究されていないが $\lambda_1=\lambda_2$ となって退化すると $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda)$ が現れるので重要ではないかと思う。1989 年に K.Matsumoto (Annali S.N.S. Pisa) によって theta 表示が与えられた。

(iii) Pentagonal case $(d,\mu_1,\dots,\mu_5)=(5,2,2,2,2,2)$.

G.Shimura (Osaka J. vol. 1) 他多くの数学者が考察している。これは商空間が compact になることで特徴的である。2003 年に K.Koike (J.Math. Soc. Japan) が theta 表示を与えた。$\lambda_1=\lambda_2$ となって退化すると $F(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5};\lambda)$ を生じ、monodromy 群は Takeuchi list にある co-compact な数論的三角群 $\Delta(5,5,5)$ である。

(iv) Extended Picard case $(d,\mu_1,\dots,\mu_5)=(3,1,1,1,1,1,1)$.

K.Matsumoto らによって theta 表示が得られている。

(v) Maximum case $(d, \mu_1, \ldots, \mu_5) = (4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

これは N が最大値 8 の唯一のケースで、他の多くの保型函数がここから退化して得られる。2003 年 K.Matsumoto-T.Terasoma の労作 (J. Algebraic Geometry, vol. 12) によって theta 表示が与えられた。

6 $F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1; \lambda_1, \lambda_2\right)$ と新しい３項算術幾何平均

6.1 Picard modular form とその theta 表示

本節では記号 $\omega = \exp[2\pi i/3]$ を用いる。議論の詳細は [S],[KS1],[KS2] を参照。

前節の Picard case $(d, \mu_1, \ldots, \mu_5) = (3, 1, 1, 1, 1, 2)$ を考察する。このときの微分方程式は $E_1(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ であり Appell の超幾何函数 $F_1(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1; \lambda_1, \lambda_2)$ が解（の一つ）となっている。

$E_1(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ に対応して genus 3 の Picard 曲線族

$$C(\lambda) = w^3 = z(z-1)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2), \quad ((\lambda_1, \lambda_2) \in \boldsymbol{P}^2 - X)$$

が現れる。$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ のとき、この曲線を z 平面上の３重被覆と見て $A_i \cdot B_j = \delta_{ij}, A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ を満たす $\mathrm{H}_1(C(\lambda), \boldsymbol{Z})$ の homology basis が figure 7.1 で与えられる。$C(\lambda)$ 上の独立な正則微分は

$$\varphi_1 = \frac{dz}{w}, \varphi_2 = \frac{zdz}{w^2}, \varphi_3 = \frac{dz}{w^2}$$

で与えられる。微分方程式の解として周期積分

$$\begin{cases} \eta_0 = \int_{A_1} \frac{dz}{w} = (1-\omega^2) \int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{w}, \\ \eta_1 = -\omega^2 \int_{B_1} \frac{dz}{w} = -\sqrt{3}i \int_{1}^{+\infty} \frac{dz}{w}, , \\ \eta_2 = \int_{A_2} \frac{dz}{w} = (\omega^2 - 1) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dz}{w} \end{cases} \tag{6.1}$$

をとる。ただし w の分枝は $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ に対して、 $z \in \boldsymbol{H}$ での値を $\lim_{z \to +\infty} \arg w = 0$ によって定める。上記積分路上での w の値はその境界値で、各積分は解析接続によって $\boldsymbol{P}^2 - X$ 上の多価関数として拡張定義される。

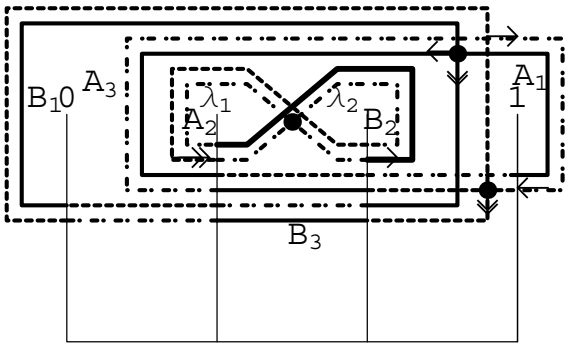


figure 6.1: Picard 曲線の homology cycle たち

$C(\lambda)$ の周期行列

$$(\Omega_1, \Omega_2) = (\int_{A_j} \varphi_i, \int_{B_j} \varphi_i)_{i,j=1,2,3}$$

をつくる。正規化された周期行列 $\tau(\lambda) = \Omega_1^{-1}\Omega_2$ は不思議なことに Riemann の周期関係式（たとえば [G] Chapter V 参照）を用いると

$$u = \frac{\eta_2}{\eta_0}, v = \frac{\eta_1}{\eta_0}$$

によって

$$\tau(u,v)=\begin{pmatrix} \frac{u^2+2\omega^2 v}{1-\omega} & \frac{\omega u^2-\omega^2 v}{1-\omega} & \omega^2 u \\ \frac{\omega u^2-\omega^2 v}{1-\omega} & \frac{\omega^2+2\omega^2 v}{1-\omega} & u \\ \omega^2 u & u & -\omega^2 \end{pmatrix}$$

と表される。一般の genus g の曲線に対して、周期行列に関する Riemann の関係式から正規化された周期行列 $\tau(u,v)$ は Siegel 上半空間

$$\boldsymbol{H}_g=\{\tau\in M(g,\boldsymbol{C}):{}^t\tau=\tau,\mathrm{Im}\ \tau>0\}$$

に属することが知られている。このことから (u,v) は 2 次元超球

$$\boldsymbol{B}^2=\{\eta=[\eta_0,\eta_1,\eta_2]\in\boldsymbol{P}^2:\eta M{}^t\overline{\eta}<0\}=\{(u,v)\in\boldsymbol{C}^2:2\mathrm{Re\ v}-|u|^2>0\},$$

ただし $M=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

に属することが分かる。$\boldsymbol{B}^2$ の正則自己同型群 $Aut(\boldsymbol{B}^2)$ は射影一次変換群

$$\Gamma(\boldsymbol{C})=\{g\in PGL(3,\boldsymbol{C}):\ {}^t\overline{g}Mg=M\}$$

で与えられる。写像 $(u,v)\mapsto(\sqrt{-3}u,3v)$ は $Aut(\boldsymbol{B}^2)$ に属することを後に用いる。

$E_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)$ に対し (6.1) によって Schwarz 写像 $\Phi:\boldsymbol{P}^2\to\boldsymbol{B}^2$ を定める。

Definition 6.1 $g\in\boldsymbol{Z}^+$ を定めておく。$a,b\in\boldsymbol{Q}^g,\tau\in\boldsymbol{H}_g$ に対して、*Riemann theta constant* を以下のように定義する （ [M] ,[I] 参照）：

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}^g}\exp[2\pi i(n+a)\tau^t(n+a)+\pi i(n+a)^t b].$$

Theorem 6.1 *(*[P],[S]*)*

(1) *Schwarz* 写像 Φ の *monodromy* 群は

$$\Gamma(\sqrt{-3})=\{g\in\Gamma(\boldsymbol{C})\cap GL(3,\boldsymbol{Z}[\omega]):g\equiv\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ \mathrm{mod}\ \sqrt{-3}\}$$

で与えられ、その逆写像

$$[\eta_0(u,v),\eta_1(u,v),\eta_2(u,v)]:\boldsymbol{B}^2\to\boldsymbol{P}^2$$

は $\boldsymbol{B}^2$ 上定義された $\Gamma(\sqrt{-3})$ に対する保型写像である。

(2) *Riemann theta constnts* による表示

$$(\lambda_1(u,v),\lambda_2(u,v))=\left(\frac{\vartheta^3\begin{bmatrix}0&\frac{1}{6}&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}(\tau(u,v))}{\vartheta^3\begin{bmatrix}0&\frac{1}{6}&0\\0&\frac{1}{6}&0\end{bmatrix}(\tau(u,v))},\frac{\vartheta^3\begin{bmatrix}0&\frac{1}{6}&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}(\tau(u,v))}{\vartheta^3\begin{bmatrix}0&\frac{1}{6}&0\\0&\frac{1}{6}&0\end{bmatrix}(\tau(u,v))}\right)$$

が成り立つ。

$$\Theta_k(u,v)=\vartheta\begin{bmatrix}0&\frac{1}{6}&0\\\frac{k}{3}&\frac{1}{6}&\frac{k}{3}\end{bmatrix}(\tau(u,v)),\quad(k=0,1,2)$$

とし

$$R=\boldsymbol{C}[\Theta_0(u,v),\Theta_1(u,v),\Theta_2(u,v)]$$

とする。Theorem 6.1 の状況を図示すると Diagarm 6.1 のようになる。

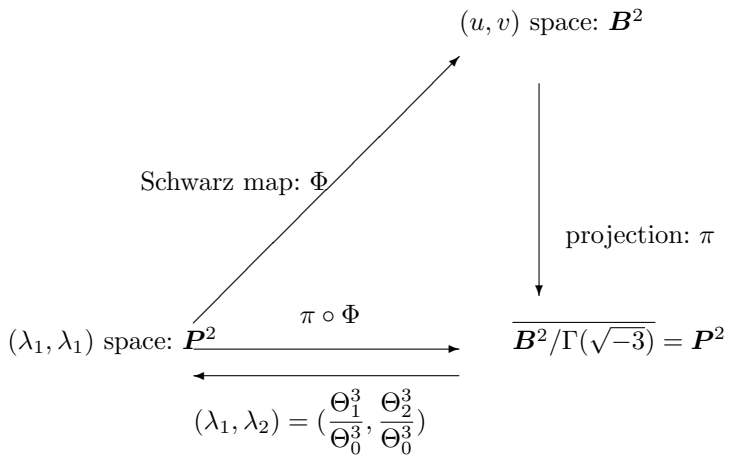


Diagram 6.1 (Schwarz map Φ and its inverse.)

6.2 Picard case の isogeny formula と 3 項算術幾何平均

$f(u,v)\in R$ に対して $f^\sharp(u,v)=f(\sqrt{-3}u,3v)$ とし $R^\sharp=\{f^\sharp:\ f\in R\}$ とする。

Theorem 6.2 （*isogeny formula*）([KS2])

(1)
$$R^\sharp\cap R=\boldsymbol{C}[\Theta_0^\sharp(u,v),(\Theta_1^3)^\sharp(u,v),(\Theta_2^3)^\sharp(u,v)]$$

(2)
$$\begin{cases}\Theta_0^\sharp(u,v)=\frac{1}{3}(\Theta_0+\Theta_1+\Theta_2)\\ (\Theta_1^3)^\sharp(u,v)+(\Theta_2^3)^\sharp(u,v)=\frac{1}{3}(\Theta_0^2\Theta_1+\Theta_1^2\Theta_2+\Theta_2^2\Theta_0+\Theta_0\Theta_1^2+\Theta_1\Theta_2^2+\Theta_2\Theta_0^2)\\ (\Theta_2^3)^\sharp(u,v)-(\Theta_2^3)^\sharp(u,v)=\frac{1}{3\sqrt{-3}}(\Theta_0-\Theta_1)(\Theta_1-\Theta_2)(\Theta_2-\Theta_0).\end{cases}$$

この isogeny formula を Gauss AGM の theta interpretation と比較することによって、われわれは次のような 3 項の算術幾何平均を定義することに導かれる：

Definition 6.2 a,b,c を $a\geq b\geq c$ を満たす正数とする。

$$\begin{cases}A=\frac{1}{6}(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)+\frac{\sqrt{-1}}{6\sqrt{3}}(a-c)(a-b)(b-c)\\ B=\frac{1}{6}(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)-\frac{\sqrt{-1}}{6\sqrt{3}}(a-c)(a-b)(b-c).\end{cases}$$

として

$$\Psi(a,b,c)=(\alpha,\beta,\gamma)=(\frac{a+b+c}{3},\sqrt[3]{A},\sqrt[3]{B}),\tag{6.2}$$

と定める。ここで分枝 $\beta=\sqrt[3]{A}$ および $\gamma=\sqrt[3]{B}$ は

$$0\leq\arg\sqrt[3]{A}<\frac{\pi}{6},\ 0<\beta+\gamma$$

で定める。

このとき $\Psi^2(a,b,c)=\Psi(\Psi(a,b,c))$ は再び正数の三つ組で選ぶことが可能で、$\Psi^n(a,b,c)=\Psi(\Psi^{n-1}(a,b,c))=(a_n,b_n,c_n)$ とすると $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ は共通の極限値に収束する（[KS1] 参照)。この極限値を $M3(a,b,c)$ で表す。

上で定義した 3 項算術幾何平均に対して以下の三位一体定理が成り立つ。これは多変数で知られる唯一の同種の定理である。

Theorem 6.3 （[KS2])

$1>x,y>0$ に対して $\lambda_1=1-x^3,\lambda_2=1-y^3$ とする。このとき

$$\frac{1}{M3(1,x,y)}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\int_1^\infty\frac{dz}{\sqrt[3]{z(z-1)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}}=F_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1;\lambda_1,\lambda_2\right)$$

が成り立つ。

6.3 cubic case での isogeny formula

Theorem 6.3 において $b=c$ とおくと、この算術幾何平均は Borwein 兄弟の $AG_3(a,b)$ に一致し、この定理は Theorem 3.1 を含んでいることが分かる。これは Terada and Deligne-Mostow の表での $(3,1,1,1,2)$ に対応する微分方程式 $E_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)$ から $(3,1,1,2,2)$ に対応する $E\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},1\right)$ への退化に対応している。この微分方程式側での退化は、実際、周期積分 η_0,η_1,η_2 におけるパラメータの合流 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ で与えられ、それは u,v の定義から $\eta_2=0$ すなわち $u=0$ かつ Re $v<0$ となって実現されていることが分かる。 $\tau=-i\sqrt{3}v$ とおいて、Theorem 6.1 と Theorem 6.2 を退化した場合に書き下せば以下のような cubic case での $\lambda(\tau)=\lambda_1(0,v)=\lambda_2(0,v)$ の theta 表示、および isogeny formula が難なく得られる！

Definition 6.3

$$\begin{cases}\theta_0(\tau)=\sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}[\omega]}q^{N(\mu)}=\sum_{m,n\in\boldsymbol{Z}}\left(e^{2\pi i\tau/3}\right)^{m^2-mn+n^2},\\ \theta_1(\tau)=\sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}[\omega]}e^{2\pi i(m+n)/3}q^{N(\mu)}=\sum_{m,n\in\boldsymbol{Z}}e^{2\pi i(m+n)/3}\left(e^{2\pi i\tau/3}\right)^{m^2-mn+n^2},\\ q=\exp[2\pi i\tau/3],N(\mu)=\mu\overline{\mu}\end{cases}$$

によって *cubic theta constants* を定める。

上の theta constants は Gauss case での

$$\begin{cases}\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^2(\tau)=\sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}[i]}q^{N(\mu)},\\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2(\tau)=\sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}[i]}e^{2\pi i(m+n)/2}q^{N(\mu)},\\ q=\exp[2\pi i\tau/2],N(\mu)=\mu\overline{\mu}\end{cases}$$

に完全に対応していることにも注意しておく。

Theorem 6.4 （*cubic case* での *theta* 表示）*3.2* 節の λ および τ に対して

$$\lambda(\tau)=\frac{\theta_0^3(\tau)}{\theta_1^3(\tau)}.$$

Theorem 6.5 *(cubic case* での *isogeny formula)*

$$\begin{cases}\theta_0(3\tau)=\frac{1}{3}(\theta_0(\tau)+2\theta_1(\tau)),\\ \theta_1^3(3\tau)=\frac{1}{3}\theta_1(\tau)(\theta_0^2(\tau)+\theta_0(\tau)\theta_1(\tau)+\theta_1^2(\tau)).\end{cases}$$

7 問題

以上見てきたことから、三位一体型定理は極めて希にしか生じないが、 Gauss の場合だけ、しかも 1 変数の場合に限って起きているわけではないことが分かった。

”科学の天才は 10 年に一度現れるが、芸術の天才は 100 年に一度しか出現しない。さらに、宗教的天才は 1000 年に一度しか地球上に降臨しない。”と言われる。

解析的等式、代数的等式、数論的等式の困難さの度合いも、これに近いものがあるのではないかと私は考える。三位一体型定理の希少性も解析的な函数に数論的特性を求めることから来ているのだと信じている。

では、1 変数に限ってこのような希な現象は他にはないのだろうか?あるとすれば Takeuchi list において、しかも non-compact 型の場合に生じているのであろう。また、4 節で紹介した Ramanujan の示唆を受け入れるとすると $a+b=c=1$ の case を考えることになるが、これに該当するのは $(\infty,\infty,\infty),(\infty,\infty,3),(\infty,\infty,2)$ の 3 通りしかない。他の場合はだめなのか？たとえば $E\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},1\right)$ は三角群 $\Delta(\infty,\infty,5)$ を monodromy 群としていて、Borwein 兄弟の AGM システム (3.2) にも適合するが、数論的三角群ではない。この場合はどうなのであろうか？だめな場合の事情を検討してみたい気がする。

多変数の場合、Terada and Deligne-Mostow の表で theta 表示の得られている場合の検討がすぐに候補に挙がるが、 Pentagonal case は co-compact という性質が災いしそうに思える。2 変数の Matsumoto hyperelliptic case は大変有望で、現在筆者が奮戦している。

この他にも variant を考える余地は幾つか残されていると思われる。大分前に飯高茂先生が、”3 つの良い実例が見つかれば、一つの定理がその背後にあり、3 つの良い定理があれば、一つの理論がそこから形成される。”という意味のことをどこかに書かれていた。私は、この説を信じるが、ここに挙げた 3 つの算術幾何平均は何をもたらしているのであろうか？

References

[B-B] J.M. Borwein and P.B. Borwein, A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM, Trans. A.M.S., vol.323(1991), 691-701.

[B-2] J.M. Borwein and P.B. Borwein, Pi and the AGM-A study in analytic number theory and computational complexity, Wiley, 1987.

[FM] 藤原松三郎、常微分方程式、岩波高等数学叢書、1930.

[Ga] C,F, Gauss, Mathematisches Tagebuch 1796-1814, Ostwalds Kalassiker der exakte Wissenschaften 256,Geest und Portig, Leibzig,1976.

[G] Griffiths, Introduction to Algebraic Curves, A.M.S. Translations of Math. Monographs vol. 76 (1989).

[IKSY] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé - A Modern Theory of Special Functions, Vieweg, Braunschweig(1991).

[I] J. Igusa, Theta functions, Springer, Heidelberg, New-York(1972).

[KS1] K. Koike and H. Shiga A three terms Arithmetic-Geometric mean,Chiba Technical Report 2005 .

[KS2] K. Koike and H. Shiga Isogeny formulas for the Picard modular forms,Chiba Technical Report 2005 .

[M] D. Mumford, Tata Lectures on Theta I, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgard(1983).

[P] E. Picard, Sur les fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires, Acta math., 2(1883), 114-135.

[Sch] B. Schoeneberg, Elliptic Modular Functions, Springer, Grundlehren 203, 1970.

[S] H. Shiga, On the representation of the Picard modular function by θ constants I-II, Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ. 24(1988), 311-360.

[U] 梅村浩、楕円関数論、東京大学出版会, 2000

[Y] M. Yoshida, Fuchsian differential equations, Aspects of Mathematics, E11. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig(1987).

A-超幾何系入門

齋藤　睦（北海道大学大学院理学研究科）

March 8, 2006

1　はじめに

代数幾何学（連立方程式系の理論）において，トーリック多様体という一つのファミリーがある．トーリック多様体とは，代数的トーラスの作用を持つ代数多様体で，その代数的トーラスを開部分多様体として含むものである．直観的にいうと，大きい代数的トーラスの縁に有限個の小さいトーラスがくっついているものである．

トーリック多様体の重要性は，いろいろな不変量を組合せ論の言葉で具体的に書け，しかも，このファミリーはそれなりに多様な例を提供してくれるということにある．

代数解析学（連立偏微分方程式系の理論）において，代数幾何学におけるトーリック多様体の役割を果たすと考えられるものに A-超幾何微分方程式系がある．

A-超幾何系とは，1970 年代に W. Miller Jr.[5] らにより定義され，1980 年代後半に Gelfand らにより組織的研究が始められた偏微分方程式系で，本稿で見るように，通常の超幾何微分方程式系にパラメータに対応する新変数を導入し対称性を高めたもので，トーリック多様体と強い関連がある．

本稿では，A-超幾何系の起源と，特に重要な場合である Aomoto-Gelfand 系（1970 年代からの青本による一連の研究がある (cf. [1])）を紹介する．

2　ガウスの超幾何級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^k}{k!},$$

ここで，$\gamma\notin\mathbb{Z}_{\leq 0}$, $(a)_k=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}=a(a+1)\cdots(a+k-1)$.

2.1　隣接関係式（易しい方向）

$\theta_z=z\frac{d}{dz}$ とおく．等式

$$(\theta_z+\alpha)((\alpha)_k z^k)=(k+\alpha)(\alpha)_k z^k=\alpha(\alpha+1)_k z^k,$$

により，関係式

$$\begin{aligned}(\theta_z+\alpha)F(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma;z),\\ (\theta_z+\beta)F(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \beta F(\alpha,\beta+1,\gamma;z),\\ (\theta_z+\gamma-1)F(\alpha,\beta,\gamma;z) &= (\gamma-1)F(\alpha,\beta,\gamma-1;z),\\ \frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;z).\end{aligned}$$

が得られる.

2.2 パラメータベクトルの変化

上の関係式のパラメータの変化はそれぞれ

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

である.

2.3 ガウスの超幾何微分方程式

$F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は次の微分方程式を満たす：

$$[(\theta_z+\gamma)\frac{d}{dz}-(\theta_z+\alpha)(\theta_z+\beta)]\phi=0.$$

証明.

$$\begin{aligned}(\theta_z+\gamma)\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \alpha\beta F(\alpha+1,\beta+1,\gamma;z),\\ (\theta_z+\alpha)(\theta_z+\beta)F(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \alpha\beta F(\alpha+1,\beta+1,\gamma;z).\end{aligned}$$

2.4 隣接作用素をパラメータフリーなベクトル場にする

パラメータ α,β,γ に対応する新変数 $u_\alpha,u_\beta,u_\gamma$ を導入する.
次の級数を考える：

$$\tilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;u_\alpha,u_\beta,u_\gamma,z)=u_\alpha^\alpha u_\beta^\beta u_\gamma^{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma;z)$$

すると，$\theta_\alpha=u_\alpha\frac{\partial}{\partial u_\alpha}$ とおいて，

$$\begin{aligned}u_\alpha(\theta_z+\theta_\alpha)\tilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;u_\alpha,u_\beta,u_\gamma,z) &= u_\alpha(\theta_z+\theta_\alpha)u_\alpha^\alpha u_\beta^\beta u_\gamma^{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma;z)\\ &= u_\alpha u_\alpha^\alpha u_\beta^\beta u_\gamma^{\gamma-1}(\theta_z+\alpha)F(\alpha,\beta,\gamma;z)\\ &= u_\alpha^{\alpha+1}u_\beta^\beta u_\gamma^{\gamma-1}\alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma;z)\\ &= \alpha\tilde{F}(\alpha+1,\beta,\gamma;u_\alpha,u_\beta,u_\gamma,z).\end{aligned}$$

2.5 $\tilde{F}$ の隣接関係式

このように，$\tilde{F}$ には F から引き継いだ次の隣接関係式がある：

$$u_\alpha(\theta_z+\theta_\alpha)\tilde{F}=\alpha\tilde{F}(\alpha+1), \tag{1}$$
$$u_\beta(\theta_z+\theta_\beta)\tilde{F}=\beta\tilde{F}(\beta+1), \tag{2}$$
$$u_\gamma^{-1}(\theta_z+\theta_\gamma)\tilde{F}=(\gamma-1)\tilde{F}(\gamma-1), \tag{3}$$
$$u_\alpha u_\beta u_\gamma\frac{\partial}{\partial z}\tilde{F}=\frac{\alpha\beta}{\gamma}\tilde{F}(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1). \tag{4}$$

ここで，変化のないパラメータは省略した．また，**左辺に現れるこれらの４つの作用素は互いに可換**であることが確かめられる．上の 4 つの関係式より

$$\begin{aligned} u_\gamma^{-1}(\theta_z+\theta_\gamma)\cdot u_\alpha u_\beta u_\gamma\frac{\partial}{\partial z}\tilde{F} &= \alpha\beta\tilde{F}(\alpha+1,\beta+1),\\ u_\alpha(\theta_z+\theta_\alpha)\cdot u_\beta(\theta_z+\theta_\beta)\tilde{F} &= \alpha\beta\tilde{F}(\alpha+1,\beta+1)\end{aligned}$$

が得られる．さらに，明らかに $\tilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;u_\alpha u_\beta,u_\gamma,z)$ は次も満たす：

$$\theta_\alpha\tilde{F} = \alpha\tilde{F}, \tag{5}$$
$$\theta_\beta\tilde{F} = \beta\tilde{F}, \tag{6}$$
$$\theta_\gamma\tilde{F} = (\gamma-1)\tilde{F}. \tag{7}$$

2.6 変数変換

(1)-(4) の隣接作用素が

$$\frac{\partial}{\partial x_1},\quad \frac{\partial}{\partial x_2},\quad \frac{\partial}{\partial x_3},\quad \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

に変換されるように，変数変換

$$(u_\alpha,u_\beta,u_\gamma,z)\to(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

を行う．

	u_α	u_β	u_γ	z
$\frac{\partial}{\partial x_1}$	u_α^2	0	0	$u_\alpha z$
$\frac{\partial}{\partial x_2}$	0	u_β^2	0	$u_\beta z$
$\frac{\partial}{\partial x_3}$	0	0	1	$u_\gamma^{-1}z$
$\frac{\partial}{\partial x_4}$	0	0	0	$u_\alpha u_\beta u_\gamma$

の逆行列は

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\frac{\partial}{\partial u_\alpha}$	u_α^{-2}	0	0	$-u_\alpha^{-2}u_\beta^{-1}u_\gamma^{-1}z$
$\frac{\partial}{\partial u_\beta}$	0	u_β^{-2}	0	$-u_\alpha^{-1}u_\beta^{-2}u_\gamma^{-1}z$
$\frac{\partial}{\partial u_\gamma}$	0	0	1	$-u_\alpha^{-1}u_\beta^{-1}u_\gamma^{-2}z$
$\frac{\partial}{\partial z}$	0	0	0	$u_\alpha^{-1}u_\beta^{-1}u_\gamma^{-1}$

となるので,

$$x_1 = -u_\alpha^{-1}, \quad x_2 = -u_\beta^{-1}, \quad x_3 = u_\gamma, \quad x_4 = u_\alpha^{-1}u_\beta^{-1}u_\gamma^{-1}z$$

とおく．すると,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = u_\alpha(\theta_z + \theta_\alpha), \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = u_\beta(\theta_z + \theta_\beta),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_3} = u_\gamma^{-1}(\theta_z + \theta_\gamma), \qquad \frac{\partial}{\partial x_4} = u_\alpha u_\beta u_\gamma \frac{\partial}{\partial z}$$

であって,

$$\theta_\alpha = -\theta_1 - \theta_4, \quad \theta_\beta = -\theta_2 - \theta_4, \quad \theta_\gamma = \theta_3 - \theta_4.$$

ここで，$\theta_j = x_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ とする．

従って，$\tilde{F}(\alpha, \beta, \gamma; x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta}x_3^{\gamma-1}F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{x_3x_4}{x_1x_2})$ は次を満たす：

$$\begin{aligned}
&(\theta_1 + \theta_4 + \alpha)\Phi = 0,\\
&(\theta_2 + \theta_4 + \beta)\Phi = 0,\\
&(-\theta_3 + \theta_4 + \gamma - 1)\Phi = 0,\\
&(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_4})\Phi = 0.
\end{aligned}$$

これは，パラメータベクトル ${}^t(-\alpha, -\beta, 1-\gamma)$ の A-超幾何系．ここで,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$$

で，$\frac{\partial}{\partial x_j}$ は，パラメータを $-\boldsymbol{a}_j$ だけ変化させる隣接作用素である

一般の多変数超幾何級数から出発して同様の操作で A-超幾何系を構成できる.

3 A-超幾何系

3.1 A-超幾何系の定義

さて,

$$A := (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{d\times n}(\mathbb{Z})$$

とし，$\mathrm{rank}(A) = d$ を仮定する.

$$I_A := \langle \partial^{\boldsymbol{u}} - \partial^{\boldsymbol{v}} \mid A\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{N}^n) \rangle \subseteq \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$$

は A から決る $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ のトーリックイデアルという.

パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta} = {}^t(\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{C}^d$ を持つ A-超幾何系とは，Φ を未知関数として,

$$\begin{cases} (\partial^{\boldsymbol{u}} - \partial^{\boldsymbol{v}})\Phi = 0 & (A\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{v};\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{N}^n) \\ (\sum_{j=1}^n a_{ij}\theta_j - \beta_i)\Phi = 0 & (i = 1, \ldots, d) \end{cases}$$

のことである．D-加群の言葉では，D を n 次のワイル代数：

$$D := \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle.$$

として，D をトーリックイデアル I_A と d 個のオイラー作用素から生成される左イデアルで割ったもの：

$$H_A(\boldsymbol{\beta}) = D/(DI_A + \sum_{i=1}^{d} D(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\theta_j - \beta_i))$$

をパラメータベクトル $\boldsymbol{\beta} = {}^t(\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{C}^d$ を持つ A-超幾何系という.

∂_j はパラメータを $-\boldsymbol{a}_j$ だけシフトする隣接作用素である．即ち，$\phi_{\boldsymbol{\beta}}$ が $H_A(\boldsymbol{\beta})$ の解ならば，$\partial_j(\phi_{\boldsymbol{\beta}})$ は $H_A(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{a}_j)$ の解となる.

3.2 Aomoto-Gelfand 系

$\mathbb{R}^{M+N}$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{M+N}$ とおき,

$$\boldsymbol{a}_{ij} := \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j \qquad (1 \le i \le M < j \le M + N),$$

$$A = (\boldsymbol{a}_{1\,M+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{1\,M+N}, \boldsymbol{a}_{2\,M+1}, \ldots \boldsymbol{a}_{2\,M+N}, \ldots, \boldsymbol{a}_{d\,M+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{d\,M+N})$$

とおく．すると，$n = MN$ で，$d = \mathrm{rank}\,(A) = M + N - 1$ である（-1 は，前半の M 個の成分の和＝後半の N 個の成分の和という関係式による）.

この A に関する A-超幾何系を特に Aomoto-Gelfand 系という．$\boldsymbol{a}_{ij}$ に対応する変数を x_{ij} とすると，トーリックイデアルは,

$$I_A = \langle \partial_{ij}\partial_{kl} - \partial_{il}\partial_{kj} \,:\, 1 \le i, k \le M < j, l \le M + N \rangle$$

である．また，パラメータ $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^{M+N}$ （但し，$\sum_{i=1}^{M} \beta_i = \sum_{j=M+1}^{M+N} \beta_j$）に対し,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=M+1}^{M+N} \theta_{ij} - \beta_i \quad (i = 1, \ldots, M) \\ &\sum_{i=1}^{M} \theta_{ij} - \beta_j \qquad (j = M + 1, \ldots, M + N) \end{aligned}$$

が Aomoto-Gelfand 系のオイラー作用素である（$\theta_{ij} := x_{ij}\partial_{ij}$）.

例 3.1 ガウスの場合は偏微分方程式系：

$$\begin{cases} (\partial_1\partial_2 - \partial_3\partial_4)\Phi = 0 \\ (\theta_1 + \theta_4 + \alpha)\Phi = 0 \\ (\theta_2 + \theta_4 + \beta)\Phi = 0 \\ (-\theta_3 + \theta_4 - 1 + \gamma)\Phi = 0 \end{cases}$$

であった．これは，

$$\begin{cases} (\partial_1\partial_2 - \partial_3\partial_4)\Phi = 0 \\ (\theta_1 + \theta_4 + \alpha)\Phi = 0 \\ (\theta_2 + \theta_3 + \beta - \gamma + 1)\Phi = 0 \\ (\theta_1 + \theta_3 + \alpha - \gamma + 1)\Phi = 0 \\ (\theta_2 + \theta_4 + \beta)\Phi = 0 \end{cases}$$

と同等である．従って，ガウスの場合は，$M = N = 2$, $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_4$ の場合の Aomoto-Gelfand 系である．

$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{MN}$ は $\mathfrak{sl}(M+N,\mathbb{C})$ の極大放物型部分リー代数 $\mathfrak{p}_+$ の冪零根基

$$\mathfrak{n}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & W \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{(M+N)\times(M+N)}(\mathbb{C}) \,:\, W \in M_{M\times N}(\mathbb{C}) \right\}$$

と思え，A はそのルート全体の集合 $\{\varepsilon_i - \varepsilon_{M+j} \,:\, 1 \le i \le M,\, 1 \le j \le N\}$ と見ることができる．$\mathfrak{n}_+$ はグラスマン多様体 $SL(M+N,\mathbb{C})/P_-$ の big cell

$$\mathfrak{n}_+ \simeq \left\{ \begin{pmatrix} I_M & W \\ 0 & I_N \end{pmatrix} \in SL(M+N,\mathbb{C}) \,:\, W \in M_{M\times N}(\mathbb{C}) \right\}$$

だが，Aomoto-Gelfand 系は $SL(M+N,\mathbb{C})/P_-$ に拡張される．Gelfand が考察したのは，もともと，このグラスマン多様体上だった．

$$P_- = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix} \in SL(M+N,\mathbb{C}) \,:\, X \in GL(M,\mathbb{C}),\, Y \in M_{N\times M}(\mathbb{C}),\, Z \in GL(N,\mathbb{C}) \right\}.$$

谷崎 [7] は，C 型でも同様に A-超幾何系をコンパクト化できることを示した．

木村・高野・原岡は代数的トーラスをジョルダン群に変えた Aomoto-Gelfand 系の合流型のバージョンを定義，考察した (cf. [2])．

4 アフィントーリック多様体

A により，$(\mathbb{C}^\times)^d$ は，$\mathbb{C}^n$ 上に

$$((t_1,\dots,t_d),(\xi_1,\dots,\xi_n)) \mapsto (t^{\boldsymbol{a}_1}\xi_1,\dots,t^{\boldsymbol{a}_n}\xi_n)$$

で作用する．A から決まるアフィントーリック多様体 X はこの作用に関する $(1,1,\dots,1)$ の軌道の閉包である：

$$\begin{aligned} X: &= \overline{(\mathbb{C}^\times)^d.(1,1,\dots,1)} \\ &= \{\xi\in\mathbb{C}^n : \xi^{\boldsymbol{u}}-\xi^{\boldsymbol{v}}=0 \qquad (A\boldsymbol{u}=A\boldsymbol{v})\} \\ &= \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{N}A]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\xi]/I_A). \end{aligned}$$

X の軌道分解は A が生成する錐 $\mathbb{R}_{\geq 0}A := \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_1+\cdots+\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_n$ の面 σ を使って次のように記述できる：

$$X_\sigma = \{\xi\in X : \xi_j = 0\,(\mathbf{a}_j\notin\sigma),\ \xi_j\neq 0\,(\mathbf{a}_j\in\sigma)\}.$$

$$X = \coprod_\sigma X_\sigma.$$

例 4.1 ガウスの場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4), \quad \boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^3.$$

であった．このとき，

$$X = \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) : \xi_1\xi_2-\xi_3\xi_4=0\}.$$

錐 $\mathbb{R}_{\geq 0}A$ の面は，$\mathbb{R}_{\geq 0}A$ 自身，$\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_1+\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_3$, $\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_1+\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_4$, $\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_2+\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_3$, $\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_2+\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_4$, $\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_1$, $\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_2$, $\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_3$, $\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_4$, $\{\mathbf{0}\}$ の１０個．よって，X の軌道は次の１０個．

$$\begin{aligned} X_{\mathbb{R}_{\geq 0}A} &= \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\in X : \xi_j\neq 0\,(j=1,2,3,4)\} \\ X_{\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_1+\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_3} &= \{(\xi_1,0,\xi_3,0)\in X : \xi_j\neq 0\,(j=1,3)\} \\ X_{\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_1+\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_4} &= \{(\xi_1,0,0,\xi_4)\in X : \xi_j\neq 0\,(j=1,4)\} \\ X_{\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_2+\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_3} &= \{(0,\xi_2,\xi_3,0)\in X : \xi_j\neq 0\,(j=2,3)\} \\ X_{\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_2+\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_4} &= \{(0,\xi_2,0,\xi_4)\in X : \xi_j\neq 0\,(j=2,4)\} \\ X_{\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_1} &= \{(\xi_1,0,0,0)\in X : \xi_1\neq 0\} \\ X_{\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_2} &= \{(0,\xi_2,0,0)\in X : \xi_2\neq 0\} \\ X_{\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_3} &= \{(0,0,\xi_3,0)\in X : \xi_3\neq 0\} \\ X_{\mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{a}_4} &= \{(0,0,0,\xi_4)\in X : \xi_4\neq 0\} \\ X_{\{\mathbf{0}\}} &= \{\mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

4.1 特性多様体

X_σ の余接束を

$$T^*_{X_\sigma}\mathbb{C}^n = \{(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\in\mathbb{C}^{2n} : \boldsymbol{\xi}\in X_\sigma,\ A(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}\},$$

とかく．ここで，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi} = {}^t(x_1\xi_1,\dots,x_n\xi_n)$．このとき，

定理 4.2 ([GKZ])

$$\mathrm{Ch}(H_A(\boldsymbol{\beta})) \subseteq \coprod_{\sigma} T^*_{X_\sigma}\mathbb{C}^n$$

がすぐ分かり，$H_A(\boldsymbol{\beta})$ がホロノミックであることが分かる．

参考文献

[1] 青本和彦，喜多通武: 超幾何関数論，(1994), シュプリンガー・フェアラーク東京.

[2] 原岡喜重: 超幾何関数，(2002)，朝倉書店.

[3] 齋藤睦：超幾何関数とトーリック多様体，数学セミナー，2004 年 3 月号，42–45.

[4] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky: *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, (1994), Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.

[5] W. Miller. Jr.: *Lie Theory and generalizations of the hypergeometric functions* SIAM J. Appl. Math. **25**, (1973), 226–235.

[6] M. Saito, B. Sturmfels and N. Takayama: *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations*, Algorithms and Computation in Mathematics **6**, (2000), Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

[7] T. Tanisaki: *Highest weight modules associated to parabolic subgroups with commutative unipotent radicals*, in *Algebraic groups and their representations*, edited by R. W. Carter and J. Saxl, (1998), 73–90, Kluwer Academic Publ., Dordrecht.

超幾何関数の幾何学

北海道大学 大学院理学研究科　松本 圭司

平成 18 年 3 月 8 日

1　序

超幾何関数 $F(a,b,c;z)$ は、変数 z に関するべき級数

$$F(a,b,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n$$

で定義される、a,b,c は複素パラメーターで $c\neq 0,-1,-2,\dots$ とし、

$$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1),\quad (a)_0=1$$

とする。パラメータ a,c が $\mathrm{Re}(a),\mathrm{Re}(c-a)>0$ をみたすとき、$F(a,b,c;z)$ は Euler 積分表示

$$F(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b}\frac{dt}{t(1-t)}$$

を持つ。

この積分表示は、ねじれコホモロジー群の代表元である logarithmic 1-form $d\log\frac{t}{1-t}$ とねじれホモロジー群の代表元である区間 $I=(0,1)$ とその端点で値が 0 となる関数 $u(t)=t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b}$ との組 $I\otimes u(t)$ との pairing とみなすことができる。ねじれ (コ) ホモロジー群たちには、交点形式という座標 t の取りかたに依存しない幾何学的な pairing がある。これらの交点形式は具体的に値を求めることができ、pairing 間の整合性により超幾何関数間の関係式を生み出す。この関係式の最も簡単な場合が、ベータ関数

$$B(p,q)=\int_0^1 t^p(1-t)^q\frac{dt}{t(1-t)}$$

の反転交式

$$B(p,q)B(-p,-q)=\frac{2\pi i(p+q)}{pq}\frac{1-e^{2\pi i(p+q)}}{(1-e^{2\pi ip})(1-e^{2\pi iq})}$$

である。以下で超幾何関数に関する交点理論の解説を行う。

2 Euler 積分表示

命題 1 (Euler 積分表示) パラメータ $a,\ c$ が $\mathrm{Re}(a),\mathrm{Re}(c-a)>0$ をみたすとき、超幾何関数

$$F(a,b,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n\quad(c\neq 0,-1,-2,\ldots)$$

は、以下の *Euler* 積分と一致する。

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b}\frac{dt}{t(1-t)}\tag{1}$$

[証明] 積分 (1) 内の $(1-zt)^{-b}$ をべき級数

$$(1-zt)^{-b}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{n!}(zt)^n$$

に展開し、積分と無限級数との順序を交換すると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^a(1-t)^{c-a}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{n!}(zt)^n\right]\frac{dt}{t(1-t)}\\ =\ &\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{n!}z^n\left[\int_0^1 t^{a+n}(1-t)^{c-a}\frac{dt}{t(1-t)}\right].\end{aligned}$$

大括弧で囲まれた積分はベータ関数であり、ベータ関数とガンマ関数

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^p\frac{dt}{t}\quad(\mathrm{Re}(p)>0)$$

のよく知られた性質

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad \Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

を用いると、積分 (1) は

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} B(a+n, c-a) z^n \\ = & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)} z^n \\ = & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} \frac{(a)_n \Gamma(a)\Gamma(c-a)}{(c)_n \Gamma(c)} z^n = F(a,b,c;z) \end{aligned}$$

となる。 [証明終り]

3 広義積分の収束条件の解消

ベータ関数の定義や超幾何関数の Euler 積分表示が広義積分となる場合、積分路を変形して積分の収束性の議論を不要にすることができる。その変形をベータ関数で解説する。

十分小さな正数 ε をとり、$C_0^{+\varepsilon}$ を $t=0$ を中心とする半径 ε の正の向きの円周 で 始点と終点が $t=\varepsilon$ とする。また、$C_1^{-\varepsilon}$ を $t=1$ を中心とする半径 ε の正の向きの円周で始点と終点が $t=1-\varepsilon$ であるとする。

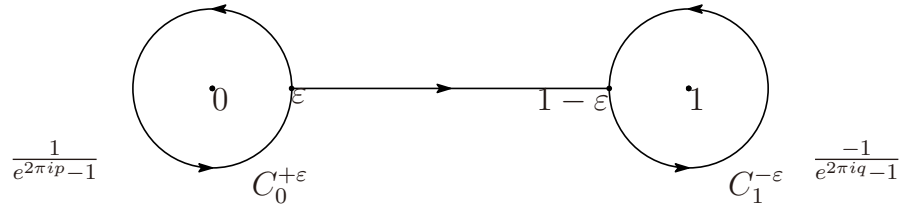


図 1: 円周 $C_0^{+\varepsilon}$ と $C_1^{-\varepsilon}$

命題 2 $u(t)=t^p(1-t)^q$ とする。$\mathrm{Re}(p), \mathrm{Re}(q) > 0$, $p, q \notin \mathbb{Z}$ のとき

$$B(p,q) = \frac{1}{e^{2\pi i p}-1} \int_{C_0^{+\varepsilon}} u(t)\varphi + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(t)\varphi - \frac{1}{e^{2\pi i q}-1} \int_{C_1^{-\varepsilon}} u(t)\varphi$$

が成立する、ここで $\varphi = \frac{dt}{t(1-t)}$ とする。

[証明]　右辺は ε の取り方によらず定まることを示す。それが示されれば $\mathrm{Re}(p), \mathrm{Re}(q) > 0$ のとき

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_0^{+\varepsilon}} u(t)\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_1^{-\varepsilon}} u(t)\varphi = 0$$

であり、

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(t)\varphi = B(p, q)$$

より、この命題が得られる。

円周 $C_0^{+\varepsilon}$ の半径が δ に小さくなったとする。このときの 2 つの積分の差は

$$\frac{1}{e^{2\pi i p} - 1} \left[\int_{C_0^{+\varepsilon}} u(t)\varphi - \int_{C_0^{+\delta}} u(t)\varphi \right] - \int_{\delta}^{\varepsilon} u(t)\varphi$$

である。この値は

$$\frac{1}{e^{2\pi i p} - 1} \int_C t^p (1-t)^q \frac{dt}{t(1-t)}$$

であり、Cauchy 積分定理より 0 となる。ここで積分路 C は下図のものである。円周 $C_1^{-\varepsilon}$ の半径 ε が変化しても値が不変であることも同様に示せる。　[証明終り]

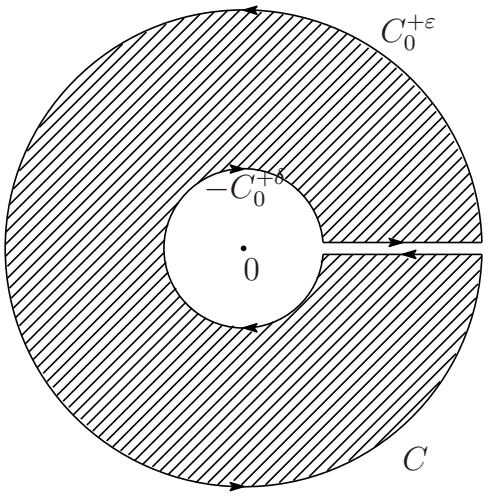


図 2: 積分路 C

命題 2 の右辺は広義積分でないので、$p, q \notin \mathbb{Z}$ で定義され、広義積分の収束の条件 $\mathrm{Re}(p), \mathrm{Re}(q) > 0$ をはずすことができる。

超幾何関数の Euler 積分表示に対しても同様に積分路の変形を行い、広義積分の収束の条件 $\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(c-a) > 0$ をはずすことができる。また、この積分路の変形で積分は広義積分ではないので、積分と無限級数との順序交換も級数の t の線積分路上での一様収束性から保証できる (z は固定して考える)。

さらに、後に紹介する交点形式を定めることができるようになる。

4 ねじれ Stokes 定理

ベータ関数の定義式や超幾何関数 $F(a, b, c; z)$ の Euler 積分表示で現れる多価正則 1 次形式 $u(t)\varphi(t)$ の取り扱いの工夫から始める。

区間 I 上では多価関数 $u(t)$ の分枝は一意に定まることに注目する。話の本質をわかりやすくするために多価関数 $u(t)$ とその log 微分を

$$u(t) = \prod_{j=0}^{m+2} (t - x_j)^{\alpha_j}, \quad \omega = d\log(u(t)) = \sum_{j=1}^{m+2} \frac{\alpha_j dt}{t - x_j}$$

とおいて少しだけ一般化しておく、ここで $x_0, x_1 \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}$ は相異なる複素数で α_j は $\sum_{j=0}^{m+2} \alpha_j = 0$ をみたす整数でない複素パラメーターとする。3 点 x_0, x_1, x_2 を射影座標変換で $\infty, 0, 1$ に移すことができるので、$m = 0$ のときがベータ関数に対応し、$m = 1$ のときが超幾何関数に対応する。

集合 $Z = \mathbb{P}^1 - \{x_0, \ldots, x_{m+2}\}$ 内の単連結な k 次チェイン Δ 上の k 次微分形式 ψ と多価関数 $u(t)$ との積の積分 $\int_\Delta u(t)\psi$ を考える。その積分を多価関数 $u(t)$ と ψ と分離し ψ と Δ と $u(t)$ を組み合わせた $\Delta \otimes u(t)$ との pairing $\langle \psi, \Delta \otimes u(t) \rangle$ とみなす。このルールのもとで Stokes 定理

$$\int_D d(u(t)\psi) = \int_{\partial D} u(t)\psi$$

がどうなるか調べる。左辺は

$$d(u(t)\psi) = du(t) \wedge \psi + u(t)d\psi = u(t)(\omega \wedge \psi + d\psi)$$

となるので、$\langle \nabla_\omega \psi, D \otimes u(t) \rangle$ となる、ここで $\nabla_\omega = d + \omega\wedge$ は Z 上の 1 価正則 1-form ω によりねじられた外微分作用素とする。一方、右辺は上

記のルールに従い、$\langle\psi, (\partial D)\otimes u(t)|_{\partial D}\rangle$ である、ここで $u(t)|_{\partial D}$ は D 上指定した $u(t)$ の枝の D の境界 ∂D への制限とする。そこでねじれ境界作用素 ∂_ω を $\partial_\omega(D\otimes u(t)) = (\partial D)\otimes u(t)|_{\partial D}$ として定める。

定理 1 (ねじれ Stokes 定理)

$$\langle\nabla_\omega\psi, D\otimes u(t)\rangle = \langle\psi, \partial_\omega(D\otimes u(t))\rangle.$$

$\nabla_\omega\psi = 0$ をみたす Z 上の C^∞ 級 k 次微分形式 ψ をねじれ閉 k 次微分形式といい、k 次チェイン D_j とその上に指定された $u(t)$ の分枝との組の有限和 $\gamma = \sum_{j\in J} D_j\otimes u(t)$ を ねじれ k 次チェインといい、$\partial_\omega(\gamma) = 0$ をみたすものをねじれ k 次サイクルという。

ベータ関数の定義式や超幾何関数の Euler 積分表示に表れる $\varphi = \frac{dt}{t(1-t)}$ は、ねじれ閉 1 次微分形式である。ベータ関数の広義積分を解消したときに用いた積分路 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $C_0^{+\varepsilon}$, $C_1^{-\varepsilon}$ とそこでの $u(t)$ での枝の指定から定まるねじれ 1 次チェイン

$$\gamma_1 = \frac{1}{e^{2\pi ip}-1}C_0^{+\varepsilon}\otimes u(t) + [\varepsilon, 1-\varepsilon]\otimes u(t) - \frac{1}{e^{2\pi iq}-1}C_1^{-\varepsilon}\otimes u(t)$$

は、ねじれ 1 次サイクルである。ベータ関数や超幾何関数は、ねじれ閉 1 次微分形式とねじれ 1 次サイクル上との pairing とみなせる。

また、ねじれ微分作用素 ∇_ω を特徴付ける ω は x_j のみに留数 α_j の 1 位極をもつ $\mathbb{P}^1$ 上の有理型微分形式である。超幾何関数の変数 z は ω の $\mathbb{P}^1$ 内の極の配置という形で幾何学的に設定される。また、ねじれ閉 1 次微分形式のねじれ 1 次サイクル上との pairing は基本的には線積分なので、射影座標 t の選び方によらず定まっている。

5　ねじれホモロジーの交点形式

ねじれ Stokes 定理より、ねじれ閉 1 次微分形式 φ と Z 内のねじれ 1 次サイクル $\gamma = \sum_{j=0}^N I_j\otimes u(t)$ との pairing $\langle\varphi, \gamma\rangle$ に対して、γ に $\partial_\omega(G)$ が加わっても pairing の値は変化しない、つまり

$$\langle\varphi, \gamma + \partial_\omega(G)\rangle = \langle\varphi, \gamma\rangle,$$

をみたす、ここで $G = \sum_{j\in J} D_j\otimes u(t)$ は Z 上のねじれ 2 次チェイン。また、ねじれ境界作用素 ∂_ω は $\partial_\omega\circ\partial_\omega = 0$ をみたす。そこで 1 次ねじれホモロジー群を以下のように定める。

定義 1 (1 次ねじれホモロジー群)

$$H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega) = \ker(\partial_\omega : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0)/\partial_\omega(\mathcal{C}_2),$$

ここで $\mathcal{C}_k$ は Z 上の有限和ねじれ k 次チェインたちのなす線型空間とする。

命題 3 (喜多-野海 [KN]) ねじれホモロジー群 $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega)$ は、$(m+1)$ 次元である。

ベータ関数に関するねじれホモロジー群では、開区間 $(0,1)$ 上の広義積分を解消するときに用いた積分路とその上での $u(t)$ の枝の指定から得られるねじれ 1 次サイクル γ_1 が基底となる。超幾何関数に関するねじれホモロジー群では、Euler 積分表示に対応するねじれ 1 次サイクル γ_1 と 1 次独立な ω の極 x_j と x_k を結ぶ積分路から得られるねじれ 1 次サイクルが存在する。

1 次ホモロジー群 $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega)$ の構成の際に $u(t)$ の代わりに $1/u(t) = u^{-1}(t)$ を用いて得られる 1 次ホモロジー群を $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_{-\omega})$ で表す。

定義 2 (ねじれホモロジー群間の交点形式) $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega)$ と $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_{-\omega})$ の交点形式を

$$\langle \gamma, \delta \rangle = \sum_{p \in I_\mu \cap J_\nu} a_\mu b_\nu \langle I_\mu, J_\nu \rangle_p [u|_{I_\mu}(p)][u^{-1}|_{J_\nu}(p)]$$

で定める、ここで $\gamma = \sum_\mu a_\mu I_\mu \otimes u(t)$, $\delta = \sum_\nu b_\nu J_\nu \otimes u^{-1}(t)$, p は I_μ と I_ν の交点で $\langle I_\mu, J_\nu \rangle_p$ は p における I_μ と J_ν の位相的な交点数とする。

定理 2 交点形式は非退化である。x_j と x_{j+1} を結ぶパス I_j と $u(t)$ との組 $\gamma_j = I_j \otimes u(t)$ から得られる 1 サイクルと x_k と x_{k+1} を結ぶパス I_k と $u^{-1}(t)$ との組 $\delta_k = I_k \otimes u^{-1}(t)$ から得られる 1 サイクルとの交点数が

$$\langle \gamma_j, \delta_k \rangle = \begin{cases} \frac{-c_j}{1-c_j} & \text{if } k = j-1, \\ \frac{1-c_j c_{j+1}}{(1-c_j)(1-c_{j+1})} & \text{if } k = j, \\ \frac{-1}{1-c_{j+1}} & \text{if } k = j+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

となるものがとれる、ここで $c_j = e^{2\pi i \alpha_j}$ とする。

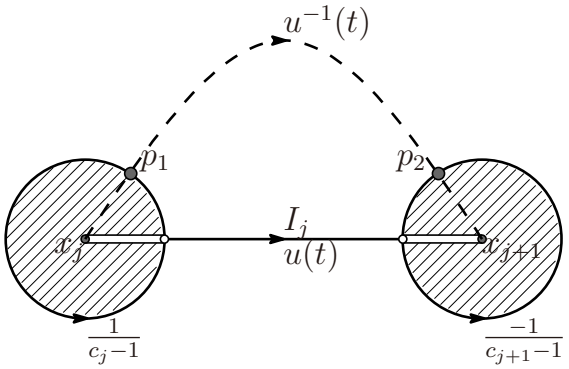


図 3: 交点数 $\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle$

[証明]　下記の図において p_1 での 位相的な交点数は -1 で $u(p_1)\times u^{-1}(p_1) = 1$, p_2 での位相的な交点数は $+1$ で $u(p_2) \times u^{-1}(p_2) = c_{j+1}$, なので　$(u(t)$ の p_2 での値では x_{j+1} の回りをまわっていることに注意)

２つのサイクルの交点数は

$$(-1)\frac{1}{c_j - 1} + c_{j+1}\frac{-1}{c_{j+1} - 1} = \frac{1 - c_j c_{j+1}}{(1 - c_j)(1 - c_{j+1})}.$$

他のサイクルの交点数も同様に計算できる。交点行列の行列式が 0 でないことから交点形式が非退化であることがわかる。　[証明終り]

6　ねじれコホモロジーの交点形式

ねじれ Stokes 定理より、ねじれ閉 1 次微分形式と Z 内のねじれ 1 サイクル γ との pairing $\langle \varphi, \gamma \rangle$ に対して、φ に $\nabla_\omega f$ が加わっても pairing の値は変化しない、つまり

$$\langle \varphi + \nabla_\omega f, \gamma \rangle = \langle \varphi, \gamma \rangle$$

をみたす、ここで f は Z 上の C^∞ 関数とする。また、ねじれ外微分作用素 ∇_ω は $\nabla_\omega \circ \nabla_\omega = 0$ をみたす。そこで 1 次ねじれコホモロジー群と compact な台をもつ 1 次ねじれコホモロジー群を以下のように定める。

定義 3

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega) &= \ker(\nabla_\omega : \mathcal{E}^1 \to \mathcal{E}^2)/\nabla_\omega(\mathcal{E}^0), \\ H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega) &= \ker(\nabla_\omega : \mathcal{E}_c^1 \to \mathcal{E}_c^2)/\nabla_\omega(\mathcal{E}_c^0), \end{aligned}$$

とする、ここで $\mathcal{E}^k$ と $\mathcal{E}^k_c$ はそれぞれ Z 上の *smooth k-forms* と Z 上の *compact* な台をもつ *smooth k-forms* のなす線型空間とする。

命題 4 (喜多-野海 [KN]) パラメーター α_j が整数でないならば $H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega)$ から $H^1(\mathcal{E}^\bullet_c, \nabla_\omega)$ への同型 $\imath_\omega$ が存在 し、ともに $(m+1)$ 次元 である。

∇_ω を $\nabla_{-\omega} = d - \omega\wedge$ に変えて得られる1次コホモロジー群を $H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_{-\omega})$ とする。

定義 4 *compact* な台をもつ1次コホモロジー群 $H^1(\mathcal{E}^\bullet_c, \nabla_\omega)$ と $H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_{-\omega})$ との交点形式を

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_Z \varphi \wedge \psi$$

で定める、ここで $\varphi \in \mathcal{E}^1$ は , $\psi \in \mathcal{E}^1_c$ 。$\mathcal{E}^1_c$ の元 ψ は、各 x_j の十分小さな近傍内では、恒等的に零となっているので、この積分は広義積分とはならず必ず値が定まる。

同型 $\imath_\omega : H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega) \to H^1(\mathcal{E}^\bullet_c, \nabla_\omega)$ が $H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega)$ と $H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_{-\omega})$ の交点形式を誘導する。

定理 3 交点形式は非退化であり、

$$\varphi_j = d\log\frac{t-x_j}{t-x_{j+1}}, \quad \psi_k = d\log\frac{t-x_k}{t-x_{k+1}}$$

に対して

$$\langle \varphi_j, \psi_k \rangle = 2\pi i \begin{cases} \frac{-1}{\alpha_j} & \text{if } k = j-1, \\ \frac{\alpha_j+\alpha_{j+1}}{\alpha_j\alpha_{j+1}} & \text{if } k = j, \\ \frac{-1}{\alpha_{j+1}} & \text{if } k = j+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

[証明] 同型 $\imath_\omega : H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega) \to H^1(\mathcal{E}^\bullet_c, \nabla_\omega)$ を追跡する。φ_j は x_j, x_{j+1} にのみ留数 $1, -1$ の1位極をもつ $\mathbb{P}^1$ 上の 1-form である。Z 上の smooth 関数 f で $\varphi_j - \nabla_\omega f$ が各 x_ℓ の小さな近傍 U_ℓ で恒等的に 0 になるものを構成する。

U_ℓ 内で $f_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_\ell)^n$ とおいて、微分方程式 $\nabla_\omega f_\ell = \varphi_j$ をみたす a_n を求めることができる。

$$\omega = \frac{\alpha_j}{t - x_\ell} + b_0 + b_1(t - x_\ell) + \cdots$$

より、f_ℓ は φ_j の極とならない x_ℓ では $a_0 = 0$ で、x_j, x_{j+1} では $a_0 = \frac{1}{\alpha_j}, \frac{-1}{\alpha_j}$ となる収束べき級数になっている。その収束域を $V_\ell (\supset U_\ell)$ とし、V_ℓ の補集合 V_ℓ^c 上では恒等的に 0 となり、U_ℓ 上では恒等的に 1 となる Z 上の smooth な関数を h_ℓ とする。各 f_ℓ は V_ℓ 上でしか定義されないが、

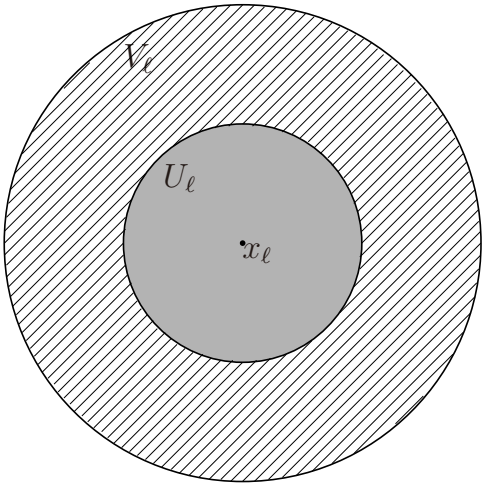


図 4: x_ℓ の近傍

$$f = \sum_{\ell=0}^{m+2} h_\ell f_\ell$$

は Z 上の関数とみなせ、$\varphi_j - \nabla_\omega f$ は U_ℓ で恒等的に 0 となり $\mathcal{E}_c^1$ の元である。つまり、$\imath_\omega(\varphi_j)$ は $\varphi_j - \nabla_\omega f \in \mathcal{E}_c^1$ で代表される。また、この元は $\cup_{\ell=0}^{m+2} V_\ell$ の補集合上では φ_j と等しい。

したがって、交点数 $\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle &= \int_Z (\varphi_j - \nabla_\omega f) \wedge \varphi_k \\ &= \sum_{\ell=0}^{m+2} \int_{V_\ell - U_\ell} (\varphi_j - \nabla_\omega h_\ell f_\ell) \wedge \varphi_k = -\sum_{\ell=0}^{m+2} \int_{V_\ell - U_\ell} (\nabla_\omega h_\ell f_\ell) \wedge \varphi_k \end{aligned}$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{m+2}\int_{V_\ell-U_\ell} f_\ell dh_\ell\wedge\varphi_k = -\sum_{\ell=0}^{m+2}\int_{\partial(V_\ell-U_\ell)} h_\ell f_\ell\varphi_k$$
$$= \sum_{\ell=0}^{m+2}\int_{\partial U_\ell} f_\ell\varphi_k = 2\pi i\sum_{\ell=0}^{m+2}\mathrm{Res}_{t=x_\ell}(f_\ell\varphi_k)$$

となる。ここでは Stokes 定理と留数定理を用いていて、h_ℓ は ∂V_ℓ では恒等的に 0, ∂U_ℓ では恒等的に 1 となっていることに注意する。

$(m+1)$ 次正方行列 $(\langle\varphi_j,\psi_k\rangle)_{0\le j,k\le m}$ の行列式が 0 でないことから交点形式が非退化であることがわかる。 (証明終わり)

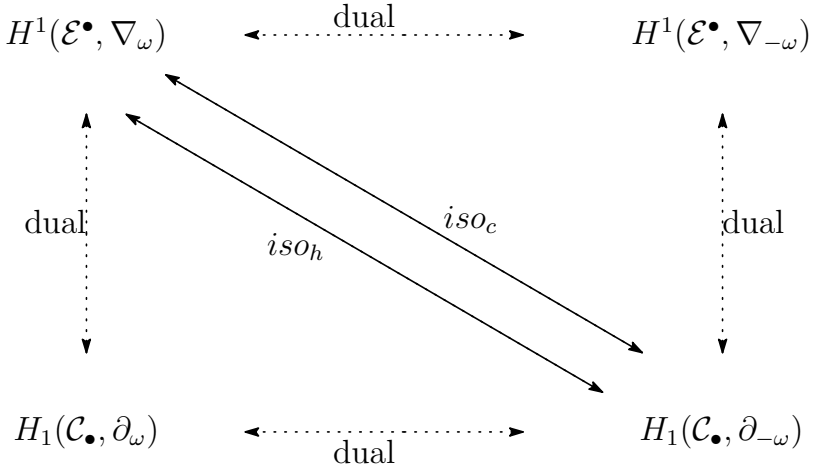
7 ねじれ周期関係式

定理 4 4 つの線型空間

$$H^1(\mathcal{E}^\bullet,\nabla_\omega),\ H^1(\mathcal{E}^\bullet,\nabla_{-\omega}),\ H_1(\mathcal{C}_\bullet,\partial_\omega),\ H_1(\mathcal{C}_\bullet,\partial_{-\omega})$$

間に定めた *pairing* たちには整合性がある。

同型 iso_c は $\langle\varphi,\psi\rangle = \langle\psi, iso_c(\varphi)\rangle$ が任意の元 $\psi\in H^1(\mathcal{E}^\bullet,\nabla_{-\omega})$ に対して成立することで定まる。同型 iso_h は $\langle\varphi,\gamma\rangle = \langle\gamma, iso_h(\varphi)\rangle$ が任意の元 $\gamma\in H_1(\mathcal{C}_\bullet,\partial_\omega)$ に対して成立することで定まる。整合性があるとは $iso_c = iso_h$ をみたしていることである。



系 1 (ねじれ周期関係式) これらの空間に対する基底 φ_j, ψ_j, γ_j, δ_j に対して、4 つの $(m+1)$ 次正方行列

$$\Pi_\omega = \langle\varphi_j,\gamma_k\rangle,\quad \Pi_{-\omega} = \langle\psi_j,\delta_k\rangle,\quad H_{ch} = \langle\varphi_j,\psi_k\rangle,\quad H_h = \langle\gamma_j,\delta_k\rangle,$$

を定めるとねじれ周期関係式

$$\mathit{\Pi}_\omega\ {}^tH_h^{-1}\ {}^t\mathit{\Pi}_{-\omega} = H_{ch}, \quad i.e. \quad {}^t\mathit{\Pi}_{-\omega} H_{ch}^{-1}\ \mathit{\Pi}_\omega = {}^tH_h$$

をみたす。

$m = 0$ の場合には、ねじれ周期関係式はスカラーの関係式となり、ベータ関数の反転交式

$$B(p,q)B(-p,-q) = \frac{2\pi i(p+q)}{pq} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i(p+q)}}{(1-e^{2\pi ip})(1-e^{2\pi iq})}$$

を生み出す。

$m = 1$ の場合にねじれ周期関係式から超幾何関数間の関係式を導く。

$$x_0 = \infty, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1/z\ (0 < z < 1),$$

$$\alpha_0 = b - c, \quad \alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = c - a, \quad \alpha_3 = -b$$

とおく (x_4, α_4 は x_0, α_0 とみなすことにする)。

$$u(t) = t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b}, \quad \omega = d\log u(t),$$

とし、ねじれ閉微分 1 次形式を

$$\varphi_1 = d\log\frac{t-x_1}{t-x_2} = \frac{dt}{t(1-t)}, \quad \varphi_3 = d\log\frac{t-x_3}{t-x_4} = \frac{-zdt}{1-zt},$$

で選び、x_j と x_{j+1} を結ぶ路 I_j から得られる $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega)$ の元 γ_j と $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_{-\omega})$ の元 δ_j から $\gamma_1, \gamma_3, \delta_1, \delta_3$ を選ぶ。交点行列は以下のようになる。

$$H_h = \begin{pmatrix} \frac{1-c_1c_2}{(1-c_1)(1-c_2)} & 0 \\ 0 & \frac{1-c_3c_0}{(1-c_3)(1-c_0)} \end{pmatrix},\ H_{ch} = 2\pi i \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2+\alpha_0}{\alpha_3\alpha_0} \end{pmatrix}$$

$$\mathit{\Pi}_\omega = \begin{pmatrix} \langle\varphi_1,\gamma_1\rangle & \langle\varphi_1,\gamma_3\rangle \\ \langle\varphi_3,\gamma_1\rangle & \langle\varphi_3,\gamma_3\rangle \end{pmatrix}, \quad \mathit{\Pi}_{-\omega} = \begin{pmatrix} \langle\varphi_1,\delta_1\rangle & \langle\varphi_1,\delta_3\rangle \\ \langle\varphi_3,\delta_1\rangle & \langle\varphi_3,\delta_3\rangle \end{pmatrix},$$

とすると、$\mathit{\Pi}_{\pm\omega}$ は超幾何関数を成分とする 2×2 行列となる。たとえば

$$\begin{aligned} \langle\varphi_1,\gamma_1\rangle &= B(a,c-a)F(a,b,c;z) \\ \langle\varphi_1,\gamma_3\rangle &= -(-1)^{c-a-b}z^{1-c}B(b-c+1,-b+1) \\ &\quad \times F(b-c+1,a-c+1,2-c;z) \end{aligned}$$

である (第二式は積分表示に変数変換 $zt = 1/s$ を施せば得られる)。

ねじれ周期関係式

$$\mathit{\Pi}_\omega \, {}^t H_h^{-1} \, {}^t \mathit{\Pi}_{-\omega} = H_{ch}$$

の (1,2) 成分から

$$\begin{aligned} & F(a,b,c;z)F(1-a,1-b,2-c;z) \\ = \;& F(a+1-c,b+1-c,2-c;z)F(c-a,c-b,c;z) \end{aligned}$$

が得られる。また (1,1) 成分から

$$\begin{aligned} & F(a,b,c;z)F(-a,-b,-c;z) - 1 \\ = \;& \frac{ab(c-a)(c-b)}{c^2(c+1)(c-1)} \\ & \times F(b-c+1,a-c+1,2-c;z)F(c-b+1,c-a+1,c+2;z) \end{aligned}$$

が得られる。

一般の m の場合には Appell-Lauricella 超幾何関数

$$\begin{aligned} & F_D(a,b_1,\ldots,b_m,c;z_1,\ldots,z_m) \\ = \;& \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{(a)_{n_1+\cdots+n_m}(b_1)_{n_1}\cdots(b_m)_{n_m}}{(c)_{n_1+\cdots+n_m}(1)_{n_1}\cdots(1)_{n_m}} z_1^{n_m}\cdots z_m^{n_m} \\ = \;& \frac{1}{B(a,c-a)} \int_0^1 t^a(1-t)^{c-a}(1-z_1t)^{-b_1}\cdots(1-z_mt)^{-b_m}\frac{dt}{t(1-t)} \end{aligned}$$

間の関係式を生み出す。詳しくは [CM] を参照せよ。

8 合流型交点理論

微分作用素 ∇_ω を定める $\mathbb{P}^1$ 上の有理型 1 次微分形式 ω が高位の極をもった場合に合流型超幾何関数が現れる。その場合にも交点理論の展開は可能である。

ねじれ周期関係式の簡単な例として、ガンマ関数の反転交式

$$\mathit{\Gamma}(\alpha)\mathit{\Gamma}(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}dt\right)\left(\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{t^2/2}dt\right) = 2\pi i$$

がある。

また、Bessel 関数のパラメーター $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に関する Lommel の公式

$$J_a(z)J_{-a+1}(z) + J_{a-1}(z)J_{-a}(z) = \frac{2\sin(\pi a)}{\pi z},$$

を導くこともできる、ここで

$$J_a(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(a+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^k,$$

であり、$z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ で $z/2$ の偏角は $-\pi/2$ から $\pi/2$ でとるものとする。

詳しくは [MMT] を参照せよ。

参考文献

[AK] K. Aomoto and M. Kita, Hypergeometric functions (in Japanese), Springer-Verlag, Tokyo, 1994.

[CM] K. Cho and K. Matsumoto, Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relation I, Nagoya Math. J. **139** (1995), 67–86.

[KM] M. Kita and K. Matsumoto, Duality for Hypergeometric Functions and Invariant Gauss-Manin Systems, Compositio Math., **108** (1997), 77–106.

[KN] M. Kita and M. Noumi, On the structure of cohomology groups attached to integrals of certain many valued analytic functions, Japan. J. Math., **9** (1983), 113–157.

[KY1] M. Kita and M. Yoshida, Intersection theory for twisted cycles I, Math. Nachr. **166** (1994), 287–304.

[KY2] M. Kita and M. Yoshida, ibid. II, Math. Nachr. **168** (1994), 171–190.

[MMT] H. Majima, K. Matsumoto and N. Takayama, Intersection theory for confluent hypergeometric functions, Tohoku J. Math., **52**, (2000), 489–513.

[M1] K. Matsumoto, Intersection numbers for logarithmic k-forms, Osaka J. Math., **35** (1998), 873–893.

[M2] K.Matsumoto, Intersection numbers for 1-forms associated with confluent hypergeometric functions, Funkcial. Ekvac., **41** (1998), 291–308.

[MY] K. Matsumoto and M. Yoshida, Recent progress of intersection theory for twisted (co)homology groups, Advanced studies in Pure Mathematics **27**, 2000, *Arrangements - Tokyo 1998*, 217–237.

曲面論と超幾何関数

神戸大学理学部 佐々木 武

2006.3.9 札幌

目次
1. はじめに — Clausen の公式
2. ３階の常微分方程式 — 平面曲線
3. ４階の常微分方程式の不変量
4. 歴史
5. アペルの超幾何関数と超幾何微分方程式系
6. 微分方程式系 $z_{xx} = \ell z_{xy} + az_x + bz_y + pz$, $z_{yy} = mz_{xy} + cz_x + dz_y + qz$ の不変量
7. ガウス関係式
8. 曲面の変換

この講義ではガウスの超幾何関数の２つの一般化について取り上げる。１つは微分方程式の階数が３以上になる一般型超幾何方程式で、もう１つは変数の数が２のアペルの超幾何微分方程式である。

1 はじめに — Clausen の公式

超幾何関数 ${}_3F_2$ は次の級数で定義される。

$$ {}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, n)(a_2, n)(a_3, n)}{(b_1, n)(b_2, n)(1, n)} x^n. $$

ガウスの超幾何関数の場合と同様に、次の方程式をみたすことが確かめられる。

$$ ({}_3E_2) \qquad \theta(\theta + b_1 - 1)(\theta + b_2 - 1)z - x(\theta + a_1)(\theta + a_2)(\theta + a_3)z = 0. $$

この講義では、1828 年に Clausen により示された次の等式を巡って話を始める。

$$ {}_3F_2(2a, a + b, 2b; a + b + \frac{1}{2}, 2a + 2b; x) = \left(F(a, b; a + b + \frac{1}{2}; x) \right)^2. $$

パラメータを制限すると、この公式から次の関係が得られる。

$$ {}_3F_2(1/2, 1/2, 1/2; 1, 1; x) = \left(F(1/4, 1/4; 1; x) \right)^2. $$

この等式の面白い点は、x を実数に限ると左辺が負にならないという点である。この事実は、かつて、単位円上の単葉関数の係数評価についての Bieberbach 予想の解決に使われたこと (de Branges, Acta Math. 1985) で有名である。

2　3階の常微分方程式 — 平面曲線

変数を x とする3階の常微分方程式を次のように書く。

$$z''' + p_1 z'' + p_2 z' + p_3 z = 0. \tag{2.1}$$

3つの線形独立な解 z^1, z^2, z^3 を取り、x-空間から $\mathbf{P}^2$ への写像を

$$x \longmapsto [z^1, z^2, z^3] \in \mathbf{P}^2$$

と定める。これは $\mathbf{P}^2$ 内の平面曲線と思える。解の取り方を変えてもそれらの組は互いに線形変換で移り合うので、この曲線は $\mathbf{P}^2$ の射影変換を除いて定まっている。逆に、平面曲線はパラメータ表示を1つ定めれば、その座標のみたす3階の常微分方程式が得られる。そこで、3階の常微分方程式は平面曲線のことであるということにする。

次に、この常微分方程式の形を簡単にすることを考えたい。先ず、2階の場合を振り返っておこう。講義「私は超幾何関数」にあるように、微分方程式

$$u'' + pu' + qu = 0$$

は未知関数 u をスカラー関数 f を使って $u = fv$ と変えると

$$v'' + \left(p + 2\frac{f'}{f}\right) v + \left(q + \frac{f'}{f}p + \frac{f''}{f}\right) v = 0$$

となる。ここで、f を $p + 2f'/f = 0$ となるように定めると、さらに

$$v'' + Qv = 0$$

と簡単化される。少し計算してみれば

$$Q = q - \frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2$$

であることがわかる。この Q とは何であろうか。今、最初の方程式の2つの独立な解を z^1, z^2 とし、$g = z^1/z^2$ としてみる。すると少々の計算により

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 \tag{2.2}$$

という式が示される。右辺は z^1 や z^2 の定め方に依っているようであるが、上の等式はそれらに依らないことを主張している。歴史的な理由により、(2.2) の右辺を g の シュバルツ微分 という。幾何的な表現をすると、Q は写像

$$x \longmapsto [z^1, z^2] \in \mathbf{P}$$

からのみ定まっているといえる。

2階の方程式を簡単化したこの手続きを、3階の場合にやってみよう。最初に $z = \lambda w$ とおく。

$$\begin{aligned} z' &= \lambda w' + \lambda' w, \\ z'' &= \lambda w'' + 2\lambda' w' + \lambda'' w, \\ z''' &= \lambda w''' + 3\lambda' w'' + 3\lambda'' w' + \lambda''' w \end{aligned}$$

より、w についての方程式は

$$\lambda w''' + (3\lambda' + p_1)w'' + (3\lambda'' + 2p_1\lambda' + p_2\lambda)w' + (\lambda''' + p_1\lambda'' + p_2\lambda' + p_3\lambda)w = 0$$

となる。ここで、λ を $3\lambda' + p_1\lambda = 0$ となるように定めると

$$w''' + P_2 w' + P_3 w = 0 \tag{2.3}$$

である。ただし、

$$P_2 = p_2 - p_1^2/3 - p_1', \quad P_3 = p_3 + 2(p_1)^3/27 - p_1p_2/3 - p_1''/3.$$

次に、変数 (x, w) を $t = f(x)$, $w = g(x)u$ により、(t, u) に変えて、方程式を書き直す。t に関する微分を "$\cdot$" と表すと、

$$\begin{aligned} w' &= g'u + gf'\dot{u} \\ w'' &= g''u + (2g'f' + gf'')\dot{u} + g(f')^2\ddot{u} \\ w''' &= g'''u + (3g''f' + 3g'f'' + gf''')\dot{u} + 3(g'(f')^2 + gf'f'')\ddot{u} + g(f')^3\dddot{u}. \end{aligned}$$

だから、2階の係数が消えるためには、

$$g'(f')^2 + gf'f'' = 0$$

が必要である。これを仮定して方程式を書き下すと

$$(f')^2\dddot{u} + (P_2 - 4\{f;t\})\dot{u} + [P_3/f' - f''P_2/(f')^2 - f'''/(f')^2 + 2(f''^2/(f')^3)']u = 0$$

となる。そこで、$\{f;x\} = P_2/4$ により f を決める。すると、

$$d^3u/dt^3 + pu = 0, \qquad p = (P_3 - P_2'/2)/(f')^3. \tag{2.4}$$

この簡単化では、2階の場合と違い、変数 x も新たに選び直している。この計算から

$$pdt^3 = (P_3 - P_2'/2)dx^3$$

であることもわかり、右辺が最初の方程式から決まっていることから、左辺の3次の微分形式が、関数 f の取り方によっていないことがわかる。しかも、シュバルツ微分の射影不変性より、パラメータ t は一次分数変換を除いて定まったことになる。一般に、多様体上の座標を一次分数変換を除いて定めることができるとき、その多様体は射影構造を持つというので、3階の常微分方程式で定められる曲線上に、上のようにして射影構造が定まったということができる。

さて、$p = 0$ となる曲線は、$d^3u/dt^3 = 0$ という方程式で表される。1, t, t^2 がその方程式の独立解であるから、取りも直さず2次曲線を表していることに注意しておこう。

以上は、平面曲線の局所的な扱いであり、特別な方程式を取り上げたものではない。以下に、幾つかの例を挙げる。

例 2.1

$$z''' + \frac{a}{x^2}z' + \frac{b}{x^3}z = 0$$

では、$P_3 - P_2'/2 = (a + b)/x^3$ であるから、この方程式が2次曲線を定めるのは $a + b = 0$ となるとき。

演習 2.2 方程式 $({}_3F_2)$ について、$p=0$ となるようにパラメータ $(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)$ を定めよ。特に、$(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)=(2a,a+b,2b;a+b+\frac{1}{2},2a+2b)$ のとき、$p=0$ となることを確かめよ。

例 2.3 (Jordan-Pochhammer 方程式)

$$Qz'''-\left(\mu Q'+R)z''+(\frac{\mu(\mu+1)}{2}Q''+(m+1)R'\right)z' \\ -\left(\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{6}Q'''+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}R''\right)z=0$$

$$Q(x)=(x-a)(x-b)(x-c). \qquad R(x)=Q(x)\left(\frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\frac{\gamma}{x-c}\right).$$

Jordan-Pochhammer 方程式は一般の階数で定義されている。上の表示は後で触れるアペルの超幾何関数 F_1 のみたす微分方程式系に付随して現れる。次の積分を解に持っていることが知られている。

$$\int (u-a)^{\alpha-1}(u-b)^{\beta-1}(u-c)^{\gamma-1}(u-x)^{\mu+2}dy$$

例 2.4 (Beukers-Peters, 1984, J. Reine Angew. Math. 351)

$$(x^4-34x^3+x^2)z'''+(6x^3-153x^2+3x)z''+(7x^2-112x+1)z'+(x-5)z=0.$$

この方程式系はある $K3$ 曲面の 1 次元族 (x がパラメータ) の周期写像のみたす方程式である。次の例でも同様であるが、周期写像はリーマン関係式と呼ばれる 2 次の関係式を満たす。そのことから、不変量 pdt^3 は消えているはずである。(実際、計算をして納得して下さい。) この方程式の独立な解の形も分かっている。$x=0$ で正則な級数解は

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \qquad a_n=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)^2\left(\begin{array}{c} n+k \\ k \end{array}\right)^2$$

で与えられる。

例 2.5 (H. Verrill, 1995, J. Math. Kyoto Univ.)

$$x(x+4)(x-12)z'''+6(x^2-7x+12)z''+\frac{7x^2-12x-96}{x+4}z'+\frac{x}{x+4}z=0.$$

これも $K3$ 曲面のある 1 次元族の周期写像を与える方程式であり、やはり $p=0$ である。

演習 2.6 いま、2 階の常微分方程式 $u''+qu=0$ があるとき、$z=u^2$ のみたす 3 階の常微分方程式が $z'''+4qz'+2q'z=0$ であることを示せ。$p=0$ であることを確かめよ。$F(a,b;a+b+1/2;x)^2$ が ${}_3E_2(2a,a+b,2b;2a+2b,a+b+1/2)$ をみたすことを確かめよ。

${}_3E_2$のパラメータについて

方程式 ${}_3E_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)$ をみて明らかなように、パラメータを組 $\{a_1,a_2,a_3\}$ と $\{b_1,b_2\}$ の中で入れ替えても変わらない。これ以外にも次ぎのような対称性がある。$x^{1-b_1}{}_3F_2(a_1+1-b_1,a_2+1-b_1,a_3+1-b_1;2-b_1,b_2+1-b_1;x)$ 及び $x^{-a_1}{}_3F_2(a_1,a_1+1-b_1,a_1+1-b_2;a_1+1-a_2,a_1+1-a_3;1/x)$ は ${}_3E_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)$ の解であるので、曲線としては ${}_3E_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)$, ${}_3E_2(a_1+1-b_1,a_2+1-b_1,a_3+1-b_1;2-b_1,b_2+1-b_1)$, ${}_3E_2(a_1,a_1+1-b_1,a_1+1-b_2;a_1+1-a_2,a_1+1-a_3)$ は同値と思ってよい。さらに、次のような変数変換の公式も知られている。

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2(a,a+\lambda,a+\mu;1-\lambda,1-\mu;x)\\
&\quad=(1-x)^{-a}{}_3F_2(a/2,(a+1)/2,1-a-\lambda-\mu;1-\lambda,1-\mu;-4x(1-x)^2).\\
&{}_3F_2(a,a+2\lambda,a+2\mu;1-\lambda,1-\mu;x)\\
&\quad=(1-4x)^{-a}{}_3F_2(a/3,(a+1)/3,(a+2)/3;1-\lambda,1-\mu;-27x(1-4x)^{-3}).\\
&{}_3F_2(4a,4a+1/3,4a+\lambda/3;1/3,2/3;x)\\
&\quad=(1-x)^{-3a}{}_3F_2(a,a+1/3,a+\lambda/3;1/3,2/3;x(x+8)^3(x-1)^{-3}/64).
\end{aligned}
$$

それぞれ F. Whipple(1927), W. Baily(1929), M. Kato(2006) の公式である。(ガウスの超幾何関数や ${}_3F_2$, その一般化である ${}_{p+1}F_p$ などの特殊値や上記のような変換公式には沢山の文献があるので、「予備講義」の参考文献の文献表から検索して下さい。)

双対曲線について

平面曲線の各点 $z(x)\in\mathbf{P}^2$ に対して、その接線は $z(x)$ と $z'(x)$ の一次結合で表される。それを外積を用いて $Z(x)=z\wedge z'$ で表現する。$\mathbf{P}^2\wedge\mathbf{P}^2$ は $\mathbf{P}^2$ の双対空間とよばれるが、$\mathbf{P}^2$ と同一視して構わない。Z の描く曲線を z の双対曲線という。Z も３階の常微分方程式をみたす。(2.1) に対しては

$$Z'''+2p_1Z''+(p_1'+p_1^2+p_2)Z'+(p_2'+p_1p_2-p_3)Z=0$$

である。これを２階微分の係数が消える形に直すと

$$Z'''+(p_2-p_1'-p_1^2/3)Z'+(p_2'-2p_1''/3-p_3-2p_1^3/27+p_1p_2/3-2p_1p_1'/3)Z=0$$

となっている。これから特に、不変量は $-pdt^3$ に一致することが計算によってわかる。すなわち、双対曲線の不変量は元の曲線の不変量の符号を変えたものである。特に、「$p=0\longleftrightarrow z$ と Z が射影同値」ということになる。

演習 2.7 ${}_3E_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)$ の双対方程式は ${}_3E_2(1-a_1,1-a_2,1-a_3;2-b_1,2-b_1)$ に等しいことを示せ。

３次曲線

この節の最後に、平面曲線が３次曲線になる条件を不変量 p を使って表すことができることを述べる。方程式 (2.1) に対して

$$
\begin{aligned}
S=21(15pp'''-20p'p''-567p^3)(20p'p''-15pp'''+63p^3)\\
+100(6pp''-7p'^2)(7pp''''-12p''^2-882p^2p')
\end{aligned}
$$

とおく。このとき、Sdt^{15} は方程式の形によらない不変量となっている。「$S=0\longleftrightarrow$ ３次曲線」が知られている。(証明には [Wil] を参照)。

例 2.8 方程式 ${}_3E_2(1/9, 4/9, 7/9; 2/3, 7/6)$ は $S = 0$ となる例である。実際、

$$z_1 = {}_3F_2(1/9, 4/9, 7/9; 2/3, 7/6; x), \quad z_2 = x^{1/3}{}_3F_2(4/9, 7/9, 10/9; 4/3, 3/2; x),$$

$$z_3 = x^{-1/6}{}_3F_2(-1/18, 5/18, 11/18; 5/6, 1/2; x)$$

とおくと、$(z_1)^3 - z_2(z_3)^2 - (z_2)^3/729 = 0$ を満たしていることがわかる。

演習 2.9 方程式 ${}_3E_2$ について、$S = 0$ となる場合を全て求めよ。この計算のためには、S の表示を方程式 (2.3) について求める必要がある。実際次ぎのように表される。

$$\begin{aligned} S \;=\; & 16800AA_2A_4 + 50400A_3A_1A_2 + 113400AA_3A_1Q - 36400A_1^2QA_2 - 6300A^2A_1QQ_1 \\ & -184800AQ_1A_1A_2 - 18900AA_3^2 + 793800A^3A_3 - 42525A^3Q_1^2 - 1190700A^4Q_1 \\ & -129600A^3Q^3 + 2469600AA_1^3 + 56700A^2A_3Q_1 - 270900AA_1^2Q^2 + 793800A^3A_1Q \\ & -3175200A^2A_1A_2 - 55200AA_2^2Q + 234000A^2A_2Q^2 - 25200A^2A_2Q_2 \\ & -25200A^2QA_4 + 37800A^3QQ_2 - 19600A_1^2A_4 + 127400A_1^3Q_1 + 29400AA_1^2Q_2 \\ & -3000564A^5 - 28800A_2^3, \end{aligned}$$

ただし、$Q = P_2$, $Q_1 = Q'$, $Q_2 = Q''$, $A = P_3 - P_2'/2$, $A_1 = A'$, $A_2 = A''$, $A_3 = A'''$, $A_4 = A''''$.

3　4階の常微分方程式の不変量

3階で計算した方法を4階の常微分方程式

$$z'''' + p_1z''' + p_2z'' + p_3z' + p_4z = 0$$

に適用してみよう。今度は、独立な解 z^1, z^2, z^3, z^4 に対して写像

$$z : (t) \longrightarrow [z^1(t), z^2(t), z^3(t), z^4(t)] \in \mathbf{P}^3$$

によって、空間曲線が定まるので、空間曲線の不変量を求めることと同じである。結果は、新しい未知関数 u と適当な変数 t について

$$\ddddot{u} + 4r_3(t)\dot{z} + r_4(t)z = 0$$

の形に直すことができる。その計算は3階よりはややこしい。これからわかることをまとめると次のようになる。

- 径数 t は一次分数変換を除き、一意的に定まる。
- r_3dt^3 と $(r_4 - 2\dot{r}_3)dt^4$ は表現によらない不変量である。

不変量 r_3dt^3 の幾何的意味は次の通り。3階の場合と同じように直線 $\ell(t) = u \wedge \dot{u}$ を考える。今度は $\mathbf{P}^3 \wedge \mathbf{P}^3 \equiv \mathbf{P}^5$ の点を定める。直線を $\mathbf{P}^5$ の点で径数化することを Plücker 埋め込みといい、その全体は $\mathbf{P}^5$ の2次曲面 (Q_4 と書く) になる。今の場合、空間曲線の各点が Q_4 の各点を定めている。それは一般に Q_4 内の曲線となるが、「$r_3 = 0 \longleftrightarrow \ell(t)$ がある超平面に含まれる」ということが示される。そのためには、ℓ が5階の常微分方程式をみたすことと $r_3 = 0$ が同値であることを示せばよく、それは読者にまかせる。

例 3.1 (Batyrev-van Straten, 1995, Comm. Math. Phys. 168)　$\theta = xd/dx$

$$\theta^4 - 3x(27\theta^4 + 54\theta^3 + 56\theta^2 + 29\theta + 6) + 81x^2(\theta+1)^2(27\theta^2 + 54\theta + 40)$$
$$-2187x^2(3\theta+5)(3\theta+4)(\theta+2)(\theta+1) = 0$$

$$(1-216x)(1+27x)\theta^4 - 54x(7+432x)\theta^3 - 3x(10584x+95)\theta^2$$
$$-48x(351x+2)\theta - (12x + 2880x^3) = 0.$$

最初の例では、$r_3 = r_4 = 0$。後の例では $r_3 = 0$ and $r_4 \neq 0$。

例 3.2 ${}_4E_3(1/2, 1/2, 1/2, 1/2; 1, 1, 1)$ について、$r_3 = 0$。

4　歴史

これまで述べた一般論は E.J. Wilczynski (1876–1932) による [Wil] に詳しい。Wilczynski は Lazarus Fuchs のもとで 1897 年に学位 (ベルリン大学) を取り、California 大学 (1898–1907), Illinois 大学 (–1910), Chicago 大学 (–1926) に勤めた。彼の方法は射影微分幾何という分野を生み、E. P. Lane の追悼記事 (Bull AMS 1933, 7–14) に次のように書かれている。

Wilczynski's method

- consists in associating with each configuration to be studied a certain completely integrable system of linear homogenous differential equations,
- next determines the most general transformation of dependent and independent variables that does not disturb the configuration,
- then carries out this transformation on the system of equations and calculates complete systems of invariants and covariants,
- interprets these geometrically, and studies the configurations by means of them.

常微分方程式 (の解) を射影空間内の曲線とみなして、その不変量を求めることは、最初は Halphen(1878) による。[Hal] 参照：とても分かりやすい論文である。その後、Laguerre(1879), Brioschi(1879), Forsyth(1888) と続いていて、これらを総称して Laguerre-Forsyth の理論とよんでいる。

ここで述べた方法を一般の階数の場合にそのまま延長することは得策ではない。射影空間内の曲線論の背景にあるものは射影構造とリー環 $\mathfrak{sl}$ であり、それらをまとめた論文として 背足 [Sea] が推奨できる。

少し一般的ないい方をすると、Wilczynski の方法は次の図式で表される。

$M^n \ni x \longrightarrow f(x) \in \mathbf{P}^N$　部分多様体 (を定義する写像)

$\Longleftrightarrow$ f のみたす微分方程式系

$\Longrightarrow$ 方程式系の係数と写像の関係式

方程式系から眺めるとき、写像 f をシュバルツ写像といい、係数と写像の関係を表す表現 (係数の微分多項式で表される) をシュバルツ微分という。

5 アペルの超幾何関数と超幾何微分方程式系

次の級数で定義される関数をアペルの超幾何関数という。

$$
\begin{aligned}
F_1(a,b,b';c;x,y) &= \sum_{m=0,n=0}^{\infty,\infty} \frac{(a,m+n)(b,m)(b',n)}{(c,m+n)m!n!}x^m y^n \\
F_2(a,b,b';c,c';x,y) &= \sum_{m=0,n=0}^{\infty,\infty} \frac{(a,m+n)(b,m)(b',n)}{(c,m)(c',n)m!n!}x^m y^n \\
F_3(a,a',b,b';c;x,y) &= \sum_{m=0,n=0}^{\infty,\infty} \frac{(a,m)(a',n)(b,m)(b',n)}{(c,m+n)m!n!}x^m y^n \\
F_4(a,b;c,c';x,y) &= \sum_{m=0,n=0}^{\infty,\infty} \frac{(a,m+n)(b,m+n)}{(c,m)(c',n)m!n!}x^m y^n
\end{aligned}
$$

それぞれ原点の周りで収束し、記号で示したように F_1, F_2, F_3, F_4 と呼ばれている。いずれも

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= \ell z_{xy} + a z_x + b z_y + p z, \\
z_{yy} &= m z_{xy} + c z_x + d z_y + q z,
\end{aligned}
$$

の形の微分方程式をみたし、それぞれの係数は次表で与えられる。

	ℓ	a	b	p
	m	c	d	q
F_1	$\frac{-y}{x}$	$\frac{(a+b+1)x-c}{x(1-x)}$	$\frac{by}{x(1-x)}$	$\frac{ab}{x(1-x)}$
	$\frac{-x}{y}$	$\frac{(a+b'+1)y-c}{y(1-y)}$	$\frac{b'x}{y(1-y)}$	$\frac{ab'}{y(1-y)}$
F_2	$\frac{y}{1-x}$	$\frac{(a+b+1)x-c}{x(1-x)}$	$\frac{by}{x(1-x)}$	$\frac{ab}{x(1-x)}$
	$\frac{x}{1-y}$	$\frac{b'x}{y(1-y)}$	$\frac{(a+b'+1)y-c'}{y(1-y)}$	$\frac{ab'}{y(1-y)}$
F_3	$\frac{-y}{x(1-x)}$	$\frac{(a+b+1)x-c}{x(1-x)}$	0	$\frac{ab}{x(1-x)}$
	$\frac{-x}{y(1-y)}$	0	$\frac{(a'+b'+1)y-c}{y(1-y)}$	$\frac{a'b'}{y(1-y)}$
F_4	$\frac{2y}{1-x-y}$	$\frac{(a+b+1)x-c(1-y)}{x(1-x-y)}$	$\frac{(a+b+1)y-c'y}{x(1-x-y)}$	$\frac{ab}{x(1-x-y)}$
	$\frac{2x}{1-x-y}$	$\frac{(a+b+1)x-cx}{y(1-x-y)}$	$\frac{(a+b+1)y-c'(1-x)}{y(1-x-y)}$	$\frac{ab}{y(1-x-y)}$

6 微分方程式系 $z_{xx} = \ell z_{xy} + a z_x + b z_y + p z$, $z_{yy} = m z_{xy} + c z_x + d z_y + q z$ の不変量

この方程式系の特徴的な量を取り出すため、３階微分を計算してみよう。すると、

$$
\begin{aligned}
(1-\ell m) z_{xxy} &= \{\ell_y + a + bm + \ell(m_x + d + c\ell)\} z_{xy} + \{a_x + bc + \ell(c_x + ca) + \ell q\} z_x \\
&\quad + \{b_y + bd + \ell(d_x + bc) + p\} z_y + \{p_y + bq + \ell(q_x + cp)\} z
\end{aligned}
$$

という表示が得られる。z_{xyy} についても同様。アペルの超幾何関数の場合には F_1 については $1-\ell m=0$ となるが、その他については $1-\ell m\neq 0$ となっている。そこで、

$$\varphi_2=\ell dx^2+2dxdy+mdy^2$$

と置く。これが関数倍を除いて (方程式系の形によらず) 定まることは、次のようにして納得できる。$1-\ell m\neq 0$ とすると独立な解の個数は高々 4 となるので、いま、それらを z^1, z^2, z^3, z^4 とする。写像

$$(x,y)\longmapsto[z^1,z^2,z^3,z^4]\in\mathbf{P}^3$$

は $\mathbf{P}^3$ 内の曲面を定める。一方、曲面の第２基本形式は、射影変換で不変な曲面に固有の量であることがわかるので、それを求めてみると φ_2 のスカラー関数倍になっていることがわかる。すなわち、φ_2 は曲面の共形構造を定め、曲面を表示する微分方程式の形にはよらないものである。F_1 については、この形式は退化していて、独立な解は高々３である (実際３に等しい)。

次に、２次元の共形構造にはいつも $\varphi_2=2dxdy$ となる座標が取れるので、方程式系は

$$z_{xx}=az_x+bz_y+pz,\quad z_{yy}=cz_x+dz_y+qz$$

とあるとして構わない。もちろん、このような座標 (x,y) を具体的に求めることは一般には難しい。ここで、次のような計算をしてみよう。上の３階の微分の式から

$$\begin{aligned}z_{xxy}&=az_{xy}+(a_x+bc)z_x+(b_y+bd)z_y+(p_y+bq)z,\\ z_{xyy}&=dz_{xy}+(d_y+bc)z_y+(c_x+ac)z_x+(q_x+cp)z.\end{aligned}$$

これをもう一度微分すると、第１式から

$$\begin{aligned}z_{xxyy}&\equiv az_{xyy}+a_yz_{xy}+(a_x+bc)z_{xy}+(b_y+bd)z_{yy}\pmod{z_x,z_y,z}\\ &\equiv(ad+a_y)z_{xy}\pmod{z_x,z_y,z}\end{aligned}$$

同様に、第２式から

$$z_{xxyy}\equiv(ad+d_x)z_{xy}\pmod{z_x,z_y,z}$$

が得られる。したがって、$a_y=d_x$ が (4 つの独立な解があるためには) 必要である。すると、未知変数に適当な関数をかければ、方程式系は

$$z_{xx}=bz_y+pz,\quad z_{yy}=dz_y+qz$$

の形に直せることがわかる。このようにして、

$$\varphi_3=bdx^3+cdy^3$$

を定義する。この３次微分式が初めの方程式系及び対応する曲面から自然に定まっている。このことは、曲面論にたち戻るか、または、上記の変換を細かく追ってみることでわかるが、ここでは省略する。ただ、$\varphi_3=0$ の場合を考えてみよう。上記の表現では $b=c=0$ であり、方程式系は $z_{xx}=pz$, $z_{yy}=qz$ とさらに簡単化される。p が x のみの関数、q が y のみの関数であることはすぐわかるので、単独の方程式の独立な解をそれぞれ $z_1(x)$, $z_2(x)$ および $w_1(y)$, $w_2(y)$ としてみれば、連立の方程式の解は z_1w_1, z_2w_1, z_1w_2, z_2w_2 となり、対応する曲面は写像 $(x,y)\mapsto[z_1w_1,z_2w_1,z_1w_2,z_2w_2]$ の像であるから、２次曲面であることがわかる。実際、φ_3 は２次曲面からのずれを量る不変量である。

例 6.1 F_4 の方程式系の座標を $(x,y)=(u(1-v),v(1-u))$ により、(u,v) に変えると方程式系は次のように表示される。

$$
\begin{aligned}
z_{uu} &= -\frac{ev(1-v)}{u(1-u)(1-u-v)}z_v + pz,\\
z_{vv} &= -\frac{eu(1-u)}{v(1-v)(1-u-v)}z_u + qz,\\
p &= p_0 + \frac{e_1}{u(1-u)} + \frac{e_2}{u^2} + \frac{e_3}{(1-u)^2}, \qquad q = q_0 + \frac{e_1}{v(1-v)} + \frac{e_3}{v^2} + \frac{e_2}{(1-v)^2},\\
p_0 &= \frac{e}{2(1-u-v)^2} + \frac{e^2}{4}\left(\frac{2}{u(1-v)} + \frac{2}{v(1-u)} - \frac{2(1-2v)}{v(1-v)(1-u-v)} + \frac{3}{(1-u-v)^2}\right),\\
q_0 &= \frac{e}{2(1-u-v)^2} + \frac{e^2}{4}\left(\frac{2}{u(1-v)} + \frac{2}{v(1-u)} - \frac{2(1-2u)}{u(1-u)(1-u-v)} + \frac{3}{(1-u-v)^2}\right).
\end{aligned}
$$

ここで、$e=c+c'-a-b-1$、$e_1=(2ab-cc'+(a+b+1)e)/2$, $e_2=c(-2+c)/4$, $e_3=c'(-2+c')/4$ である。特に特徴的なことは、３次微分式 φ_3 は e のみによっていることがわかり、同時に、微分方程式は φ_2 と φ_3 だけからは定まっていないことを示している。このような性質は曲面が (射影微分幾何の意味で) 射影展開曲面になるという性質を表している。

7　ガウス関係式

ガウスの超幾何関数 $F(a,b,c;x)$ は x の関数であると同時にパラメータ (a,b,c) によっている。講義「A 超幾何関数入門」で、次の関係式が使われた。

$$
\begin{aligned}
(\theta+a)F(a,b,c;x) &= aF(a+1,b,c;x)\\
(\theta+b)F(a,b,c;x) &= bF(a+1,b+1,c;x)\\
(\theta+c-1)F(a,b,c;x) &= (c-1)F(a,b,c-1;x)
\end{aligned}
$$

これからすぐに

$$
cF(a,b,c) - aF(a+1,b,c+1) - (c-a)F(a,b,c+1) = 0
$$

がわかる。ガウスの論文 [Gauss] には、$\{F(a,b,c;x)|a,b,c\}$ がパラメータについてみたすこのような方程式が 15 ほど挙げられている。それらをガウス関係式という。ガウスの超幾何関数から様々の直交多項式系が得られ、それらのみたす差分方程式はガウス関係式から得られる。

演習 7.1 次の差分方程式が成り立つことを示せ。

$$
\begin{aligned}
&a(c-b)(1-a+b)F(a+1,b-1;c;x) - b(c-a)(1-b+a)F(a-1,b+1;c;x)\\
&\qquad = (a-b)\{c-ca-cb+2ab-(1-a+b)(1-b+a)x\}F(a,b,;c;x).
\end{aligned}
$$

もっと一般に、ガウスの関係式やアペルの超幾何関数について成り立つパラメータについての差分関係式全体をわかりやすく記述せよ。

F_2, F_3, F_4 については、曲面を表すベクトルを z とすると、z, z_x, z_y と z_{xy} は独立である。そこで F_3 を取り上げ、パラメータの組を便宜的に $\alpha = (a, a', b, b', c)$ とかき、別のパラメータの組を α' とすると、 $F_3(\alpha')$ は $F_3(\alpha)$, $F_{3x}(\alpha)$, $F_{3y}(\alpha)$ と $F_{3xy}(\alpha)$ を用いてかけるはずである。例えば、

$$(c-a-a'-1)F_3(a, a', b, b', c-1; x, y) = (x\partial/\partial x + y\partial/\partial y + c - 1)\gamma F_3(a, a', b, b', c; x, y)$$

ただし、γ はパラメータで定まるガンマ因数を表す。この微分をも含んだ関係式は隣接関係式と呼ばれている。また、異なる 5 つのパラメータをもってくると、対応する 5 つの関数の間には有理多項式を係数とした関係式が成立し、これを一般のガウス関係式と言う。

8 曲面の変換

隣接関係式は $F_3(\alpha)$ の定める曲面と $F_3(\alpha')$ の定める曲面の関係を与えている。上記の例では曲面 $F_3(\alpha')$ の各点は曲面 $F_3(\alpha)$ の対応する点の接平面上にあるということができる。このような対応を接線叢という。

接線叢の典型的な例を次のようにしてつくることができる。曲面を定める微分方程式の係数の間に

$$b_{yyy} = 4b_y q + 2bq_y + 2b_y c_x + bc_{xy}, \quad c_{xxx} = 4c_x p + 2cp_x + 2b_y c_x + cb_{xy}$$

という関係があるときに、曲面は射影極小であるといわれる。方程式系を

$$z_{xx} = bz_y + (\sigma - \frac{1}{2}b_y)z, \quad z_{yy} = cz_x + (\tau - \frac{1}{2}c_x)z$$

と表すとき、定数 λ ($\lambda \neq 1$) を使って変形した方程式系

$$\bar{z}_{xx} = \lambda b\bar{z}_y + (\sigma - \frac{\lambda}{2}b_y)\bar{z}, \quad \bar{z}_{yy} = \frac{1}{\lambda}c\bar{z}_x + (\tau - \frac{1}{2\lambda}c_x)\bar{z}$$

も 4 つの解をもつ。この方程式系の 2 つの独立な解を φ、ψ とし、

$$A = -\lambda(\psi\varphi_y - \varphi\psi_y), \quad B = \psi\varphi_x - \varphi\psi_x$$

とおく。すると、新たに曲面 w を $w = -(A_x + B_y)/2\ z + Az_x + Bz_y$ によって定めると、また、射影極小曲面が得られる。

以上、2 変数で 4 階の方程式系が定める曲面について述べた。このような対象については ダルブーの著書や解説記事 [Sa3] を参照して頂きたい。

文献について：ガウスの超幾何関数はやはり [Gauss] が一番。アペルの超幾何関数と直交多項式については P. Appell and J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Gauthier-Villars, 1926 を始め、多数の文献がある。「予備講義」に記載の本から参照して欲しい。常微分方程式を曲線と考えることについては [Hal], [Fan], [Sea]。曲面と方程式系については [Wil], [SY1], [Sa2], [SYY], [Sa3] を挙げる。シュバルツ微分については [SY2] を参照。

References

[Fan] G. Fano, Über lieare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen, Math. Ann. 53(1900), 493–590.

[Gauss] C. F. Gauss, Disquitiones generales circa seriem infinita

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+etc.,$$

in Werke von C. F. Gauss III, Georg Olms Verlag, 1973, Hildesheim, New York, pp. 123–162, 207–229.

[Hal] G. H. Halphen, Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre, Acta Math. 3(1883), 325–380.

[Sea] Y. Seashi, A geometric construction of Laguerre-Forsyth's canonical forms of linear ordinary differential equations, Advanced Studies in Pure Mathematics 22(1993), 265–297.

[Sa1] T. Sasaki, Contiguity relations of Aomoto-Gel'fand hypergeometric functions and applications to Appell's system F_3 and Goursat's system ${}_3F_2$, SIAM J. Math. Anal. 22(1991), 821–846.

[Sa2] T. Sasaki, Projective surfaces defined by Appell's hypergeometric systems E_4 and E_2, Kyushu J. Math. 55(2001), 329–350.

[Sa3] T. Sasaki, Line congruence and transformation of projective surfaces, Kyushu J. Math. 60(2006), 101–243.

[SY1] T. Sasaki and M. Yoshida, Linear differential equations in two variables of rank four. I, Math. Ann. 282(1988), 69–93.

[SY2] T. Sasaki and M. Yoshida, Schwarzian derivatives and uniformization, CRM Proceedins and Lecture Notes 32(2002), 271–286.

[SYY] T. Sasaki, K. Yamaguchi and M. Yoshida, On the rigidity of differential systems modelled on Hermitian symmetric spaces and disproofs of a conjecture concerning modular interpretation of configuration spaces, Adv. St. Pure Math. 25(1997), 318–354.

[Wil] E.J. Wilczynski, Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces, Teubner 1906; reprinted by Chelsea Publ. Co.