HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	3次元Navier Stokes方程式に対するある一次元モデル方程式の解の爆発について
Author(s)	坂上, 貴之
Citation	数理解析研究所講究録, 1313, 1-14
Issue Date	2003-04
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/14833
Type	article (author version)
File Information	s1313.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

3次元Navier Stokes方程式に対するある一次元モデル方程式の解の爆発について
On blow-up solutions of an one-dimensional model equation for the 3-D Navier Stokes equations

坂上 貴之 (Takashi SAKAJO)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Graduate school of mathematics, Nagoya University

1 はじめに

Navier-Stokes 方程式は極めて広範囲の流体現象を記述するモデル方程式であることが, その特殊な場合の数学解析や直接数値計算などによって知られている. しかしながら, モデルとしての妥当性を示す数学的基本要請：解の存在・一意性それに解の適切性に対しては完全な答えは得られていない. 特に3次元空間における方程式に対して, この問いに答えることは応用数学上きわめて重要であるにもかかわらず, その難しさのために, 現在もなお未解決のままである. 我々はこの問題の解決へと少しでも近付くため, あるモデル方程式を考える.

まず, 粘性のない流体を考える. この時, 3次元非粘性・非圧縮の流体の運動は次の渦度方程式で記述される.

$$\frac{Dw}{Dt} = w \cdot \nabla v, \quad x \in \mathbf{R^3},\ t > 0.$$

ただし, $\frac{D}{Dt}$ は物質微分, w は渦度場 そして v は速度場を表すものとする. この渦度場と速度場は $w = \nabla \times v$ なる関係を持ち (これが渦度という物理量の定義である.), また流れの非圧縮性条件 div $v = 0$ があるので, 速度場は渦度場から次の Biot-Savar 積分によって与えられる.

$$v(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \times w(y,t)dy.$$

この関係式のおけげで, 上の方程式は w について閉じた方程式となっている. ここで非線形項 $w \cdot \nabla v$ について考察すると, 渦度 w は行列 ∇v の反対称成分の0空

間となっているので, $w \cdot \nabla v$ は ∇v の対称成分 $D = (\nabla v +^t \nabla v)$ を用いて, $D(w)w$ と表すことができる. 空間が二次元の場合この非線形項は常に 0 となり, このことから 2 次元における渦度方程式の解の存在や適切性が保証される. 一方で, 空間次元が 3 の場合, 非線形項は常に 0 とはならず, 渦度は時間とともに変化し, 2 次元の場合のように解の適切性が保証できない. すなわち, この非線形項の性質を理解することが現在未解決の問題への一つのアプローチとして重要である. これに対し, Constantine と Lax と Majda の 3 人の数学者はこの w に作用する作用素 D が線形の特異積分作用素であること, それに w と単位球内の空間平均が 0 となるような 3 次の積分核との合成積によって与えられていることの一次元へのアナロジーから, 次の積分作用素 (Hilbert 変換)H を作用素 D の一次元モデルとして与えた.

$$H(w) = \frac{1}{\pi} \int \frac{w(y)}{(x-y)} dy.$$

つまり, 3 次元空間における非線形項 $D(w)w$ の性質を調べるために, 一次元の非線形項 $H(w)w$ をモデルとして調べようというわけである. こうして, 3 次元 Euler 方程式の一次元モデル方程式として一次元関数 $\omega(x,t)$ に対する次の方程式を考えることができる.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega H(\omega), \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

この方程式を Constantine-Lax-Majda 方程式 (以後, CLM 方程式) と呼ぶことにする. この方程式は粘性のない 3 次元 Euler 方程式の解を定性的に記述する方程式として成功を収めた [2].

さて, 次は粘性のある流れの方程式, すなわち 3 次元 Navier-Stokes 方程式のモデル方程式を考える. まず最初に考え付くのは Navier-Stokes 方程式の粘性項の類推により,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega H(\omega) + \nu \Delta \omega, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

であろう. $\nu \in \mathbf{R}$ は粘性係数である. Schchet[7] はこの方程式を考え, 小さな ν に対して, 有限時間でその最大値が無限大に発散するような厳密解を与えた. このことから, このモデル方程式は非適切であることがわかる. しかしながら, この解が元の CLM 方程式の解よりも早く発散するなど, いくつかの現実の Navier-Stokes 方程式の解の性質とは一致しない性質があり, モデルとしては CLM 方程式ほどうまくいかなかった.

次に Murthey[4] や Wergert[8] らは, ある物理的な考察から以下のような粘性項を持つ方程式をモデルとして考えた.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega H(\omega) + \nu H(\omega_x), \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

これに対して, Schochet の時に発見された幾つかの問題点を解消する厳密解を構成したが, すべてがうまく解決されたわけではない.

このように, どのような粘性項をつけるのが 3 次元 Navier-Stokes 方程式のモデルとして妥当かどうかは未知のままである. そこで, 我々は次の一般化された粘性項を持つ方程式を考えて, その方程式の持つ基本的な性質を調べることにする.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega \mathrm{H}(\omega) - \nu(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\omega, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0, \tag{1}$$

ただし, $\alpha \in \mathbf{R}$ である.

このレポートの目的は, 次の事実を示すことにある.

> どんな α に対しても, ある ν_0 が存在して, $0 < \nu < \nu_0$ に対して, 一般化された粘性項を持つ CLM 方程式の解は有限時間で, その L^2 ノルム (あるいは最大値) が爆発する.

第 2 章ではこの方程式をスペクトル法により無限次元の常微分方程式系に変換し, その形式的な解を構成する. 第 3 章では, そのフーリエ係数がすべて非負となるような初期値に対する爆発に関する定理とその証明の概要を示す. 第 4 章ではそれ以外のいくつかの初期値に対する解の爆発の様子を数値計算により示す.

2 スペクトル法による定式化

ここでは, 境界条件として周期境界条件 $\omega(x+2\pi, t) = \omega(x, t)$ を課す. この時, 解は次の形に書ける.

$$\omega(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad \omega_n(t) \in \mathbf{C}. \tag{2}$$

この時, ω の Hilbert 変換は次で与えられる [5].

$$\mathrm{H}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\ \mathrm{sgn}(n)\omega_n(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

ここで, $\mathrm{sgn}(n)$ は符合関数で, 次で与えられている.

$$\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n > 0, \\ 0 & \text{if } n = 0, \\ -1 & \text{if } n < 0. \end{cases}$$

この時, 簡単な計算から二次の非線形項 $H(\omega)\omega$ は次で与えられる.

$$\omega \mathrm{H}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\mathrm{i} \sum_{k=0}^{n} \omega_k \omega_{n-k} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \left(\mathrm{i} \sum_{k=0}^{n} \omega_{-k} \omega_{-n+k} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \right\}. \tag{3}$$

この (2) と (3) を (1) に代入して, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ の各係数を比較すると, 次のフーリエ係数に対する無限次元常微分方程式を得る.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\omega_n}{\mathrm{d}t} &= -\nu n^\alpha \omega_n + \mathrm{i}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \omega_k \omega_{n-k}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega_0}{\mathrm{d}t} &= -\nu\omega_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega_{-n}}{\mathrm{d}t} &= -\nu|n|^\alpha \omega_{-n} - \mathrm{i}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \omega_{-k}\omega_{-n+k}. \end{cases} \tag{4}$$

ここで, ω の初期値として次の原点対称なものを考える.

$$\omega(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin nx.$$

すると, 方程式 (4) より, この解は全ての時間に対して原点対称であることがわかる. すなわち, すべての $t > 0$ に対して, $\omega_n(t) + \omega_{-n}(t) = 0$. したがって, $\omega_0(t) \equiv 0$ である.

さて, 本来は複素数値関数として導入した $\omega_n(t)$ ではあるが, 解に原点対称性を付け加えたことによって, $\mathrm{i}\omega_n(t)$ は実数値関数となるので, 以後この実数値関数を $p_n(t)$ とおく. こうして, 以後は我々は以後次の $\{p_n(t)\}_{n\geq 1}$ に対する方程式を考えるだけでよい.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} &= -\nu n^\alpha p_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_k p_{n-k}, \quad n = 1, 2, \cdots, \\ p_n(0) &= \frac{A_n}{2}. \end{aligned}$$

この常微分方程式の解は次のように与えられる.

$$p_1(t) = \frac{A_1}{2}\mathrm{e}^{-\nu t}, \tag{5}$$

$$p_n(t) = \frac{A_n}{2}\mathrm{e}^{-n^\alpha \nu t} + \mathrm{e}^{-n^\alpha \nu t}\int_0^t \mathrm{e}^{n^\alpha \nu s} \sum_{k=1}^{n-1} p_k(s) p_{n-k}(s) ds. \tag{6}$$

この時, 元の偏微分方程式の解は次の和で形式的に与えられることに注意する.

$$\omega(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2p_n(t) \sin nx.$$

3 非負のフーリエ係数を持つ初期値に対する解の爆発

この章では, 初期値のフーリエ係数が全て非負である場合 $A_n \geq 0$ を考える. 証明の手順として, まず, 初期値に対する比較定理を示す. 初期値 $\{A_n\}$ に対する解を $p_n(t; A_n)$ と表すことにして, 次の命題を得る.

Proposition 1 (比較定理) すべてのnに対して, $A_n \geq \tilde{A}_n > 0$ ならば$p_n(t; A_n) \geq p_n(t; \tilde{A}_n) > 0$

証明は数学的帰納法によって簡単にできる.

次に特別な初期値 $A_n = A\delta_{1n}$ に対する解を構成して, 上の比較定理を用いて一般の初期値に対する解の爆発を示す. 特別な初期値に対する解を α を三つの場合に分けて, それぞれ評価する. なお, 以下の議論では $A_1 \neq 0$ を仮定して証明をしているが, これで一般性を失うことはない. というのも, もし $A_1 = 0$ ならば, 初めて $A_k \neq 0$ となる k に対して, 同様の定理を同様の方法で示すことができるからである.

3.1 微分作用素のベキが $\alpha = 1$ の場合

この場合には解は陽的に表すことができる.

Proposition 2 作用素のベキが $\alpha = 1$, そして初期値が $A_n = A\delta_{1n}$ の時, 方程式 *(5)* と *(6)* の解は

$$p_n(t; A\delta_{1n}) = \frac{1}{t}\left(\frac{A_t}{2}e^{-\nu t}\right)^n.$$

で与えられる.

この事実も数学的帰納法により簡単に示すことができる.

この命題と比較定理から, 一般の初期値 $\{A_n \geq 0\}$ に対する, ＣＬＭ方程式の解の L^2 ノルムが発散するが言える. すなわち

$$\begin{aligned} ||\omega(x,t)||^2_{L^2[-\pi,\pi)} &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \{2p_n(t; A_n)\}^2 \\ &\geq \pi \sum_{n=1}^{\infty} \{2p_n(t; A_1\delta_{1n})\}^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_1 \mathrm{e}^{-\nu t} \left(\frac{A_1 t}{2}\mathrm{e}^{-\nu t}\right)^{n-1} \right\}^2. \end{aligned}$$

関数 $r(t)$ を $\frac{A_1 t}{2}\mathrm{e}^{-\nu t}$ と定義しておくと, $|r(t)| < 1$ の時, 上の式の最後の無限和は収束して $\pi\frac{A_1^2 \mathrm{e}^{-2\nu t}}{1-r^2(t)}$ となる. 一方, 関数 $r(t)$ の最大値は $t = \frac{1}{\nu}$ で $\frac{A_1}{2\nu \mathrm{e}}$ となるので, もし $0 < \nu \leq \frac{A_1}{2\mathrm{e}}$ ならば, ある有限な時刻 $T_1^*(\nu) > 0$ が存在して, $r\left(T_1^*(\nu)\right) = 1$ となる. このことから次のことが言える.

Theorem 3 今, $\alpha = 1$ の時, $0 < \nu \leq \frac{A_1}{2e}$ なる ν に対して, ある有限時刻 $T_1^*(\nu)$ が存在して $||\omega(x,t)||_{L^2} \to \infty$, $t \to T_1^*(\nu)$ となる.

この定理は, 一般化粘性項を持つＣＬＭ方程式の解の L^2 ノルムが有限時間で発散することを示しているのだが, 同時に最大値の発散も示している. というのも $M(t) = \sup_{x\in[-\pi,\pi)} |\omega(x,t)|$ とおくと

$$||\omega(x,t)||^2_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} |\omega(x,t)|^2 dx < 2\pi M^2(t).$$

が成り立つからである.

3.2 微分作用素のベキが $\alpha > 1$ の場合

ここでは, $\alpha > 1$ の場合について考える. 示す定理は次のようなものである.

Theorem 4 $\alpha > 1$ とする. この時, $0 < \nu \leq \frac{A_1}{2} e^{-3\alpha-1}$ なる ν に対して, ある有限時間 $T_2^*(\nu)$ が存在して $||\omega(x,t)||_{L^2} \to \infty$, $t \to T_2^*(\nu)$ となる.

証明の第一ステップは次のような数列 $\left\{b_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geq 1}$ を定義して, その下からの評価を与えることである.

$$b_1^{(\alpha)} = 1, \qquad b_n^{(\alpha)} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(\alpha)} b_{n-k}^{(\alpha)} \quad \text{for} \;\; n = 2, 3, \cdots.$$

この時, 次が示される.

Lemma 5 $\alpha > 1$ に対して, D_α を $\alpha 2^{3\alpha} < D_\alpha \leq e^{3\alpha}$ なる定数とする. この時, 数列 $b_n^{(\alpha)}$ は次のように下から押えられる.

$$e^{-3\alpha n} < D_\alpha n^{\alpha-1} e^{-3\alpha n} < b_n^{(\alpha)}.$$

証明は帰納法であるが, やや複雑な不等式を示さねばならない. 証明は [6] を参照のこと.

証明の第二ステップは, 解 $p_n(t; A\delta_{1n})$ の下からの評価である.

Lemma 6 関数 $f_n^{(\alpha)}(t)$ を

$$p_n(t; A\delta_{1n}) = \nu b_n^{(\alpha)} \left(\frac{A}{2\nu} e^{-\nu t}\right)^n f_n^{(\alpha)}(t).$$

のように定義する. このとき, $0 \leq \nu t \leq 1$ に対して, $f_n^{(\alpha)}(t)$ は以下の不等式を満たす.

$$f_n^{(\alpha)}(t) \;\; \geq \;\; (\nu t)^{n-1}.$$

この補題も帰納法で示すことになるが, この不等式はどの時間でも成り立つわけではなく, ある初期時間の短い間だけ成立しているという点に注意して証明する必要がある. 証明は再び [6] を参照のこと.

これらの結果から, 最後に定理の証明が完成する. Parseval の等式と比較定理から任意の非負の初期値 $\{A_n\}$ に対して,

$$\begin{aligned} ||\omega(x,t)||^2_{L^2[-\pi,\pi)} &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} \{2p_n(t; A_n)\}^2 \\ &\geq \pi \sum_{n=1}^{\infty} \{2p_n(t; A_1\delta_{1n})\}^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{2\nu b_n^{(\alpha)} \left(\frac{A_1}{2\nu} \mathrm{e}^{-\nu t}\right)^n f_n^{(\alpha)}(t)\right\}^2. \end{aligned}$$

がわかり, さらに上で証明した Lemma 5 と Lemma 6 から $0 \le \nu t \le 1$ に対して, 次を得る.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\nu b_n^{(\alpha)}\left(\frac{A_1}{2\nu}\mathrm{e}^{-\nu t}\right)^n f_n^{(\alpha)}(t)\right\}^2 &> \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_1\mathrm{e}^{-\nu t}\mathrm{e}^{-3\alpha n}\left(\frac{A_1 t}{2}\mathrm{e}^{-\nu t}\right)^{n-1}\right\}^2 \\ &= A_1^2\mathrm{e}^{-2\nu t}\mathrm{e}^{-6\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_1 t}{2\mathrm{e}^{3\alpha}}\mathrm{e}^{-\nu t}\right)^{2(n-1)}.\end{aligned}$$

したがって, $R(t) = \frac{A_1 t}{2\mathrm{e}^{3\alpha}}\mathrm{e}^{-\nu t}$ が 1 より小さければ, 次の評価を得る.

$$\begin{aligned}||\omega(x,t)||_{L^2}^2 &> \pi A_1^2\mathrm{e}^{-2\nu t}\mathrm{e}^{-6\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{R^2(t)\right\}^{n-1} \\ &= \pi\frac{A_1^2\mathrm{e}^{-2\nu t}\mathrm{e}^{-6\alpha}}{1-R^2(t)}.\end{aligned}$$

今, 関数 $R(t)$ は $0 \le \nu t \le 1$ において, 単調増加関数なので,

$$R\left(\frac{1}{\nu}\right) = \frac{A_1}{2\nu\mathrm{e}^{3\alpha+1}} \ge 1.$$

なる ν に対して, ある時刻 $T_2^*(\nu) \in [0, \frac{1}{\nu}]$ があって, $R\left(T_2^*(\nu)\right) = 1$ とできる. このことから, $0 < \nu \le \frac{A_1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha-1}$ に対して, $||\omega(x,t)||_{L^2} \to \infty$ $(t \to T_2^*(\nu))$ となり, 定理は示された.

3.3 微分作用素のベキが $\alpha < 1$ の場合

この場合は簡単に解の発散が示せる. すなわち, 数学的帰納法によって次の比較が成り立つ.

Lemma 7 $\alpha < 1$ とする. この時, すべての $n \ge 1$ と $t \ge 0$ に対して, 次を得る.

$$p_n(t; A\delta_{1n}) \ge \left(\frac{A_1}{2}\right)^n t^{n-1}e^{-n\nu t}.$$

この比較から, これまでと同様の議論から次が言える.

Theorem 8 $\alpha < 1$ とする. $0 < \nu \le \frac{A_1}{2e}$ に対して, ある有限時刻 $T_1^*(\nu)$ が存在して $||\omega(x,t)||_{L^2} \to \infty$, $t \to T_1^*(\nu)$ が成りたつ.

4　一般の初期値に対する解の爆発の数値計算

前章においては, 初期値のフーリエ係数がすべて非負である場合を扱った. この時, 解はすべての微分作用素のベキに対して, 十分小さい粘性係数を取れば解の最大値が発散することが厳密に証明された. 一方で, 初期フーリエ係数が正負の係数を含む時は, Proposition 1 のような係数に対する解の比較定理が成立しないので, 解の有限時間爆発がおこるかどうかを数学的に示すのには困難がある. そこで, この章では, 正負のフーリエ係数を含むいくつかの初期値の例に対して, 解が有限時間で爆発することを数値的に示す.

数値計算法を説明する. まず, 方程式の数値計算は解の積分表示 (5) と (6) の台形公式近似によって求める. つまり, 与えられた時間 $[0,T]$ に対して, $t_j = \frac{j}{N}T$ として $p_n(t_j)$ を次のように近似する.

$$
\begin{aligned}
p_1(t_j) = p_1^j &= \frac{A_1}{2}\mathrm{e}^{-\nu t_j}, \\
p_n(t_j) \approx p_n^j &= \frac{A_n}{2}\mathrm{e}^{-n^\alpha \nu t_j} + \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{j} \mathrm{e}^{n^\alpha \nu (t_j - t_m)} \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{i} p_k^m p_{n-k}^m.
\end{aligned}
$$

次に, もとの偏微分方程式の解が爆発するかどうかを確かめるには, 前章までの爆発証明に基づいて, すべての n に対して, $p_n(t^*) > 1$ なる t^* を見つけることにする. というのも, このような t^* に対して, $||\omega(x,t^*)||_{L^2}$ は発散するからである. 以下, 具体的な例でこれを説明をする. 図 1 は $\alpha = 1$, $T = 0.25$, $A_n = 4e\delta_{1n}, \nu = 0.25$ に対する, 解 $p_n(t)$ を求め, それらが 1 を越える時刻を, 各モードに対してプロットしたものである. 各係数の大きさが 1 を越える時刻は, モードが大きくなるに連れて漸近的にある上限値に近付く. この上限値を t^* とすると解はこの時刻で発散すると数値的に予測できる. この場合は解が具体的に Proposition 2 により与えられており, そこから求められた爆発時刻が図の中に記されているが, この比較からこの上限値 t^* が爆発時刻を近似していることがわかる.

4.1　$A_1 > 0$ かつ $A_2 < 0$ の場合

正負の初期フーリエ係数を含む最も簡単な例として $A_1 > 0$, $A_2 < 0$ かつ $A_n = 0, (n \geq 3)$ の場合の解を考える. 具体的には, $A_2 = -pA_1, (p > 0)$ とする. 図 2 は $\alpha = 2$, $\nu = 0.05$, $A_1 = 2e$ そして $p = \frac{1}{4}$ の場合のの解 $p_n(t), (n = 1, \cdots, 10)$ の様子を時刻 $T = 0.55$ まで示している. いくつかの係数は初期時刻において負の値をとるが, ある時刻を境に全ての係数が正となり, 最後は急激に増加する. この各係数が 1 を越える時刻をモード $n = 1$ から 500 まで, プロットしたのが図 3 である. この図により, モードが大きくなるに連れて, そのような時刻はある上限値に近付くことがわかる. したがって, ある有限時刻ですべての係数が 1 を越え, 解の L^2 ノルムは発散する.

次に, 他のパラメータは同じにして, α の値だけを変えて, 各モードに対するフーリエ係数が 1 を越える時刻を図 4 にプロットする. さらに, 次に $p = 2$ として, α を変えて同様の計算をした結果も図 5 に示す. 双方とも, モードが大きくな

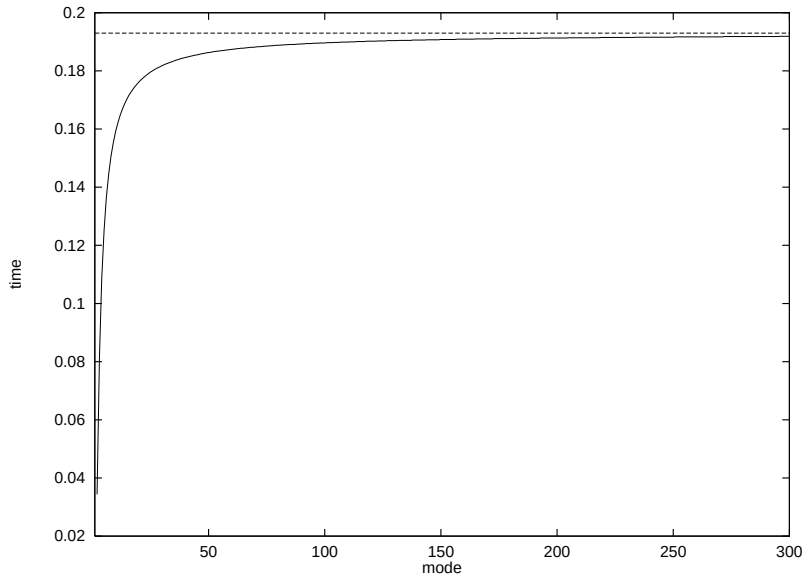

Figure 1: 各フーリエモード $n = 1, \cdots, 300$ に対する, 解 p_n が 1 を越える時間のプロット. モードが大きくなるにつれて, この時刻はある上限値に漸近する. 上の点線は理論から求めた爆発時間であり, この時間の上限値に極めて近い値であることから, この数値計算法で解の爆発時刻の予測ができることをこの例は示している.

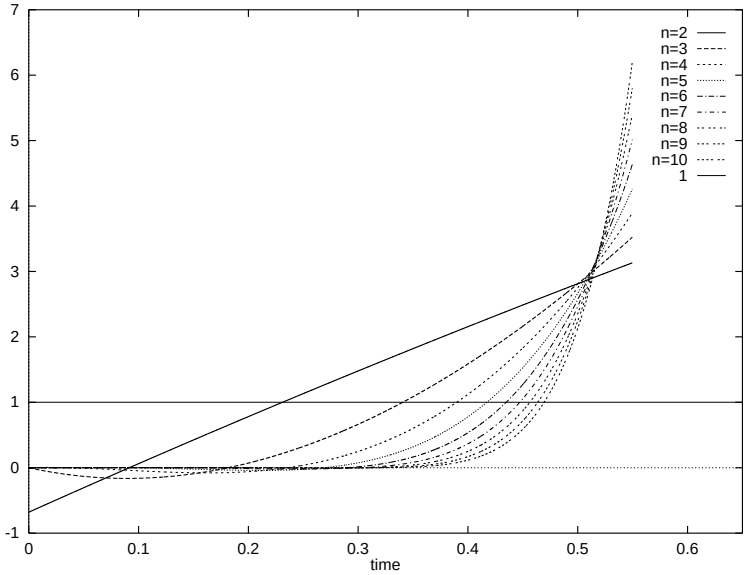

Figure 2: 各モード $n = 1, \cdots, 10$ に対する, 数値解 $p_n^j (j = 0, \cdots, 5500)$. 初期条件は $A_1 = 2e$, $A_2 = -\frac{A_1}{4}$ そして $\nu = 0.05$ である. 設定時刻 T は 0.55 である.

るにつれて, その大きさが 1 を越える時刻はある上限時刻に漸近するので, いずれの場合も解は有限時間で爆発することがわかる. また, この二つのことから, 正と負の係数の絶対値の大小にもかかわらず解は爆発することがわかる.

4.2 初期係数が $A_n = 2e\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$, $(p \geq 2)$ の場合

次に, 初期係数が振動しながら 0 に近付くような場合, すなわち $A_n = 2e\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ なる場合の解の様子を調べる. 図 6, 図 7 および図 8 はそれぞれ $p = 2, 3, 4$ の時の, 各モードに対して, その大きさが 1 を越える時刻を α をいろいろ変えて計算し, それをプロットしたものである. いずれの場合も, その時刻はある上限時刻に漸近するので, 解は有限時間で爆発することが予測できる.

5 まとめ

３次元Navier-Stokes 方程式の一次元モデルとして, 一般化された粘性項を持つＣＬＭ方程式を考えた. 初期値のフーリエ係数が全て非負の場合, どんな作用素のベキ α に対しても, 十分小さな粘性係数を取ってくれば, その解の最大値が有限時間で爆発することを厳密に示した. また, その他の初期値に対しても解が爆発することを数値的に見た. このことから, 非線形項 $\omega H(\omega)$ はいかなる拡散を持ってしても, その成長を押えることができない強いものであることがわかる.

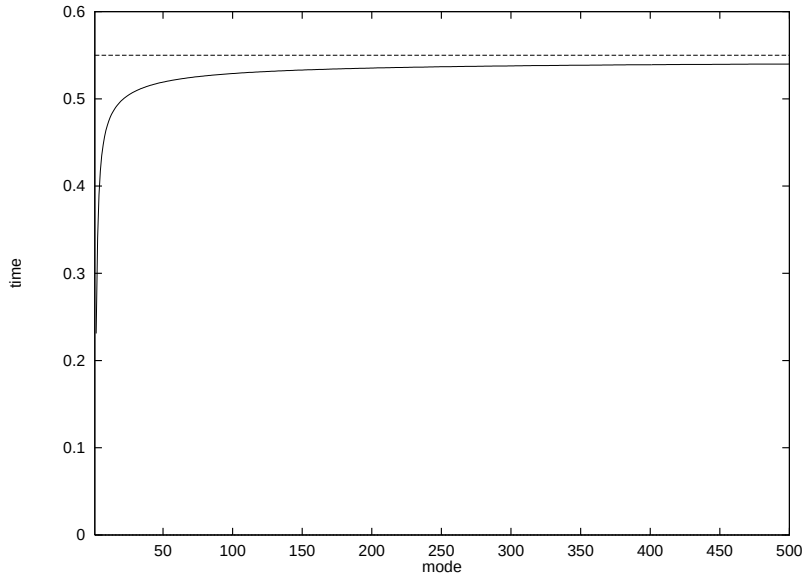

Figure 3: 各モード $n = 1, \cdots, 500$ に対する, 数値解が 1 を越える時刻 $t^{(n)}$ のプロット. 初期データは $A_1 = 2e$, $A_2 = -\frac{A_1}{4}$, $\nu = 0.05$ そして $\alpha = 2$ である. この時刻は漸近的に 0.55 付近に近付く. この時刻が数値的に予測される爆発時刻である.

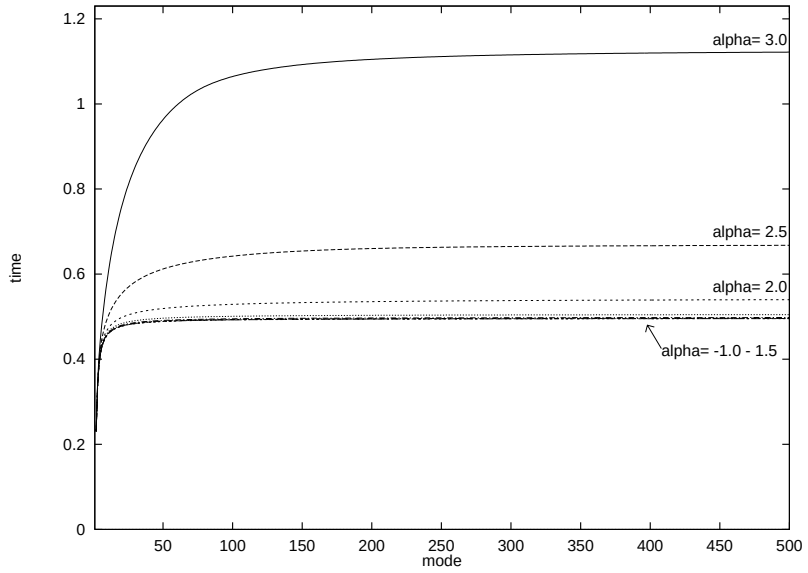

Figure 4: 各モード $n = 1, \cdots, 500$ に対する, 数値解が 1 を越える時刻 $t^{(n)}$ のプロット. 初期データは $A_1 = 2e$, $A_2 = -\frac{A_1}{4}$ そして $\nu = 0.05$ は前図と同じだが, 拡散項のベキ $\alpha = -1$, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3 に対してプロットしている.

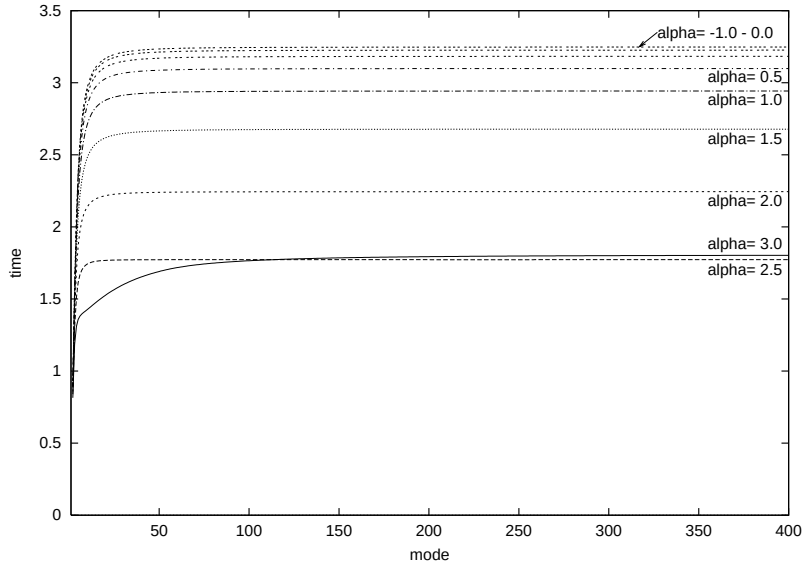

Figure 5: 各モード $n = 1, \cdots, 500$ に対する, 数値解が 1 を越える時刻 $t^{(n)}$ のプロット. 初期データは $A_1 = 2e$, $A_2 = -2A_1$ そして $\nu = 0.05$ である. 拡散項のベキ $\alpha = -1$, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3 に対してプロットしている.

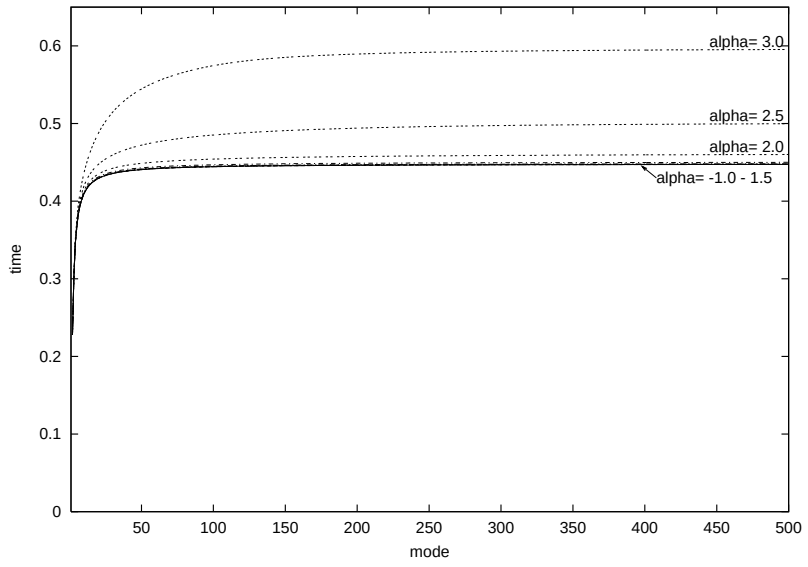

Figure 6: 各モード $n = 1, \cdots, 500$ に対する, 数値解が 1 を越える時刻 $t^{(n)}$ のプロット. 初期データは $A_n = 2e\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\nu = 0.01$ である. 拡散項のベキ $\alpha = -1$, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3 に対してプロットしている.

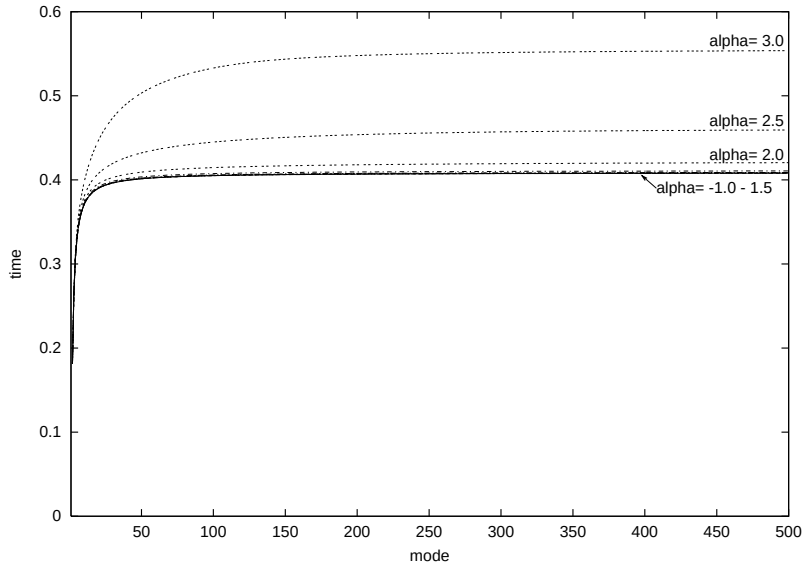

Figure 7: 各モード $n = 1, \cdots, 500$ に対する, 数値解が 1 を越える時刻 $t^{(n)}$ のプロット. 初期データは $A_n = 2e\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$, $\nu = 0.01$ である. 拡散項のベキ $\alpha = -1$, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3 に対してプロットしている.

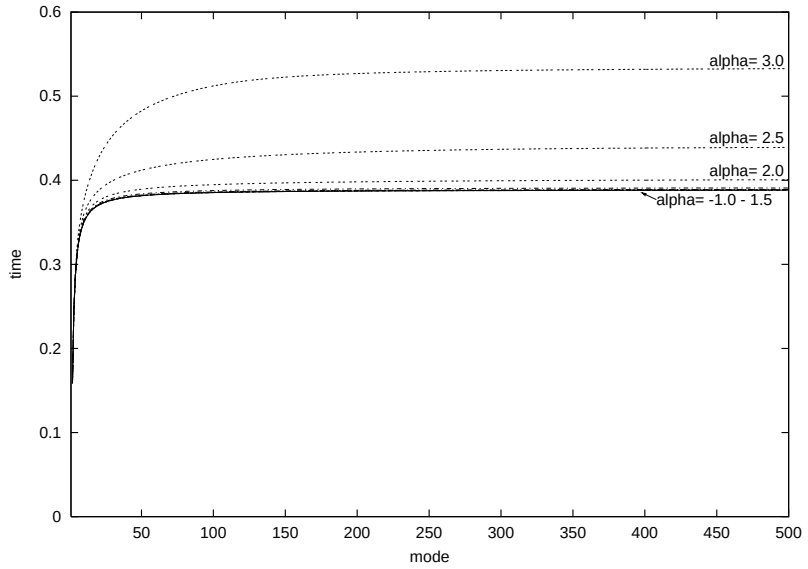

Figure 8: 各モード $n = 1, \cdots, 500$ に対する, 数値解が 1 を越える時刻 $t^{(n)}$ のプロット. 初期データは $A_n = 2e\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$, $\nu = 0.01$ である. 拡散項のベキ $\alpha = -1$, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3 に対してプロットしている.

3 次元 Navier-Stokes 方程式の場合は, ある大きな拡散項に対しては解は爆発しないことがわかっているので, Constantine らの非線形項に対する類推から求めたこの方程式は N-S とは異なる性質を持つ. その意味で, 方程式に単に拡散項を付加しただけの方程式では, 精密なモデルは得られない. ＣＬＭ方程式自体は, 別の現象のモデル方程式として用いられているということが知られており, その意味では有用であるが, 流体のモデルとしては何らかの改良が必要である. 具体的には移流項を採り入れた De Gregorio の方程式 [3] などが考えられる.

References

[1] Beale J.T., Kato T. and Majda A., Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3D Euler equations, Comm. Math. Phys. vol. 94, 1984, pp. 61–66.

[2] Constantin P.,Lax P.D. and Majda A., A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation, Comm. Pure. Appl. Math., 1985, pp.715–724.

[3] De Gregorio S., On a one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation, J. Stat. Phys., vol. 104, 1990, pp. 1251–1263.

[4] Vasudeva Murthy A.S., The Constantin-Lax-Majda model for the vorticity equation revisited, J. Indian Inst. Sci., vol. 78, 1998, pp. 109–117.

[5] 岡本 久, 非線形力学, 岩波講座 応用数学, vol.5 1995.

[6] Sakajo T, Blow-up solutions of the Constantin-Lax-Majda equation with a generalized viscosity term, J. Math. Sci. Univ. of Tokyo. submitted. (2002)

[7] Schochet S, Explicit solutions of the viscous model vorticity equation, Comm. Pure. Appl. Math.,1986, pp.531–537.

[8] Wegert E. and Vasudeva Murthy A.S., Blow-up in a modified Constanin-Lax-Makda Model for the vorticity equation, Zeit. Anal. Anwend., vol. 18, 1999, pp.183–191.