



Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2006
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/15412
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html ; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory06_slide2.pdf (第2回講義スライド)



[Instructions for use](#)

グラフ理論 #2

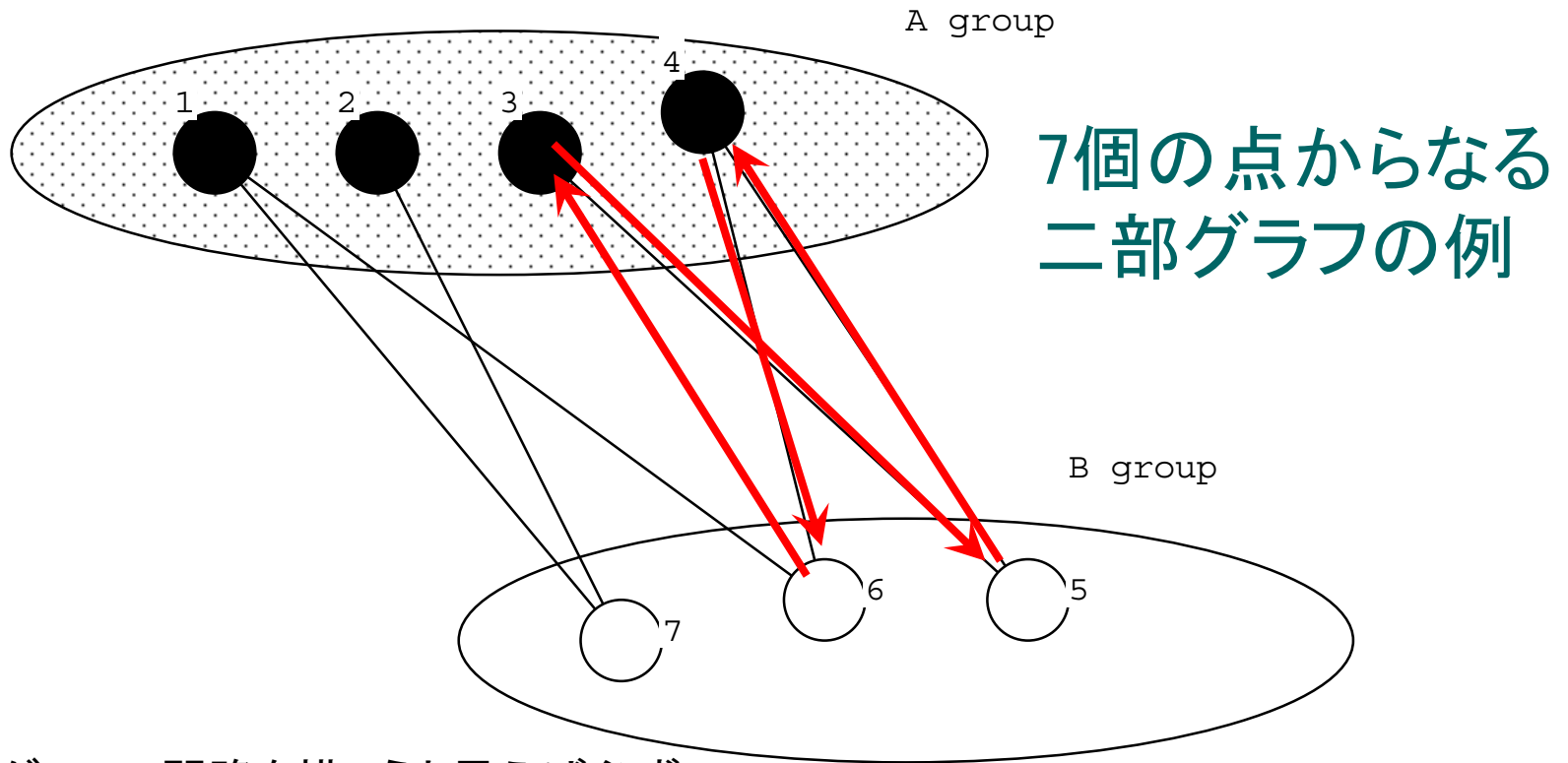
第2回講義 4月17日

--- 定義と例 ---

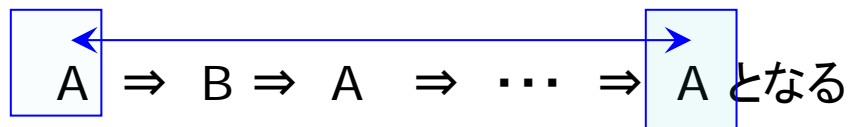
情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題1 (2)の解答例



二部グラフで閉路を描こうと思えば必ず

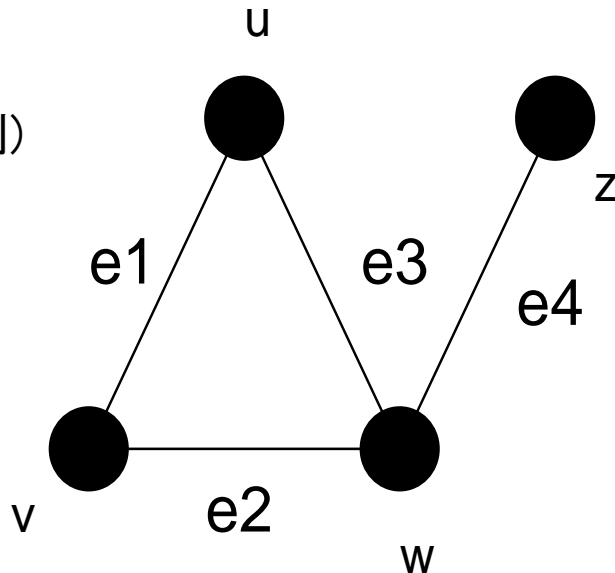


⇒の数(辺の数)は必ず偶数回現れる

単純グラフ

単純グラフ：グラフにループが含まれず、頂点のどの対も高々1つのリンクで結ばれているグラフ

例)



グラフGの点集合 (vertex set)

$$V(G) = \{u, v, w, z\}$$

$$E(G) = \{uv, vw, wu, wz\}$$

グラフGの辺集合 (edge set)

ψ_G : グラフGの接続関数 \Rightarrow Gの各辺にGの頂点の対を対応させる関数

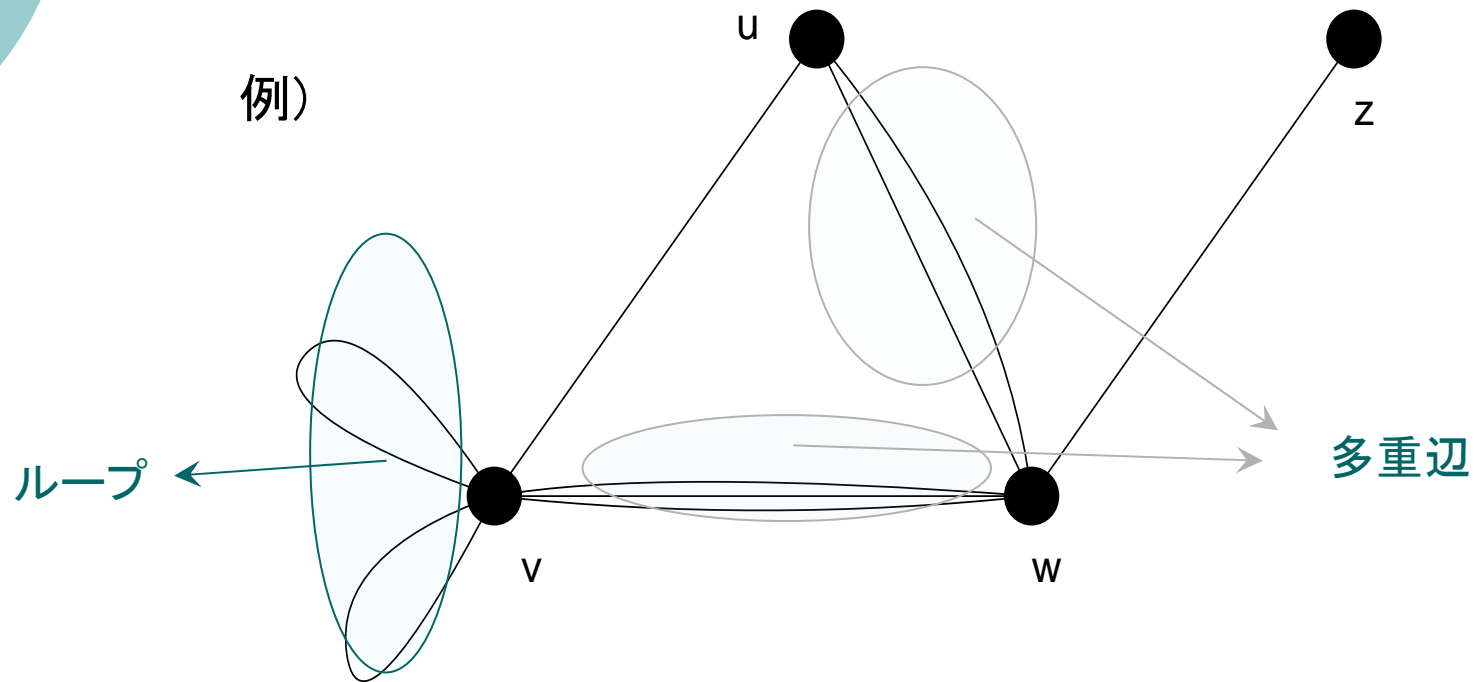
$$\psi_G(e_1) = uv, \psi_G(e_2) = vw$$

$$\psi_G(e_3) = wu, \psi_G(e_4) = wz$$

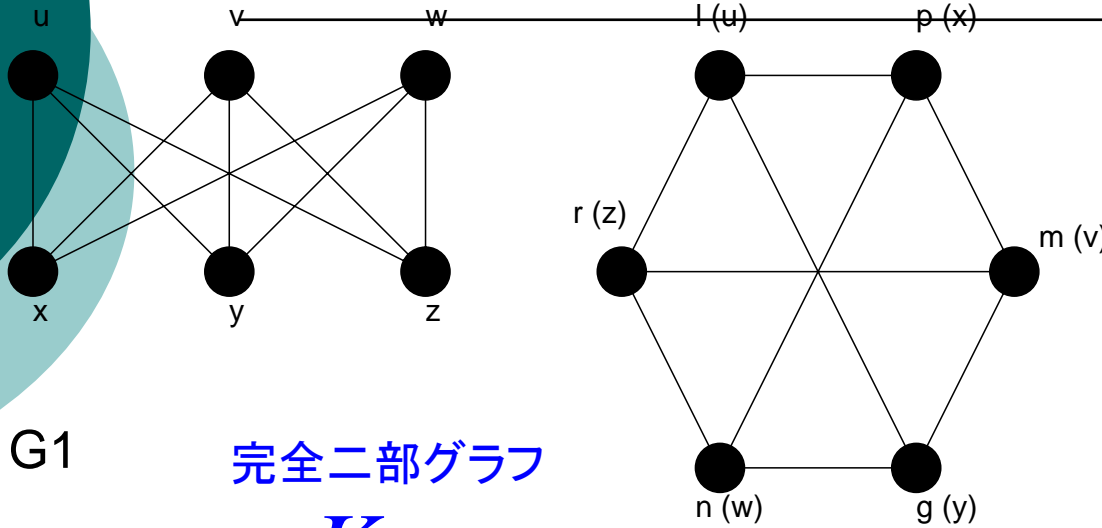
例)の場合の接続関数

一般グラフ (⇔単純グラフ)

一般グラフ (general graph) : ループや多重辺も許されたグラフ



同形と同形写像



G1 完全二部グラフ $K_{3,3}$

2つのグラフ G_1, G_2 が同形であるとき

1対1写像:

$$\theta: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$$

$$\phi: E(G_1) \rightarrow E(G_2)$$

が次を満たす

$$G2 \quad \psi_{G_1}(e) = uv \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

接続関数

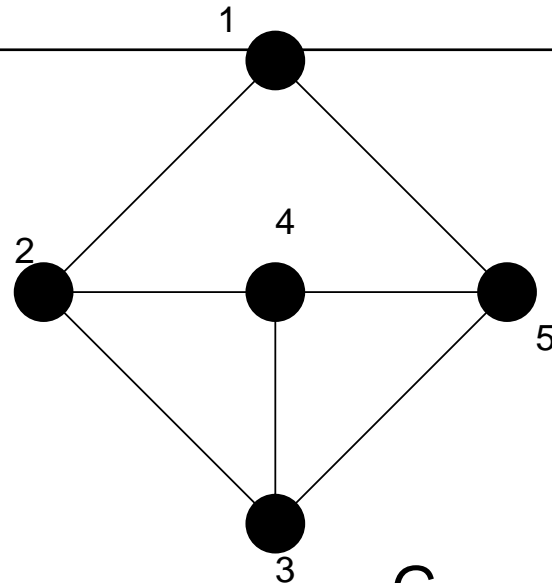
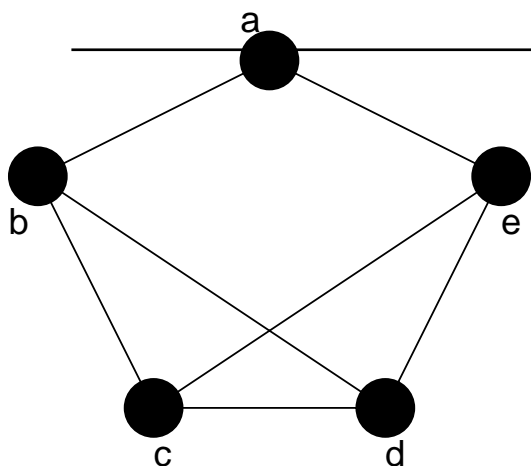
上の例では

$$\theta(u) = l, \theta(v) = m, \theta(w) = n, \theta(x) = p, \theta(y) = q, \theta(z) = r$$

$$\phi(\overline{ux}) = \overline{lp} = \overline{\theta(u)\theta(x)}, \phi(\overline{uz}) = \overline{lr} = \overline{\theta(u)\theta(x)}, \dots$$

となり、次が成立 $\Rightarrow \psi_{G_1}(\overline{ux}) = \overline{ux} \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\overline{\phi(ux)}) = \overline{lp} = \overline{\theta(u)\theta(x)}, \dots$

例題2.2の1.



G_1
点について

$$\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4, \theta(e) = 5$$

辺について

$$\phi(\overline{ab}) = \overline{12}, \phi(\overline{bc}) = \overline{23}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}, \phi(\overline{bd}) = \overline{24}$$

$$\phi(\overline{de}) = \overline{45}, \phi(\overline{ce}) = \overline{35}, \phi(\overline{ea}) = \overline{51}$$

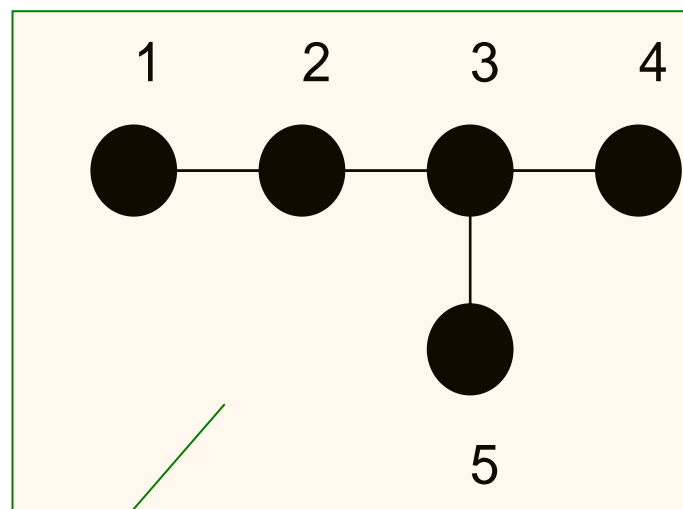
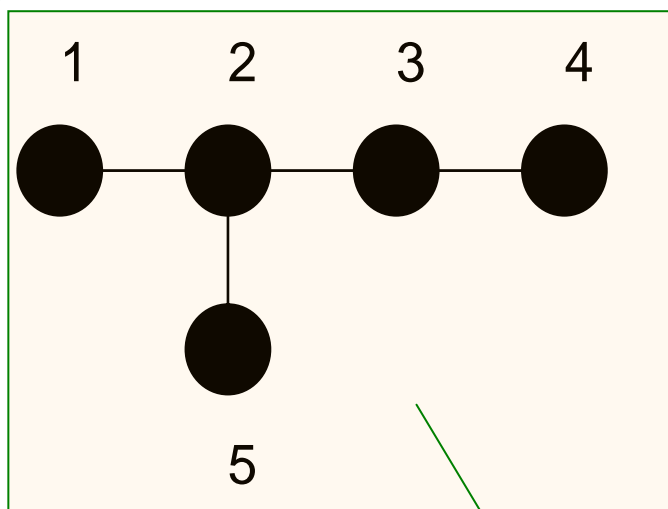


$$\psi_{G_1}(\overline{ab}) = ab \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ab})) = \psi_{G_2}(\overline{12}) = \theta(a)\theta(b)$$

等が成り立ち、同形写像が存在する。

ラベル付きグラフ・ラベルなしグラフ

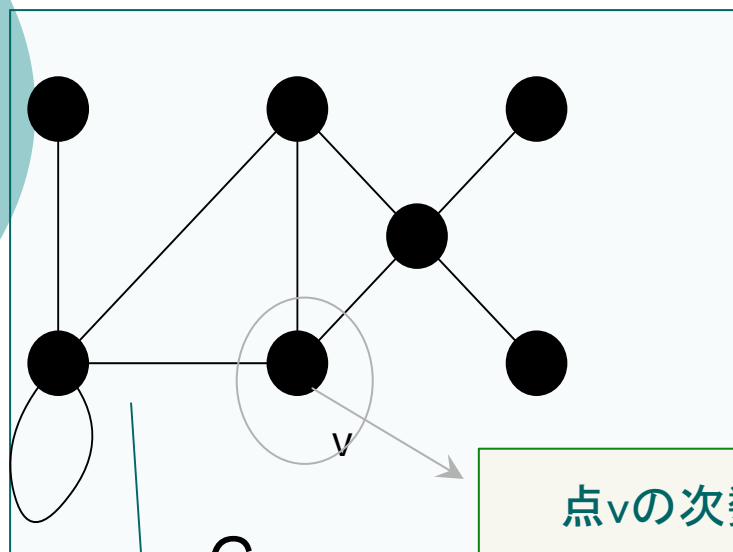
ラベル付きグラフ：各点に名前のついたグラフ



ラベル付きグラフとして扱う場合には、これら2つの木は別個の木となる

次数および次数列

端点 (edge vertex)
: 次数1の点



点 v の次数

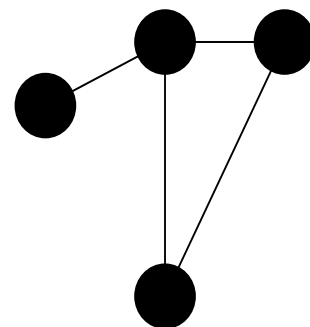
$$\deg(v) = 3$$

G_1

次数列は

グラフの次数列 : 次数を増加順に記したもの

(1, 1, 1, 3, 3, 4, 5)



G_2

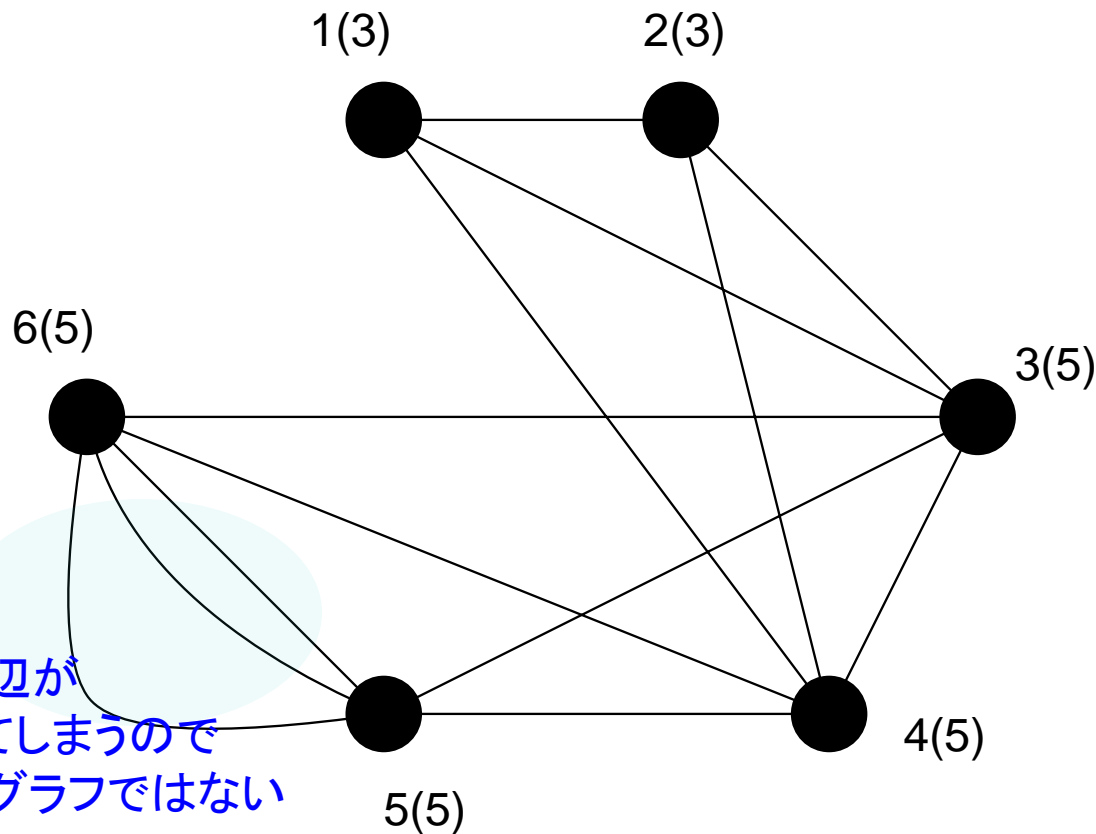
孤立点 (isolated vertex)
: 次数ゼロの点

⇒ 逆にグラフが描けるような数列のことを、その数列は「グラフ的」という

例題2.3の(3)

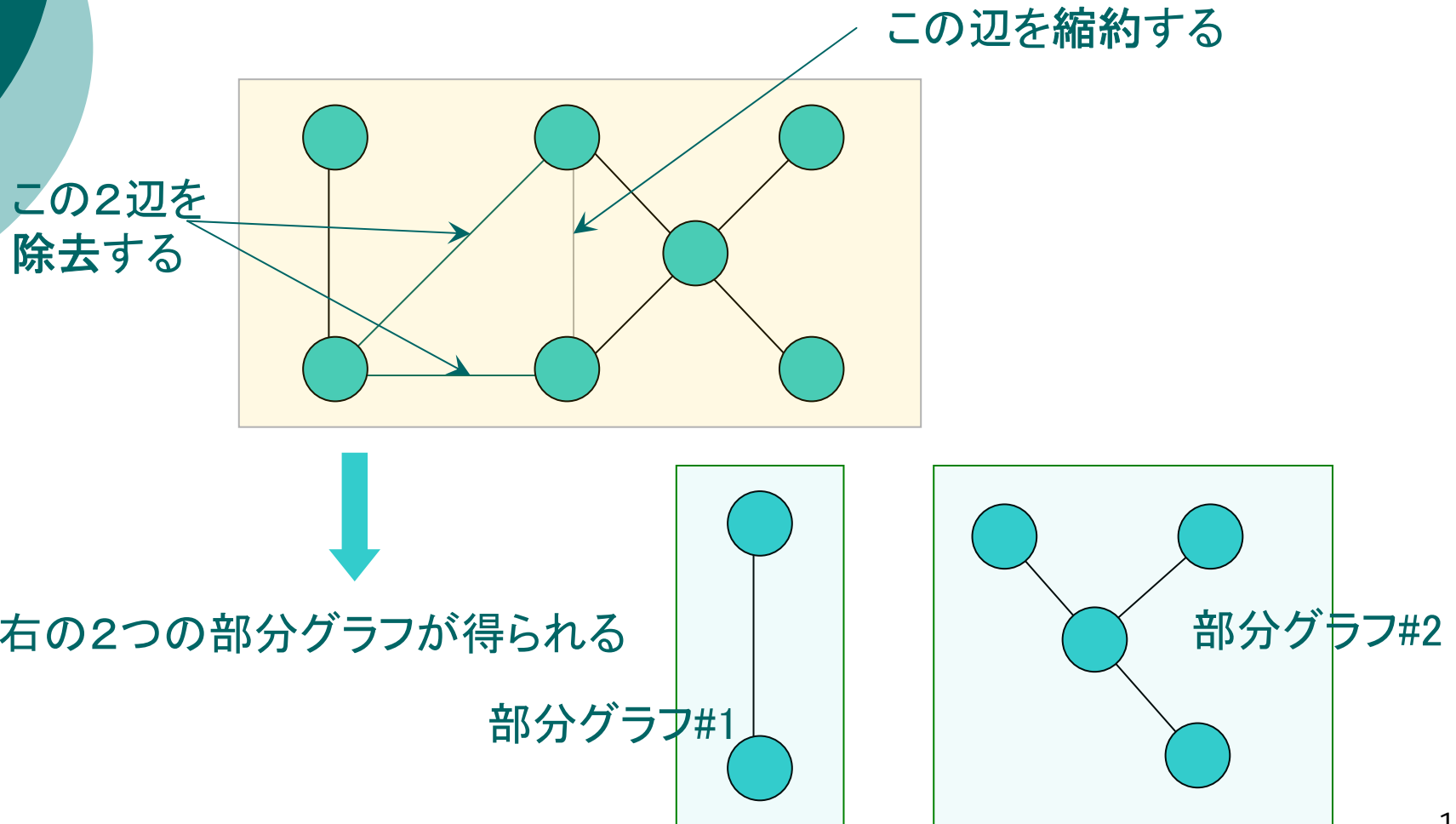
各点の次数列が $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$ であるものを描け

「ベクトル」の成分が6個なので6点からなるグラフ



多重辺が
できてしまうので
単純グラフではない

部分グラフ



グラフの行列表現

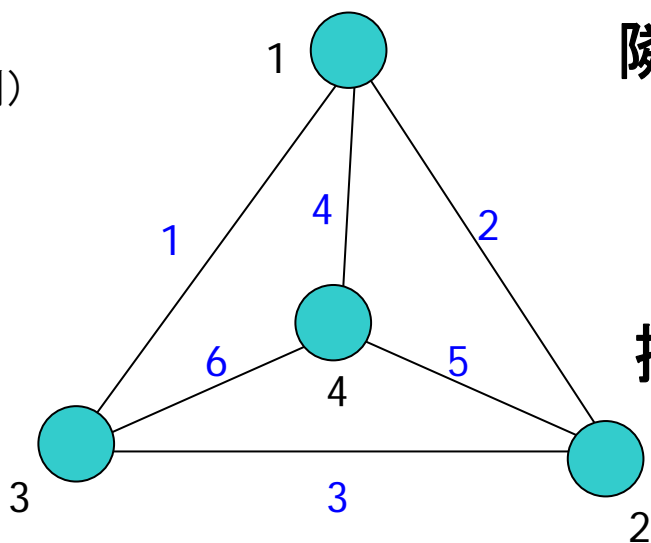
点数 n 変数 m のグラフに対して

隣接行列：点 i と点 j を結ぶ辺の本数を第 ij 要素とする $n \times n$ の行列

接続行列：点 i が辺 j に接続している場合、第 ij 要素が1であり、接続していなければ0である $n \times m$ の行列

ループが無いので対角要素はゼロ

例)



次数列は(3,3,3,3)

隣接行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

和3は点1の次数

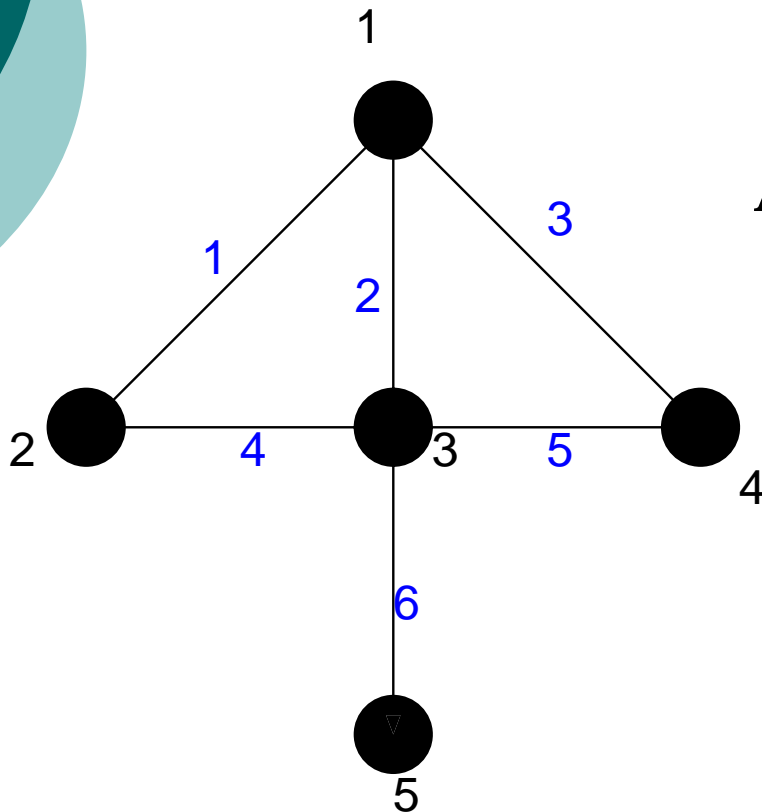
対称行列

接続行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

握手補題から
この和は必ず2

例題2.3の(2)



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

点1につながっている
点は2,3,4なので
1x2,1x3,1x4成分に
1が立っている

隣接行列

点1につながっている
辺は1,2,3なので
1x1,1x2,1x3に1が立っている

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

接続行列