グラフ理論　#3

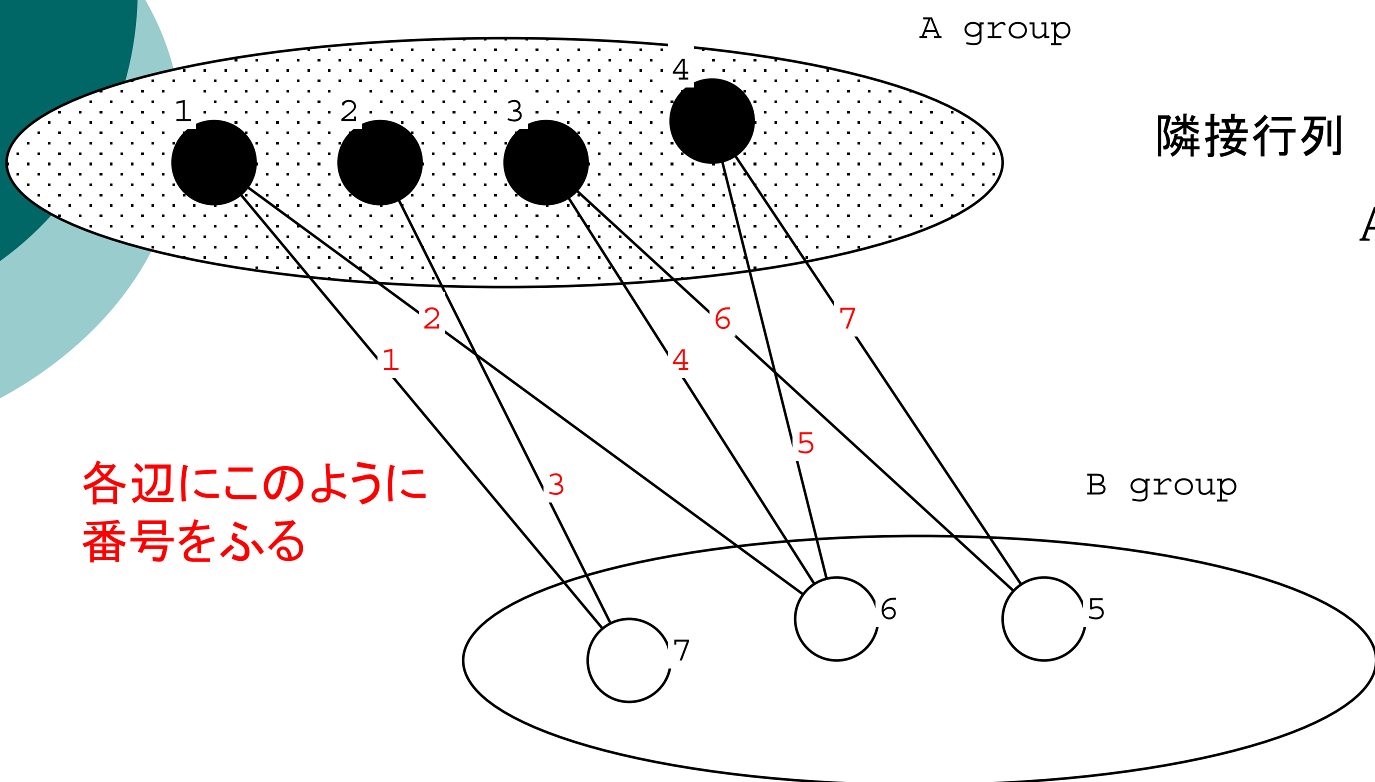
第3回講義　4月21日

--- いろいろなグラフの例とパズル ---

情報科学研究科　　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題2 (1)の解答例



各辺にこのように番号をふる

隣接行列

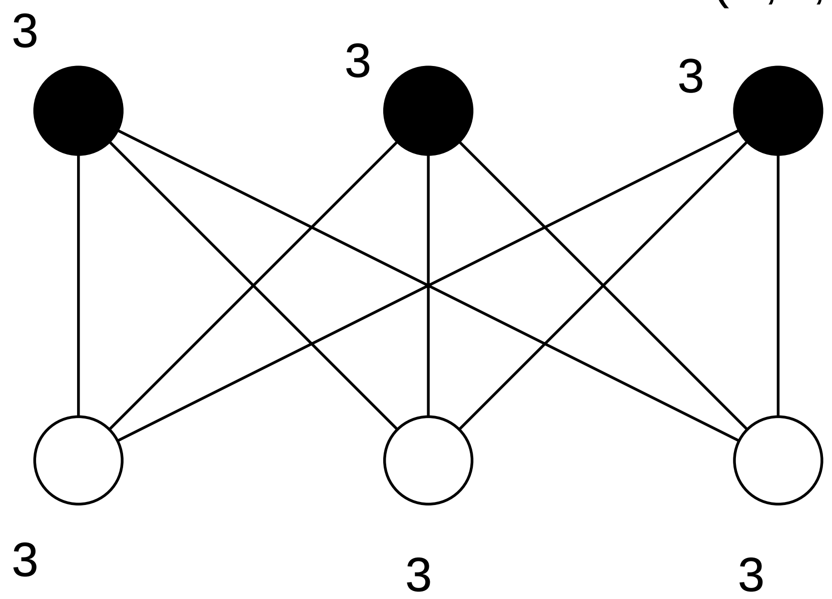
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

接続行列

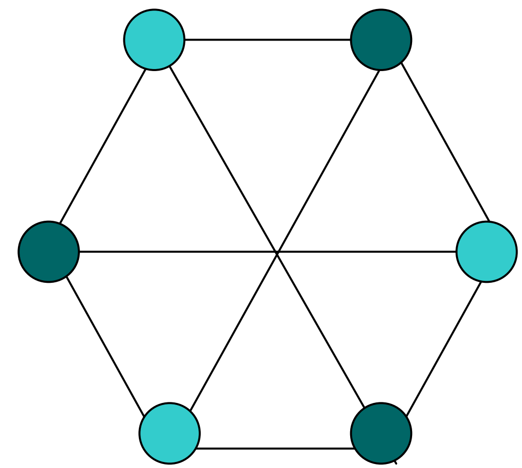
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

演習問題2 (2)の解答例

(3,3,3,3,3,3)はグラフ的である。



完全二部グラフであれば良い



これを描いても正解

空グラフ

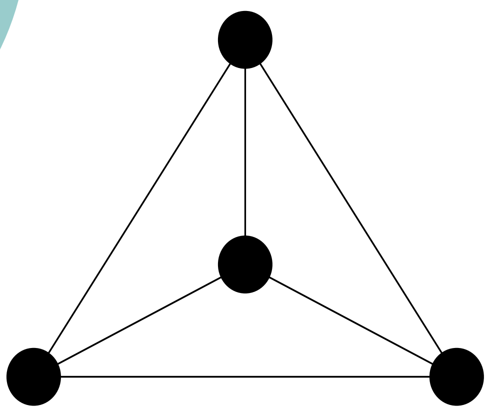
空グラフ (null graph) : 辺集合が空であるグラフ

N_4

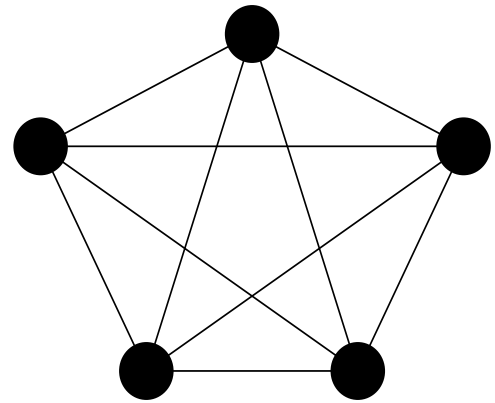
n 点からなる空グラフを N_n と書く

完全グラフ

完全グラフ（complete graph）: 相違なる2つの点が全て隣接しているグラフ



K $_4$



K $_5$

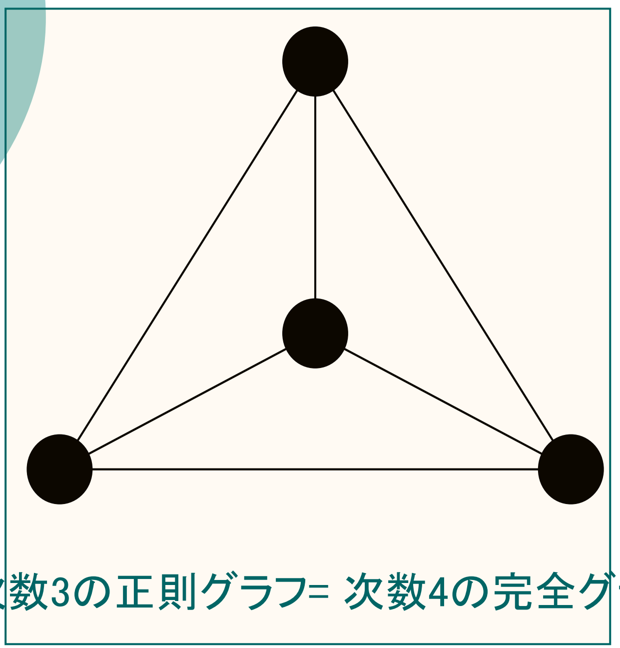
$$ {}_{n}C_{2} = \frac{n(n-1)}{2} $$

← n点からなる完全グラフの辺の本数

$$ K_n $$

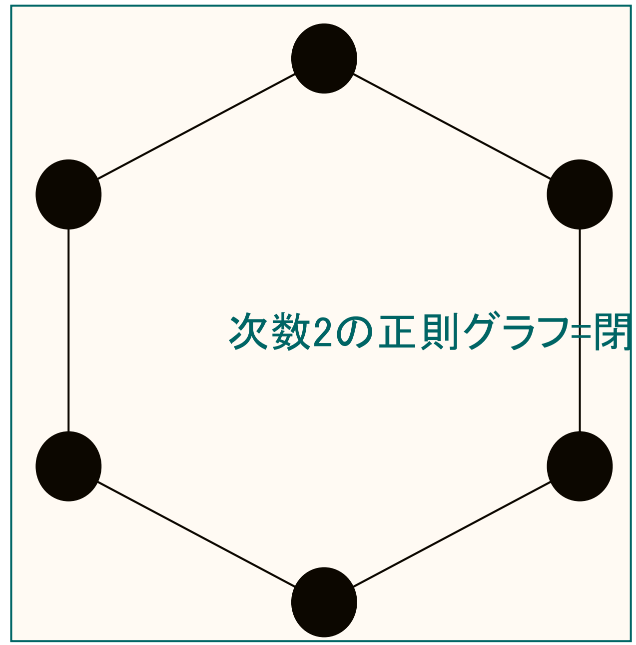
正則グラフ

r−正則グラフ（regular graph）：どの点の次数も全て共通にrであるグラフ



次数3の正則グラフ= 次数4の完全グラフ

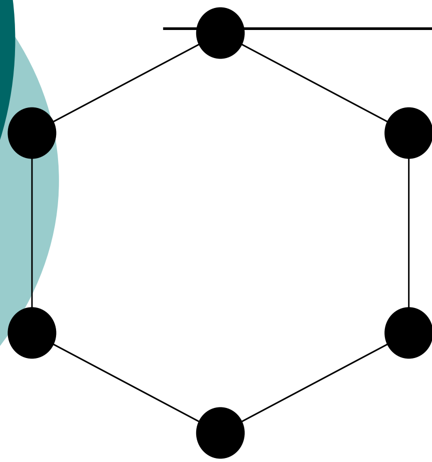
3-regular graph



次数2の正則グラフ=閉路グラフ

2-regular graph

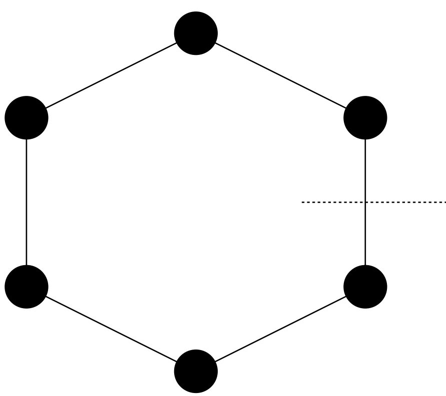
閉路グラフと道グラフ

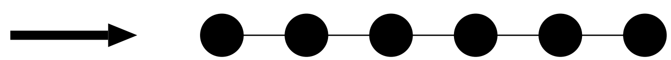


C_6

閉路グラフ（cycle graph）：次数2の正則連結グラフ

道グラフ(path graph)：閉路グラフから一つの辺を除いて得られるグラフ



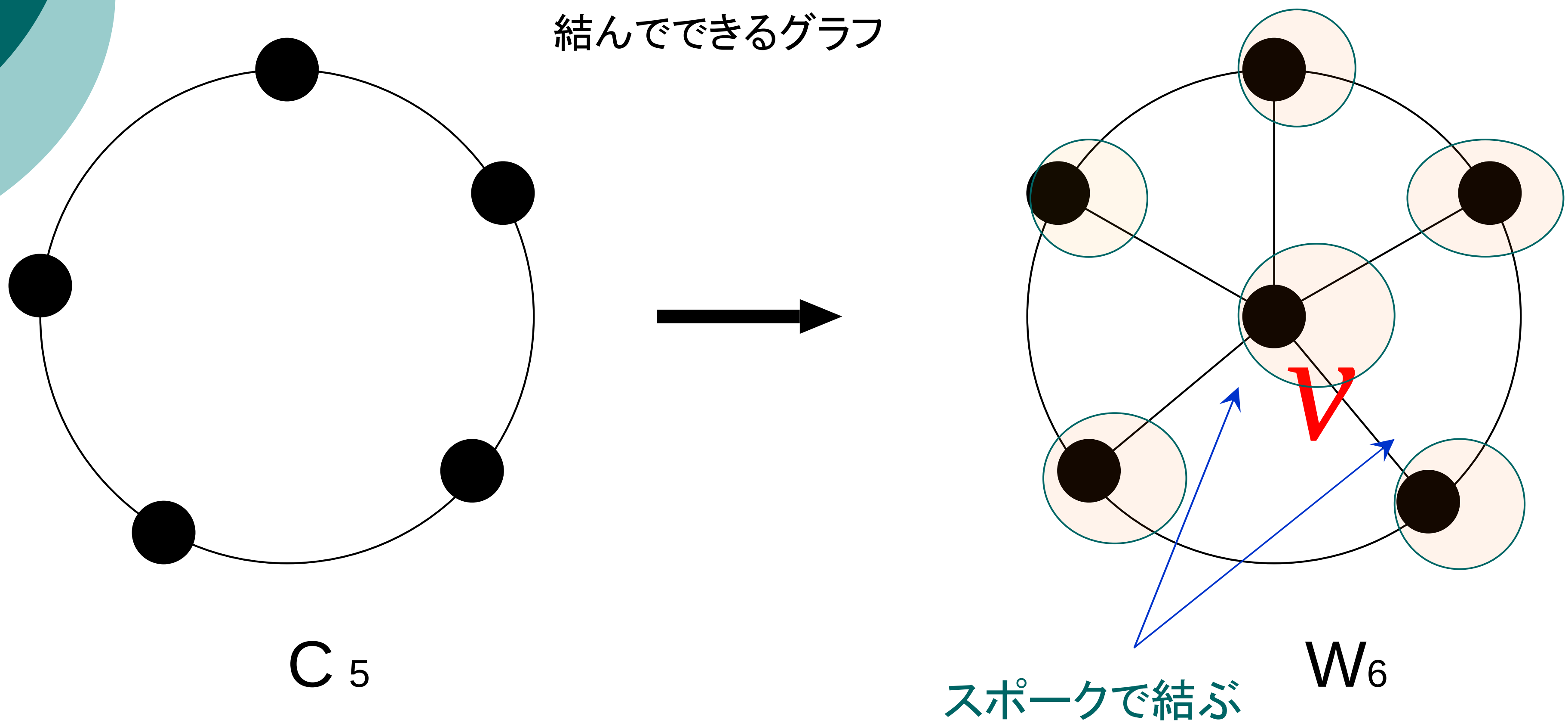


P_6

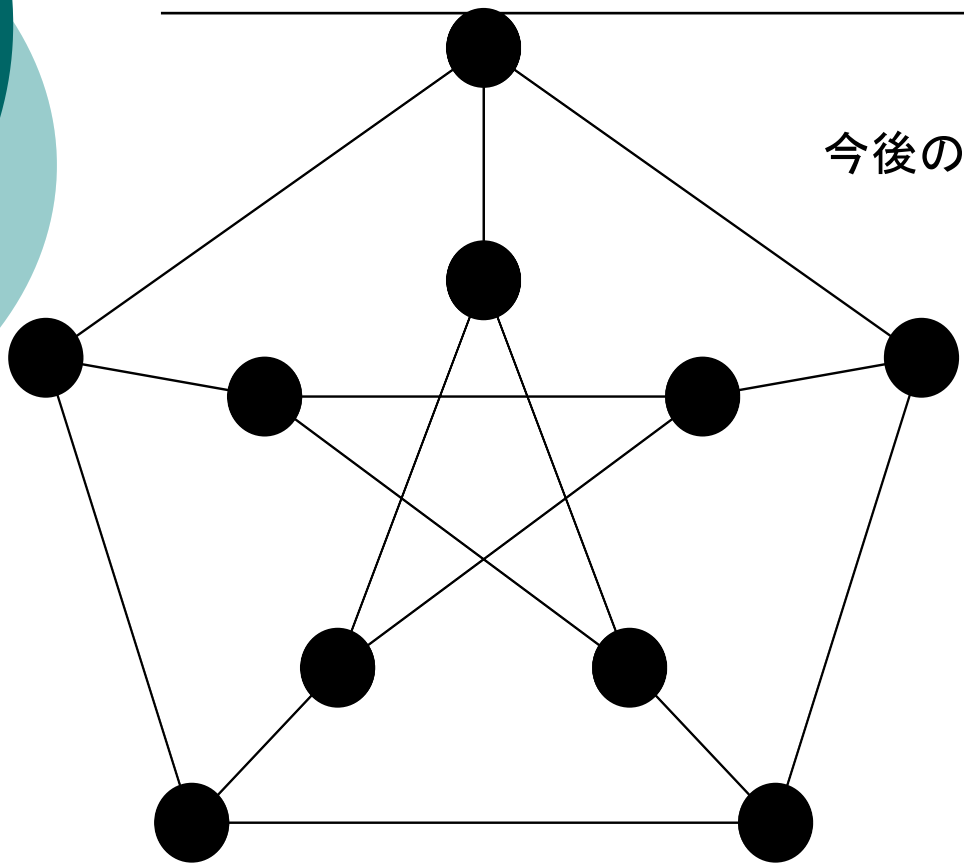
C_6

車輪

車輪（wheel）： C_{n-1} に新しい点 v を加え、v と他の全ての辺を結んでできるグラフ



ピータースン・グラフ

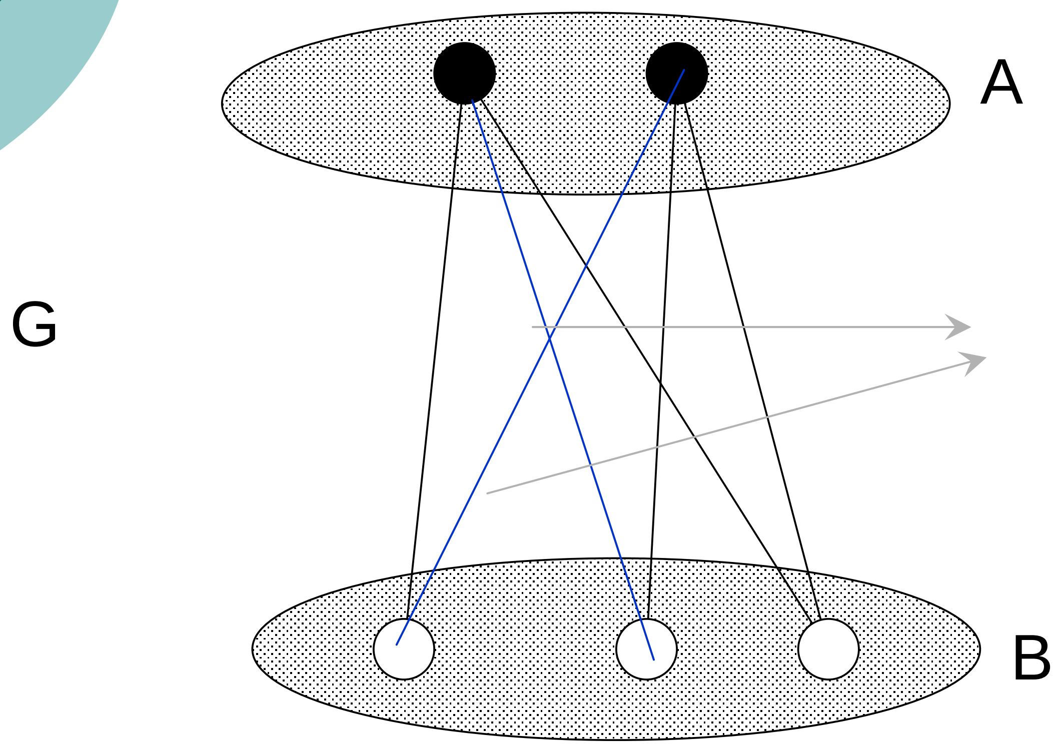


今後の演習問題で頻出する

ピータースン・グラフはハミルトン・グラフであろうか？

二部グラフ

二部グラフ (bipartite graph)：グラフGの点集合を素な2つの集合A、Bに分割し、Gの全ての辺はAの点とBの点を結ぶようにしてできあがるグラフ

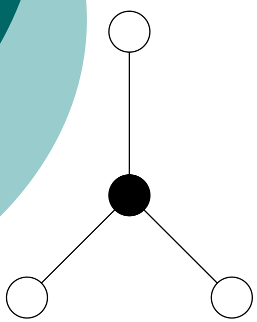


この2本の辺を加えることにより、Aの各点がBの各点とちょうど1本の辺で結ばれるようになる

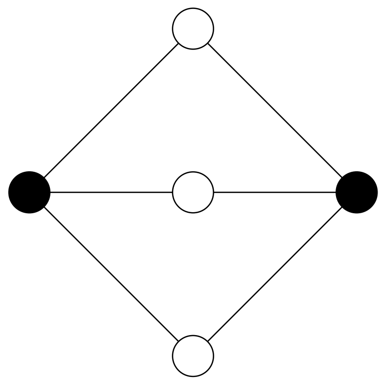
⇒　**完全二部グラフ**

完全二部グラフ

完全二部グラフ（complete bipartite graph）：Aの各点がBの各点とちょうど1本の辺で結ばれた二部グラフ



$K_{1,3}$

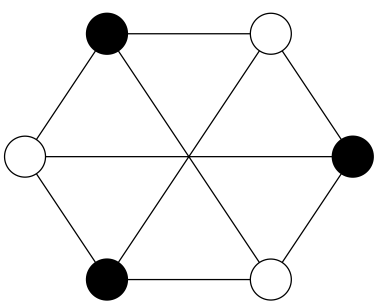


$K_{2,3}$

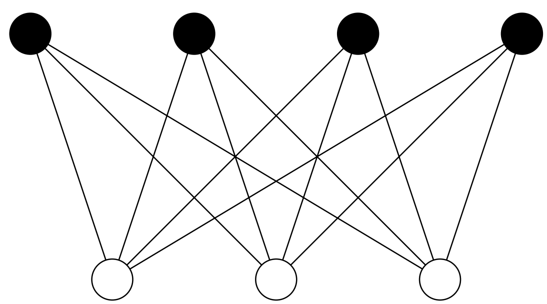
黒r個、白s個からなる完全二部グラフ

$$K_{r,s}$$

と表記する



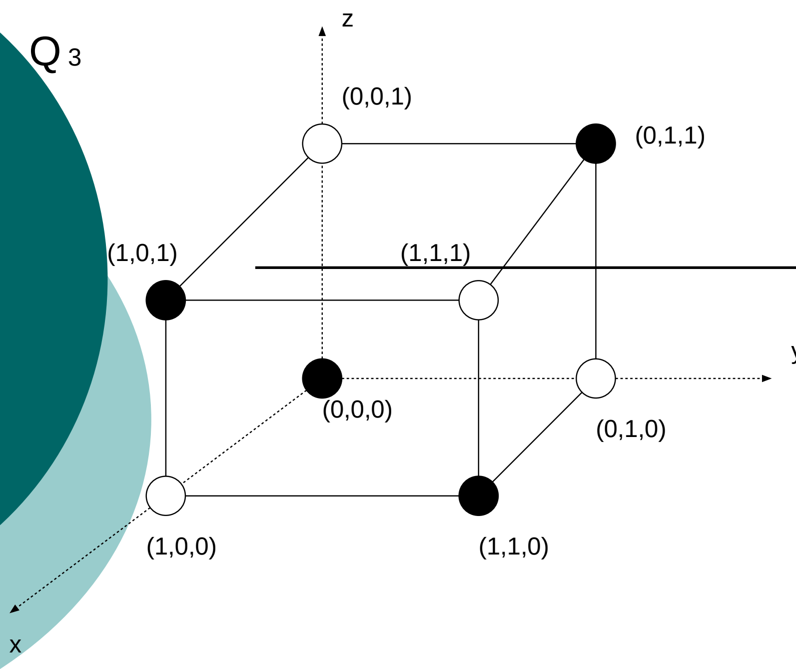
$K_{3,3}$



$K_{4,3}$

k−立方体

Q_3



k−立方体（K−cube）

$a_i = 0,1$ であるような1つの列ベクトル
$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ に一つの点を対応させ、

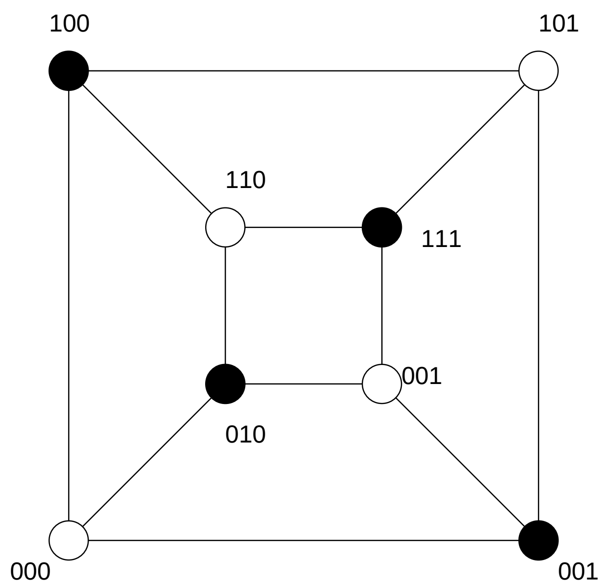
一つだけ異なる成分を持つ二つのベクトルに対応する二つの点が辺で結ばれるような正則二部グラフ

$$Q_k$$

2^k 個の点と $k2^{k-1}$ 本の辺を持つ

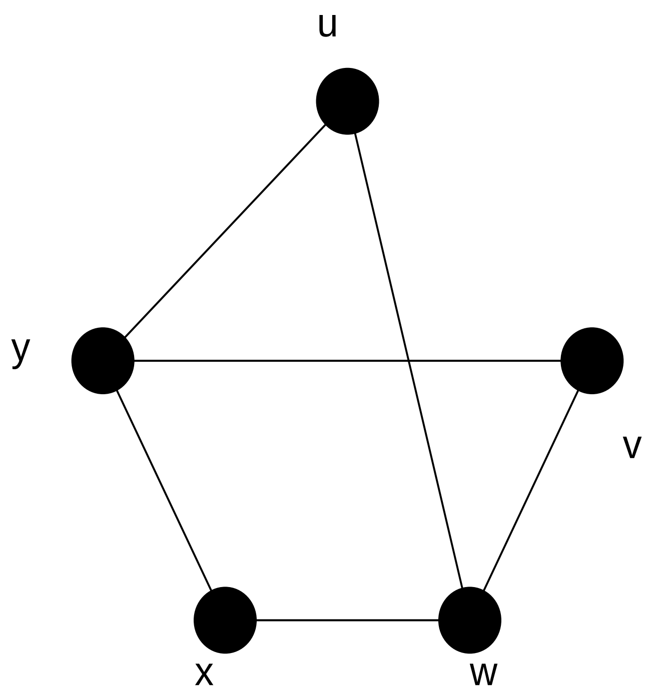
食い違う位置を指定した場合に一つだけ成分の異なるベクトルを選ぶ場合の数

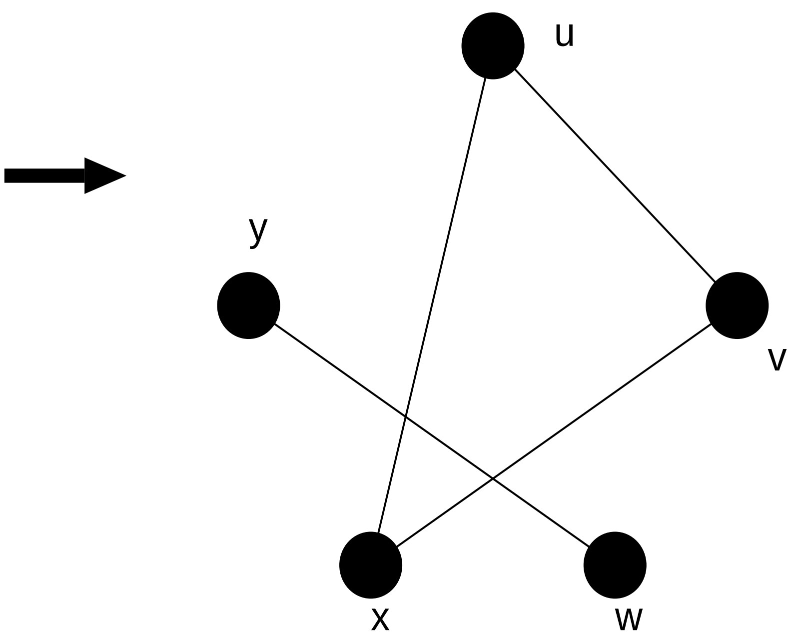
Q_3



単純グラフの補グラフ

単純グラフGの補グラフ（complement）：　単純グラフGの点集合を持ち、2点が隣接するのは、Gにおけるそれらの2点が隣接していないとき、かつ、そのときに限るグラフ



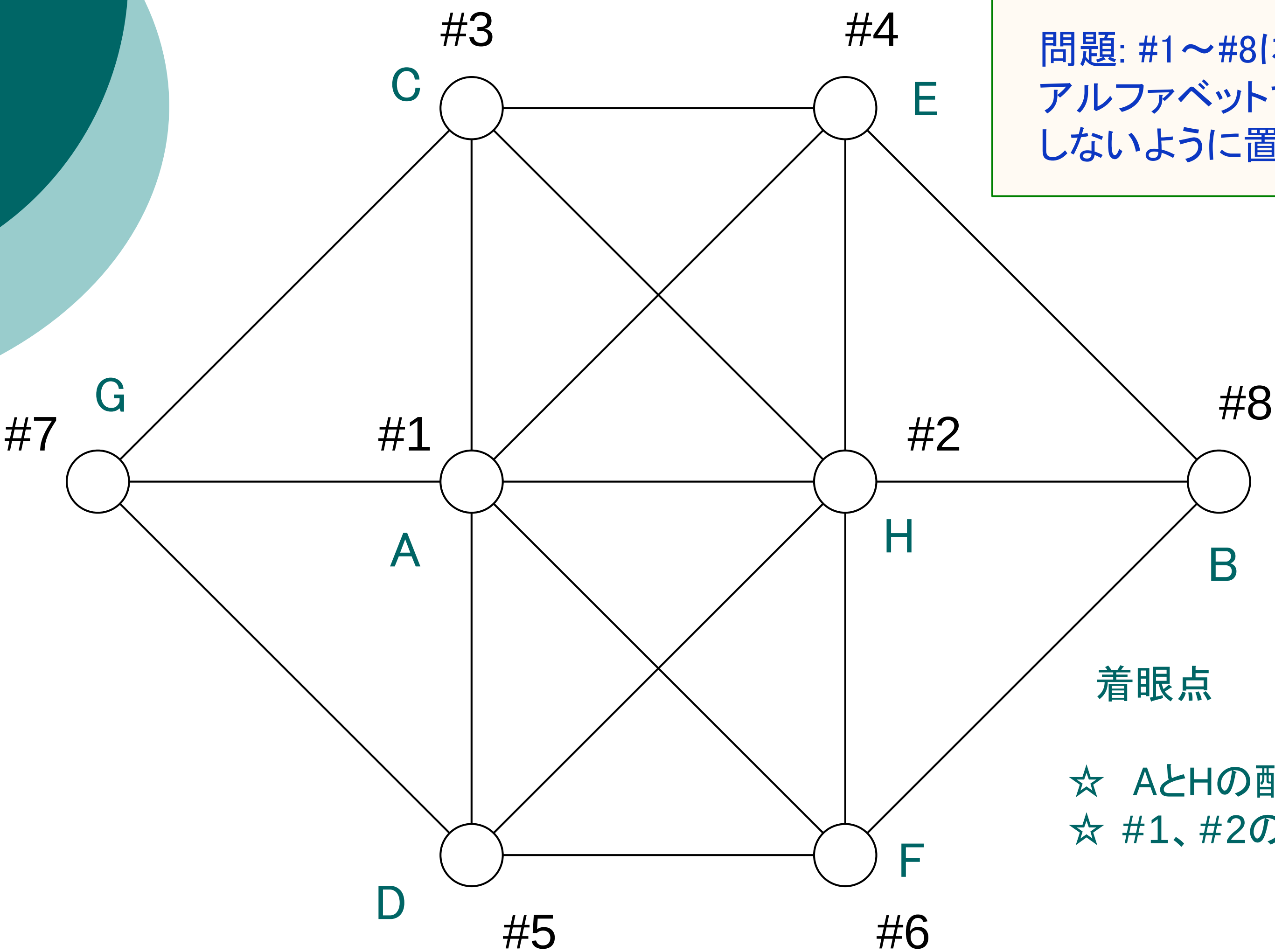


例）
☆　完全グラフの補グラフは空グラフ
☆　完全二部グラフの補グラフは2つの完全グラフの和である

関連する話題を次回の演習問題で出題します。

8つの円の配置問題

問題: #1～#8にA～Hの8つの文字をアルファベットで隣り合う文字が隣接しないように置け

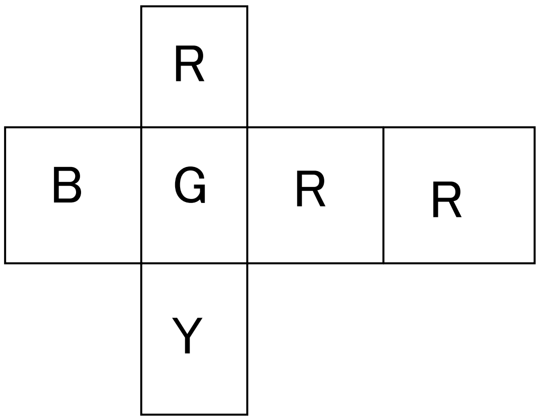


着眼点

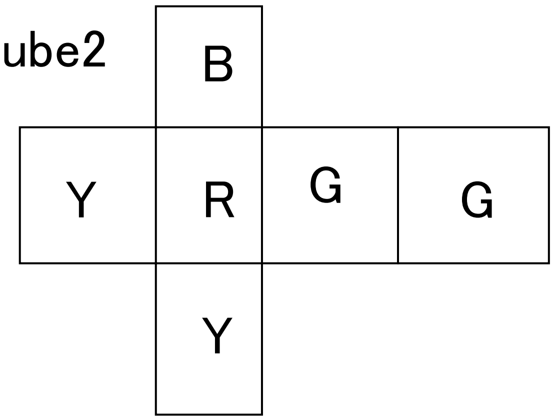
☆　AとHの配置の仕方は易しい
☆ #1、#2の円への配置が最も難しい

4つの立方体パズル

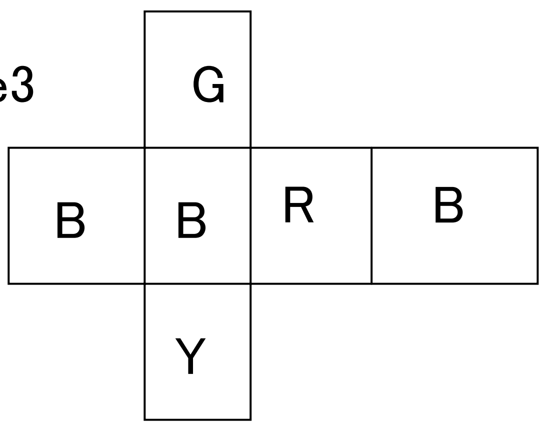
cube1



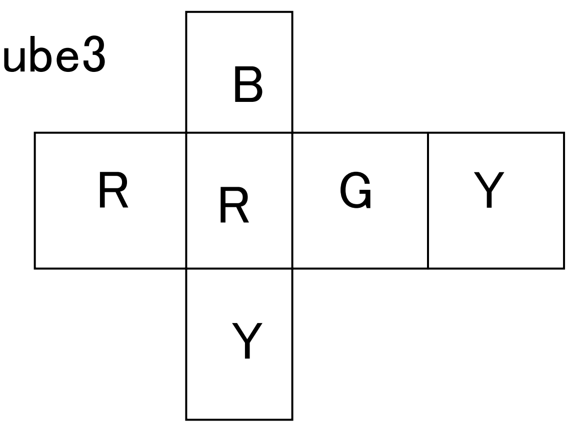
cube2



cube3

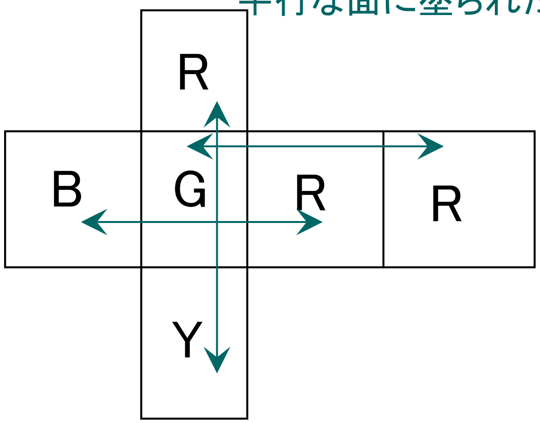


cube3



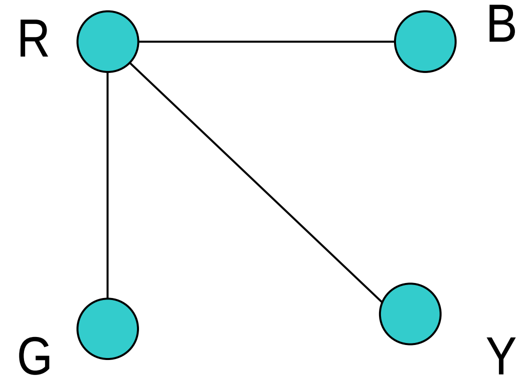
解法のステップ　#1

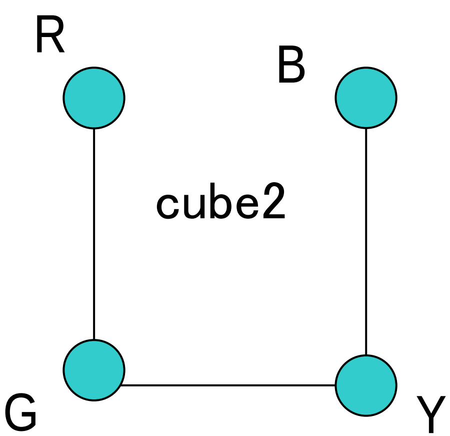
cube1

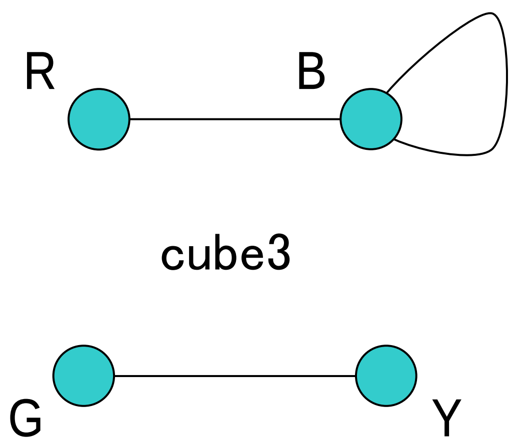


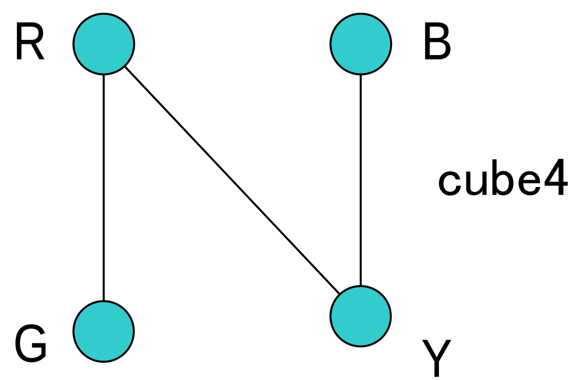
平行な面に塗られた色どうしを結ぶ　⇒

cube1

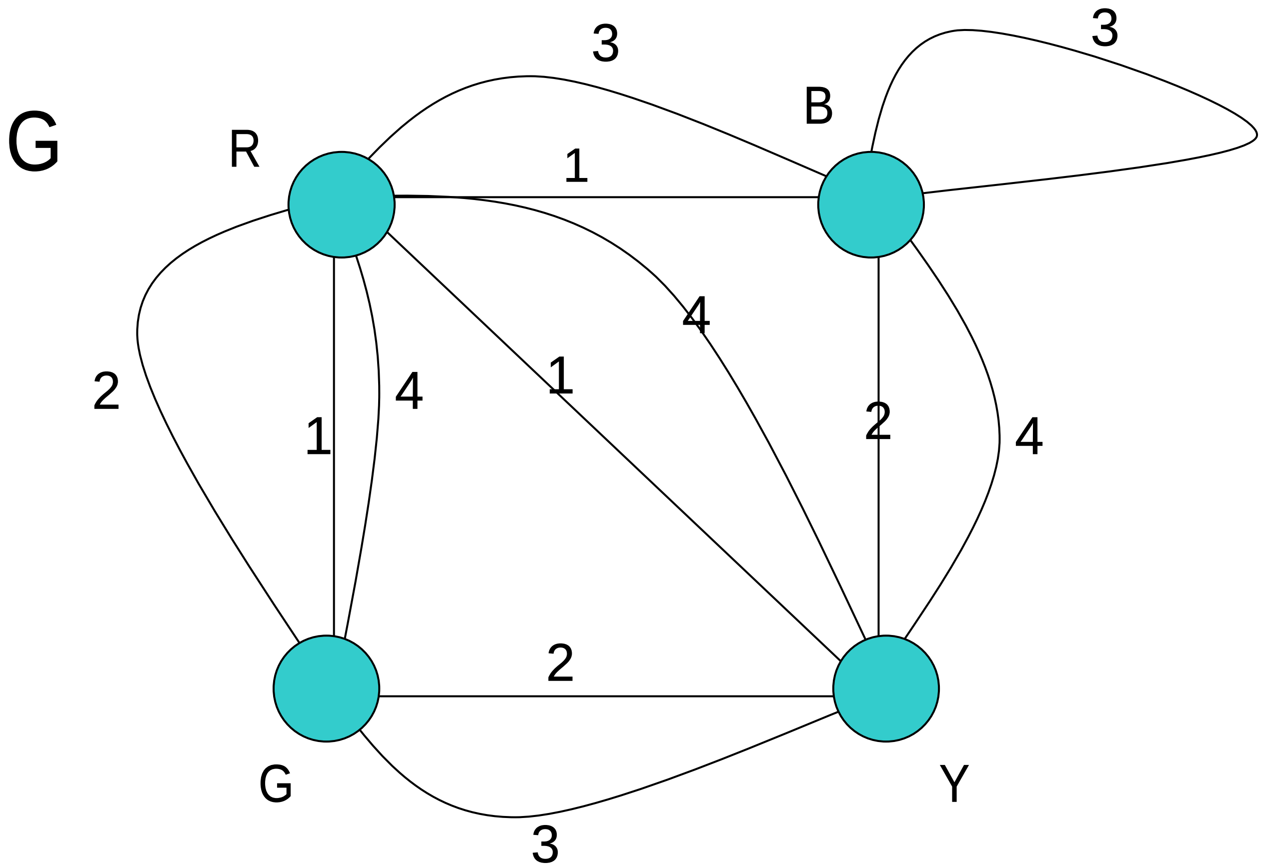








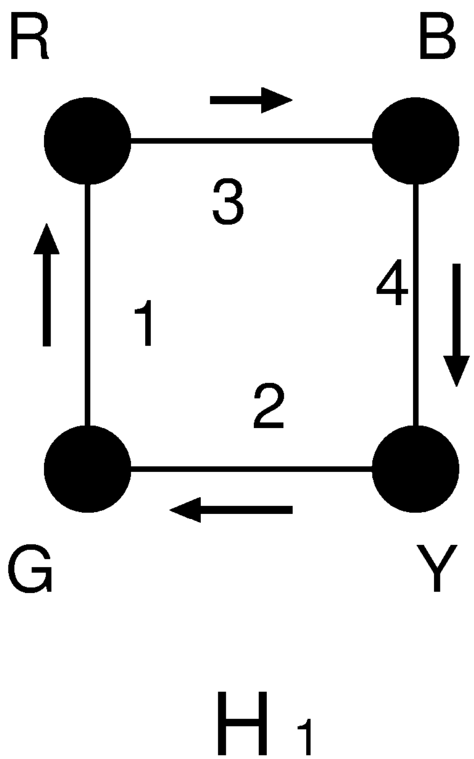
解法のステップ #2

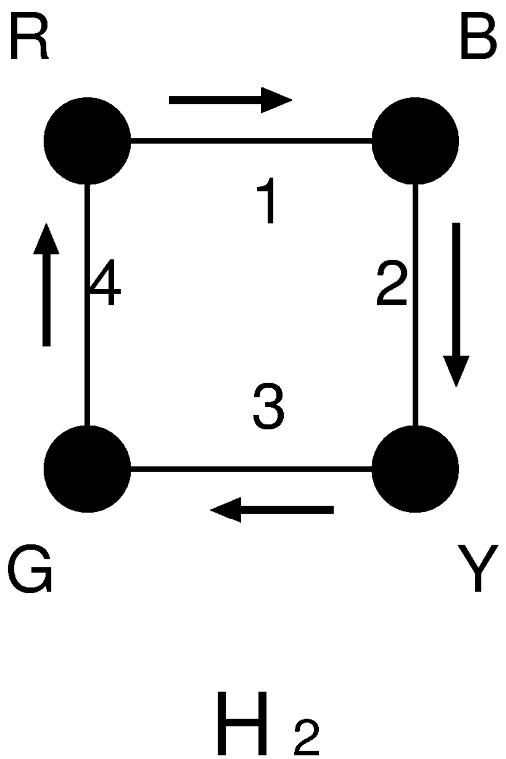


ステップ #1で求めた4つのグラフを重ね合わせる

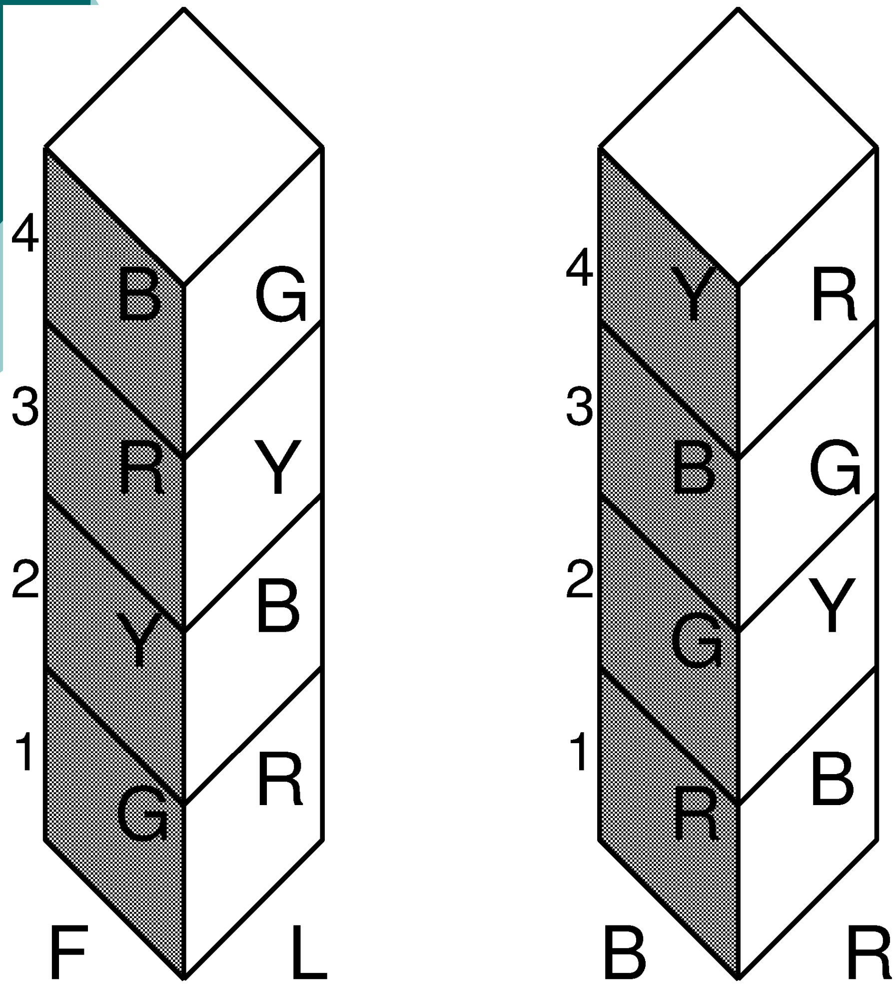
解法のステップ　#3

各cubeの辺を1本ずつ含み、共通な辺が無く、次数2の正則グラフとしてGの部分グラフH1、H2を選ぶ



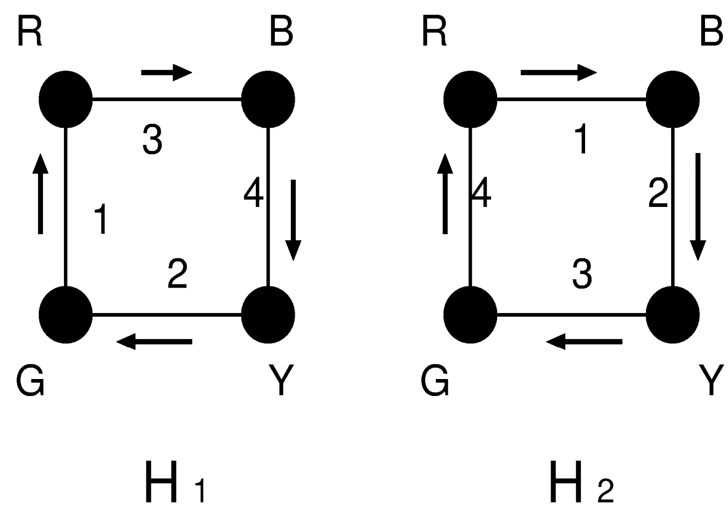


解法の最終ステップ

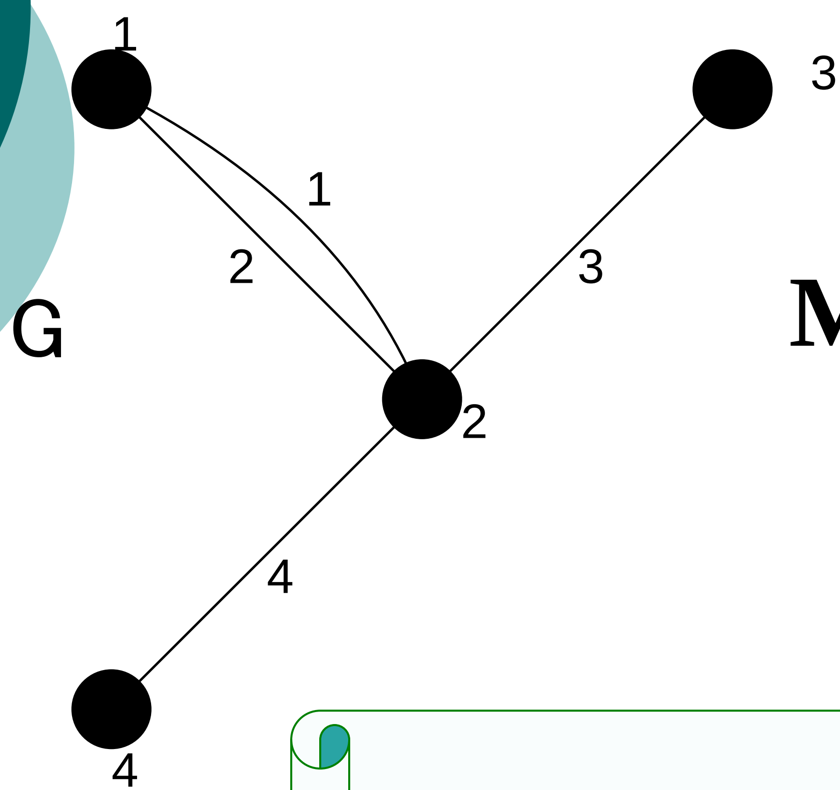


$$H_1(FB), H_2(LR)$$

を用いて、cube1、cube2、cube3、cube4
を積み上げる



例題3.1



$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

点1に接続してる
辺の数=1+1=2(次数)

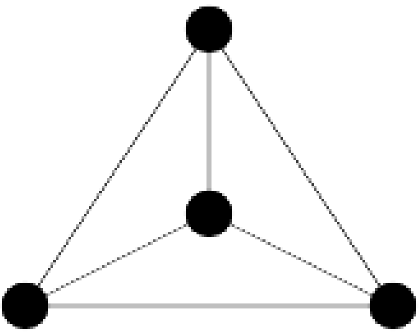
辺1の両端の点の個数
= 2（握手補題より）

両辺は接続行列
の成分の総和
を表している

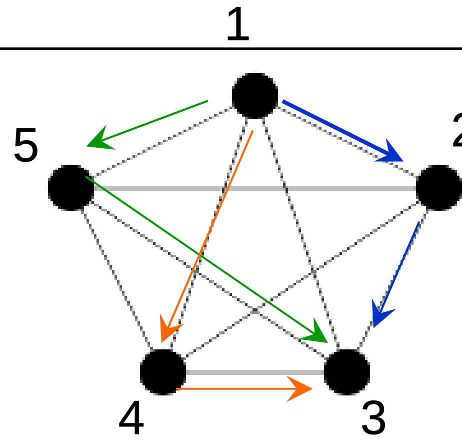
接続行列の各列の和は2であることからくる

$$\underbrace{\sum_{v\in V(G)} \deg(v)}_{\text{グラフGの次数和}} = 2\underbrace{\varepsilon(G)}_{\text{辺の数=接続行列の列の数}}$$

例題3.2



K 4



K 5

隣接行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

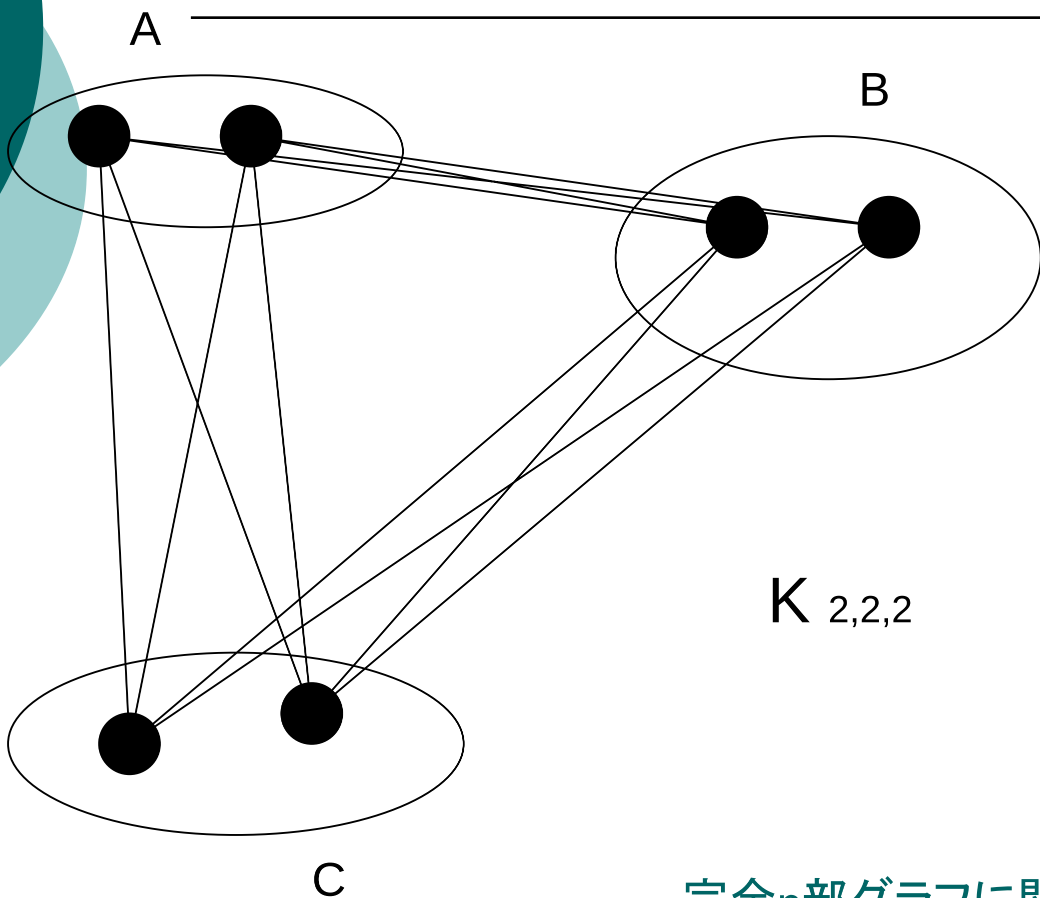
点1と点3を結ぶ長さ2の歩道の数

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

これを一般化すると

$\left[\mathbf{A}^K\right]_{ij}$ は点 i と点 j を結ぶ長さKの歩道の数に等しい

例題3.3（完全三部グラフ）



K 2,2,2

$K_{r,s,t}$ の辺数は

$rs+st+tr$

完全n部グラフに関連する問題を
次回の演習問題で出題します。