グラフ理論　#5

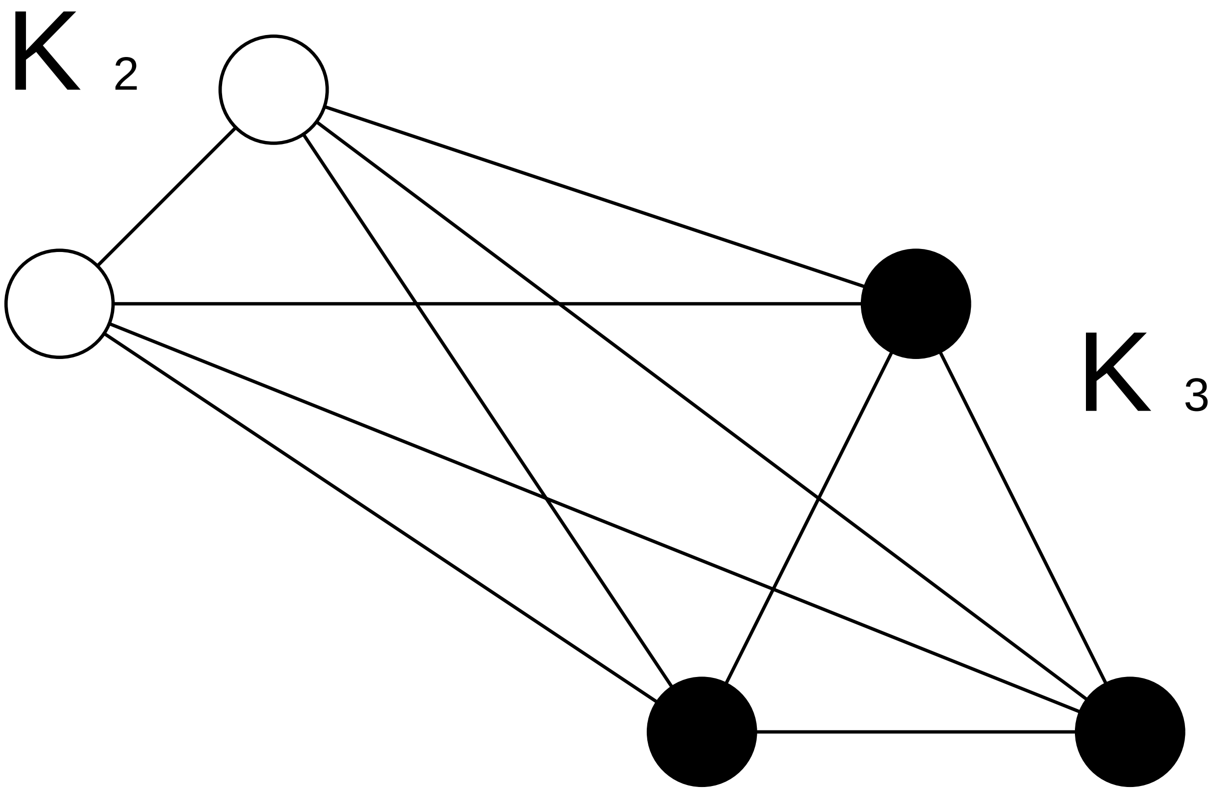
第5回講義　5月8日

--- オイラー･グラフとハミルトン･グラフ ---

情報科学研究科　　　井上純一

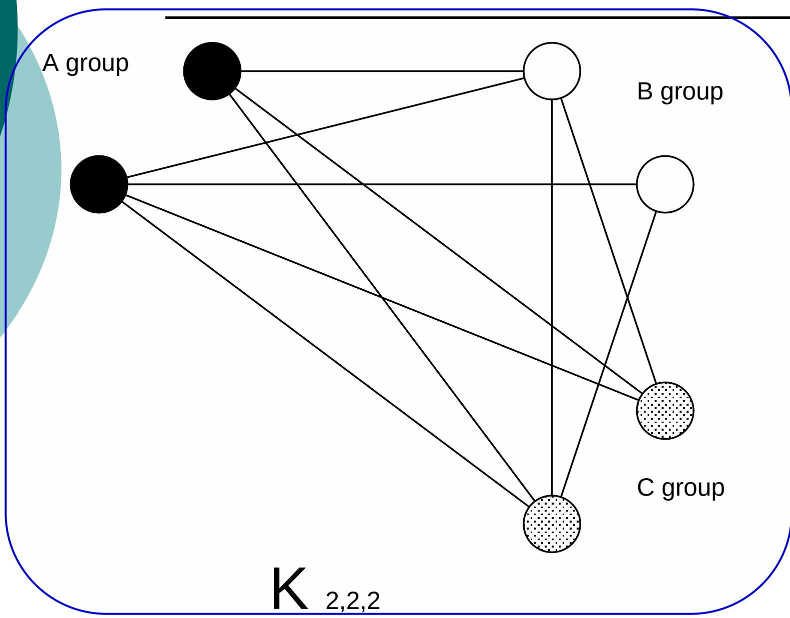
http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題3 (1)の解答例

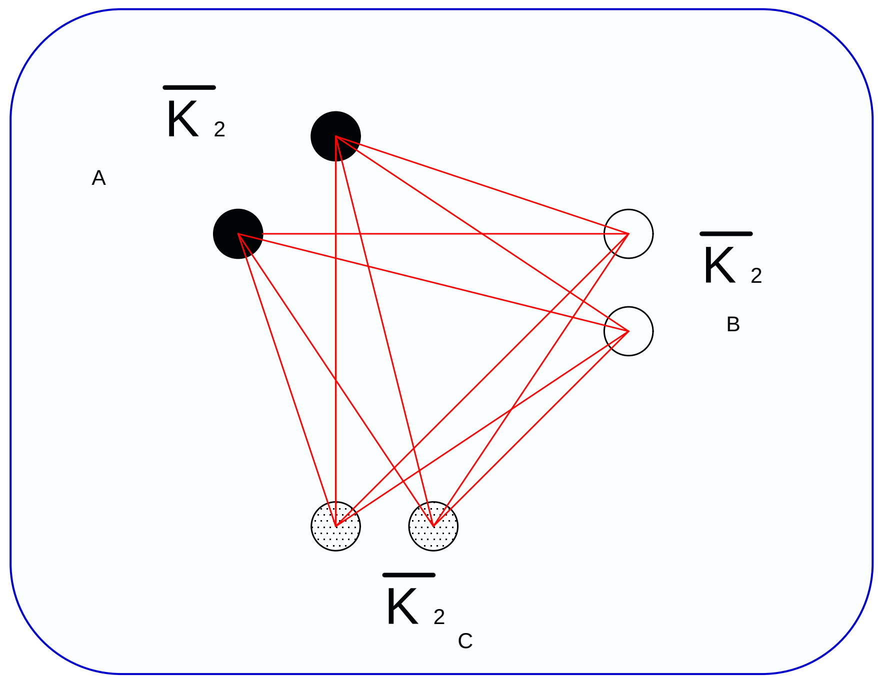


K_2とK_3の結び$K_2 + K_3$

演習問題3 (2)の解答例



この両者は同形である



$$E\left(\overline{K_2}+\overline{K_2}+\overline{K_2}\right)$$

$$=\{u_A u_B \mid u_A \in V(A) \cap u_B \in V(B)\}$$

$$\cup \{u_B u_C \mid u_B \in V(B) \cap u_C \in V(C)\}$$

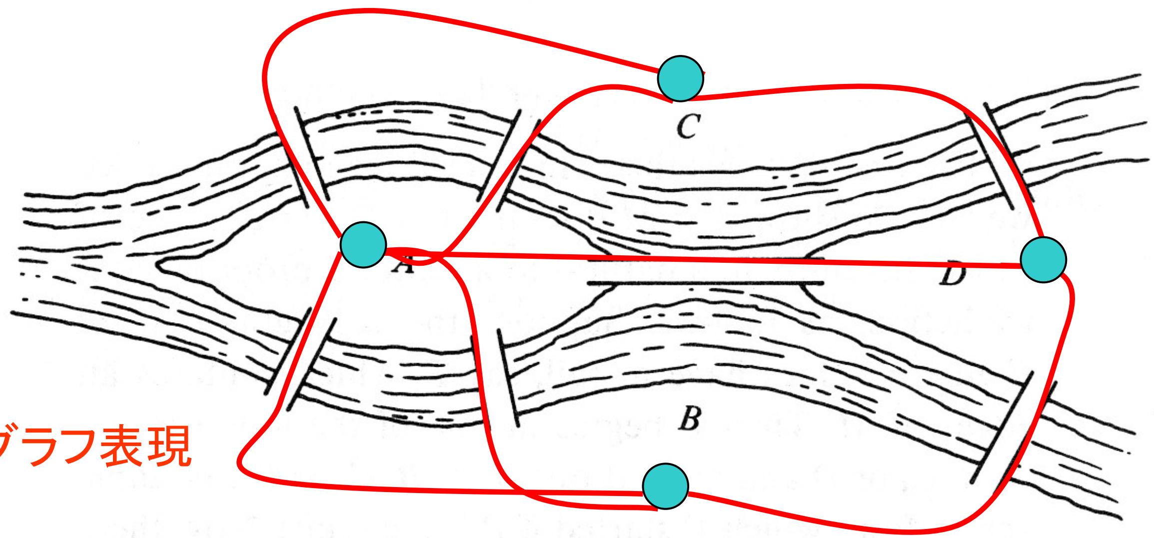
$$\cup \{u_C u_A \mid u_C \in V(C) \cap u_A \in V(A)\}$$

ケーニヒスベルグ橋の問題

"Introductory
Graph Theory"
G. Chartrandより

全ての橋を1回ずつ通ってもとにもどる閉路が存在するか？

点Aから出発し、全ての辺を1度ずつ通って点Aにもどる閉路はあるか？



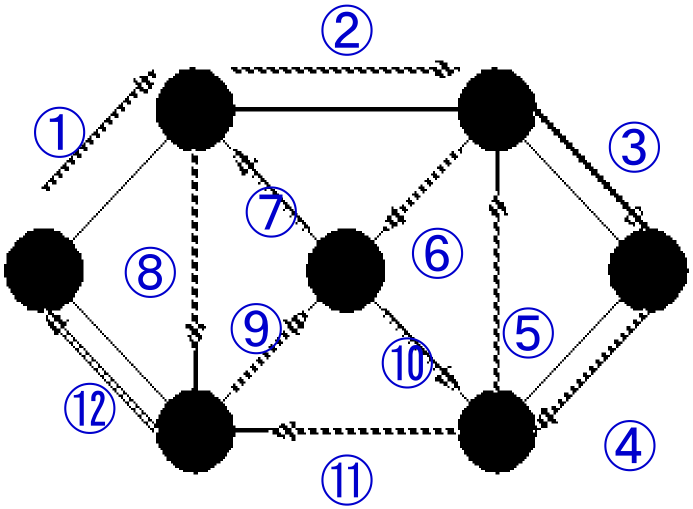
問題のグラフ表現

オイラー・グラフ

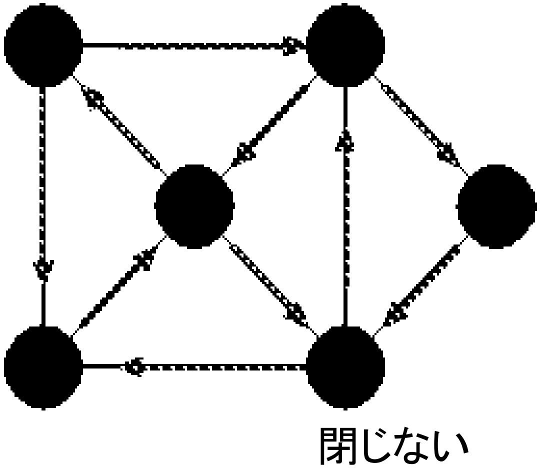
オイラー・グラフ (Eulerian graph) : 全ての辺を含む閉じた小道がある連結グラフ

半オイラー・グラフ(semi-Eulerian graph) : 全ての辺を含む小道がある連結グラフ

（閉じてなくてもよい）



Eulerian graph

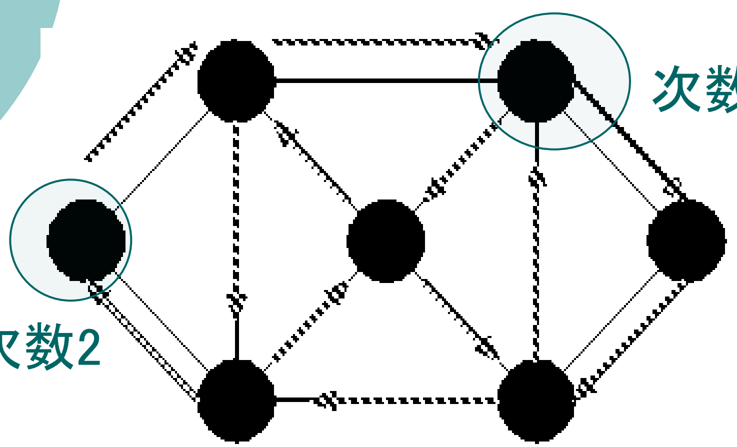


Semi-Eulerian graph

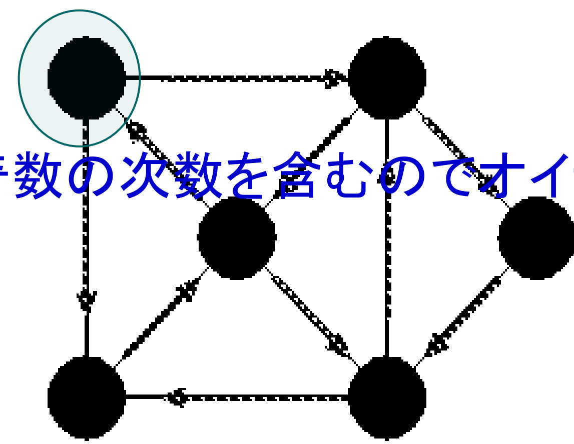
⇒ オイラー・グラフである条件は何か？

定理6・2とその証明 #1

連結グラフGがオイラー・グラフであるための必要条件はGの各点の次数が全て偶数であることである。



Eulerian graph



Semi-Eulerian graph

（証明）

必要性 ⇒　Gのオイラー小道がある点を通過する毎に2を加えていくと、全ての辺はちょうど1回ずつ含まれるので、各点でこの和はその点の次数に等しく、それは偶数。

定理6･2とその証明 #2

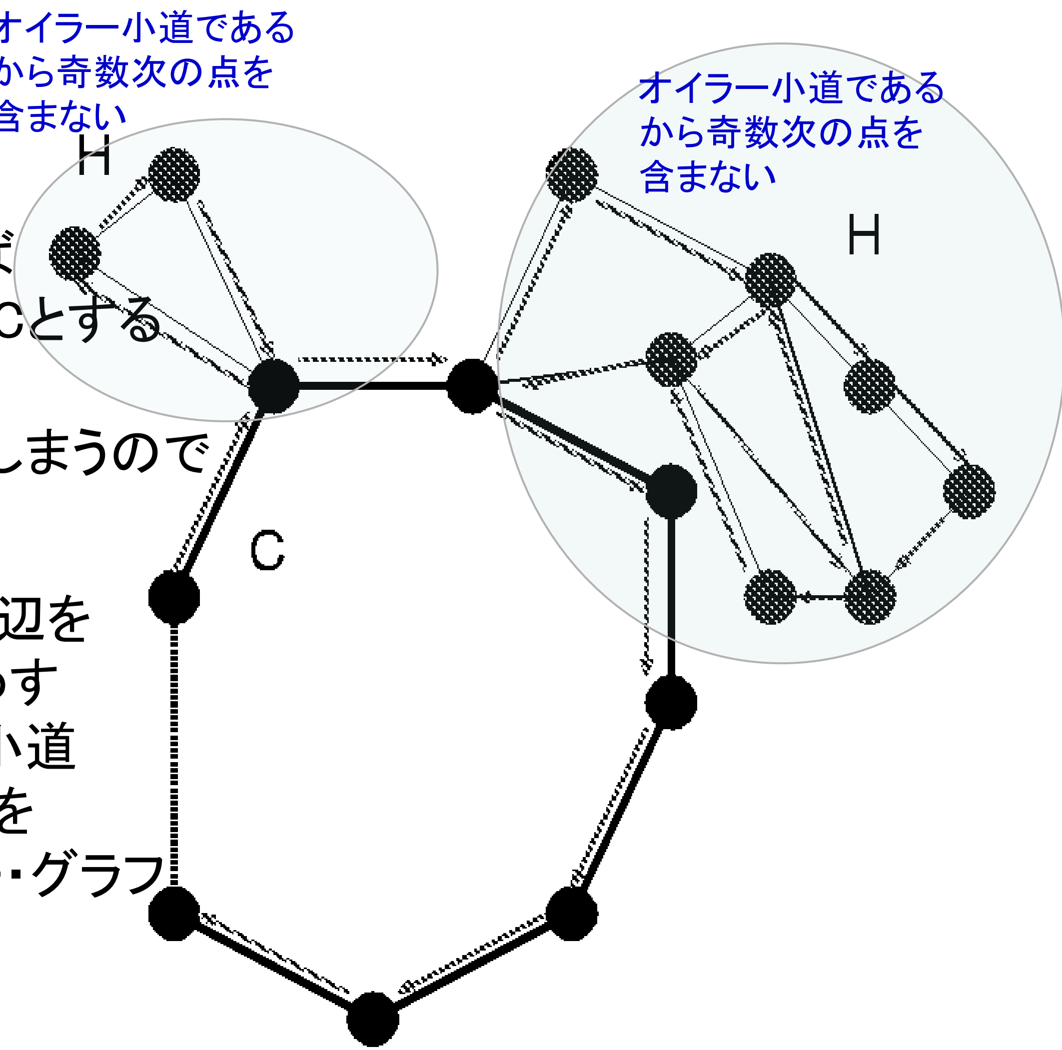
（証明）

十分性 （アウトライン）←

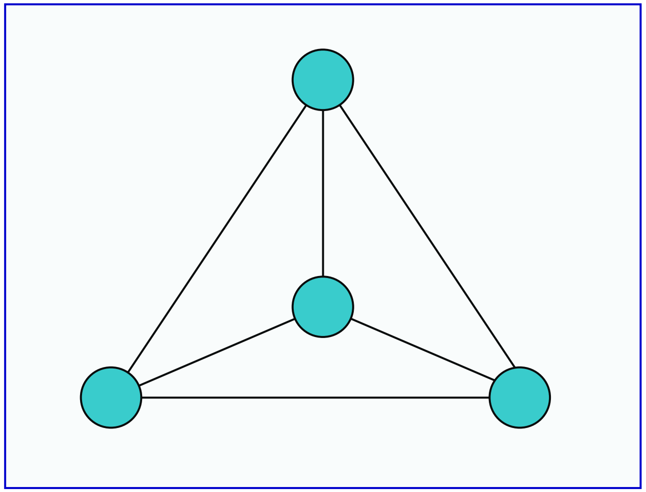
各点の次数が偶数であり、連結ならば必ず閉路を含む（補題　6･1）。これをCとする

$G \subset C$　なら証明が終わってしまうのでこれは考えない。

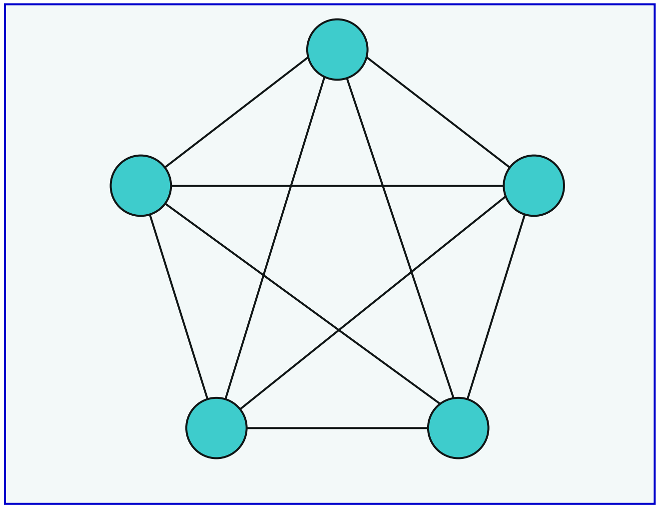
C上の任意の点からスタートし、Cの辺をたどり、Hの孤立点でない点に出くわすたびに、その点を含むHのオイラー小道をたどり、その点に戻る･･･とう操作を行い、スタート点に戻れば、オイラー・グラフが得られる。



例題 6.1 (1)



オイラー・グラフでない



オイラー・グラフである

完全グラフの場合には

$$n-1=\text{偶数}$$

つまり、点数が奇数の場合に限り、オイラー・グラフとなる。

例題 6.1 (2)

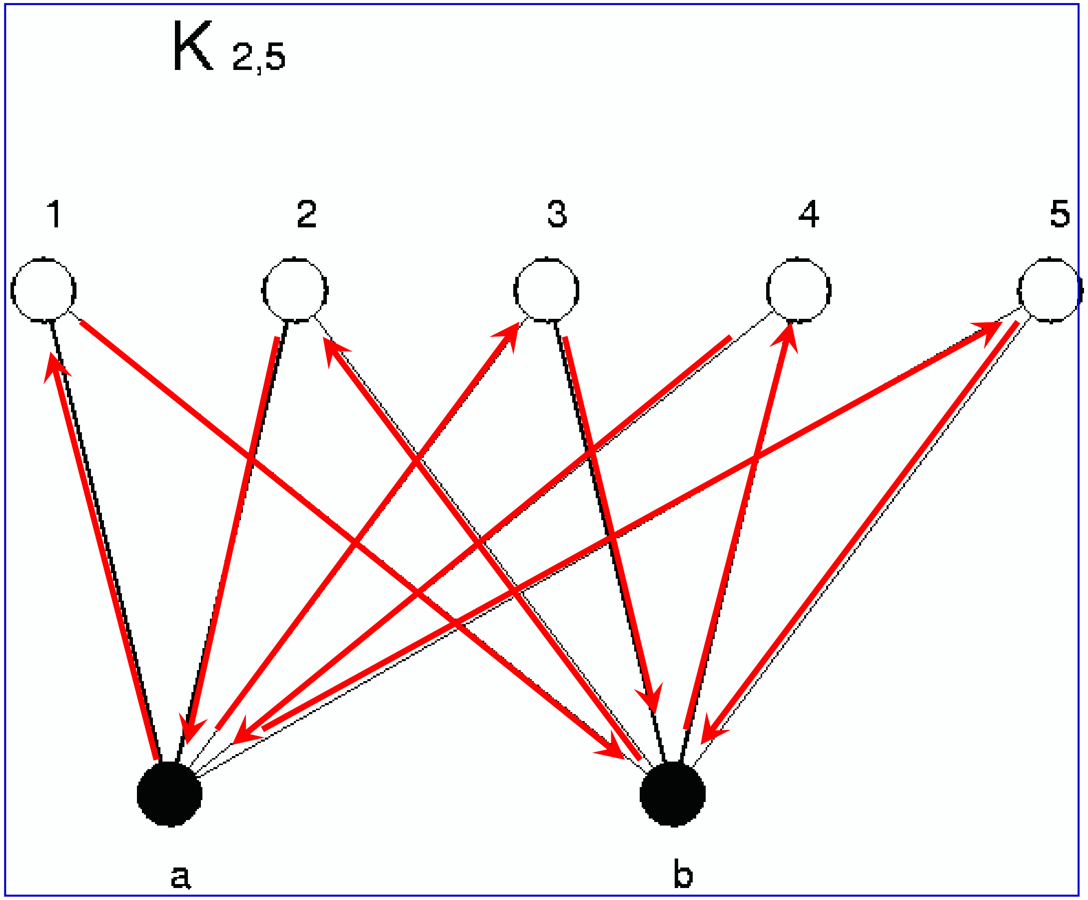
$K_{s,\,t}$ に関しては

$s \geq 2$, かつ, t が奇数ならば

a→1→b→2→a→3→b→4→a
→5→b

のような経路でオイラー小道を作ることは可能。

オイラー閉路をもつオイラーグラフになるためには、tが偶数であることが必要になる



半オイラー・グラフ

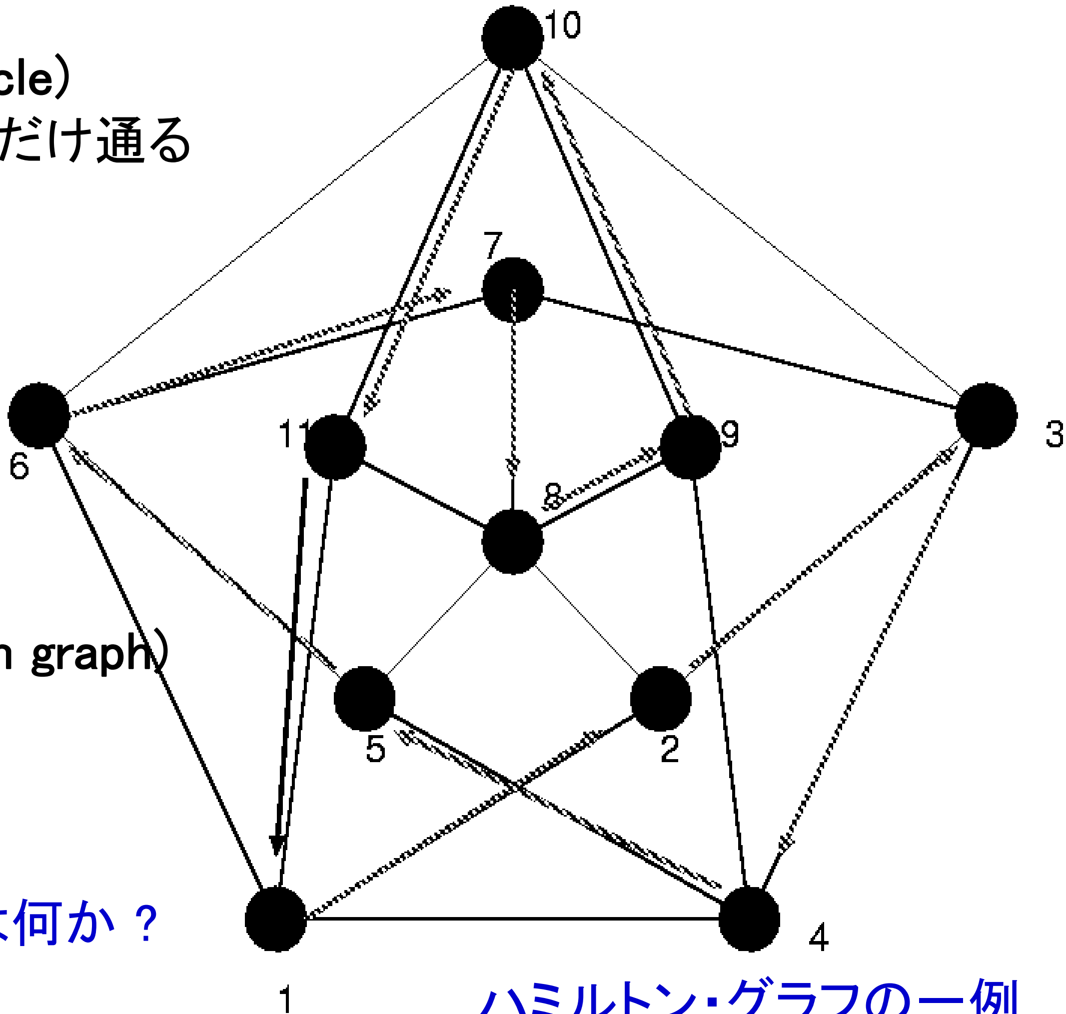
ハミルトン・グラフ

ハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle)
: グラフGの各点をちょうど一度だけ通る
閉じた小道

ハミルトン・グラフ(Hamiltonian graph)
: ハミルトン閉路によりなるグラフ

半ハミルトン・グラフ(semi-Hamiltonian graph)
: 全ての点を通る道があるグラフ
(閉じなくてよい)

⇒ ハミルトン・グラフである条件は何か？



ハミルトン・グラフの一例

Ore (オーレ)の定理

単純グラフGには $n \geq 3$ 個の点があるとする。隣接していない任意の2点 v, w に対し

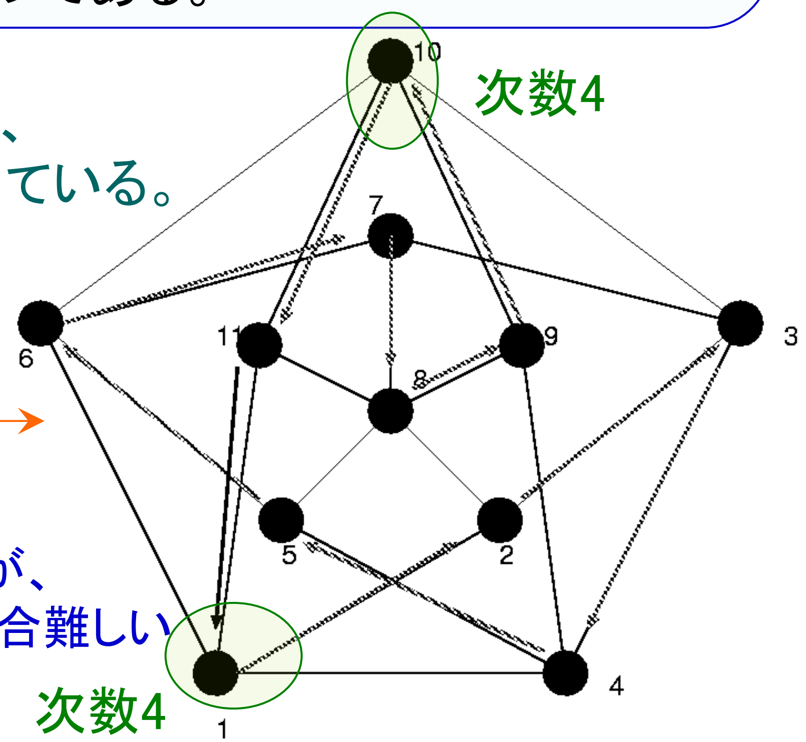
$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

が成立するとき、Gはハミルトン・グラフである。

Oreの定理

直観的には各点への接続辺が十分多ければ、
ハミルトン閉路があるであろうということを言っている。
これは**十分条件**であることに注意。

このグラフはOreの定理を
満たさないが、ハミルトン・グラフである



「ハミルトン・グラフであることを示す」ことは易しいが、
「ハミルトン・グラフでないことを示す」のは多くの場合難しい

Oreの定理の証明(アウトライン)

（証明）

「グラフGはハミルトンではないが、条件式を満たす」として矛盾を引き出す。

Gがぎりぎりハミルトンでない、とすると、全ての点を含む道：

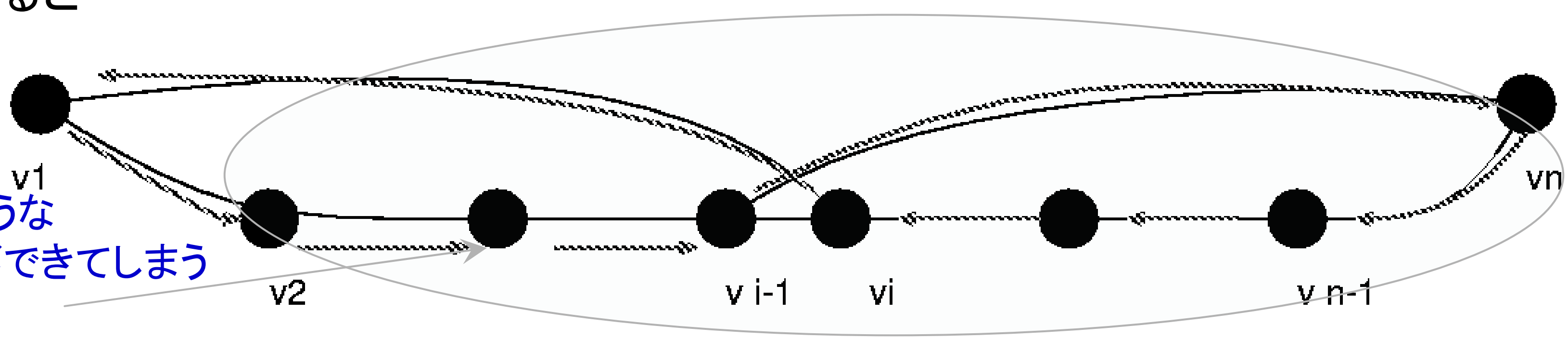
$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots \to v_n$$

仮定より隣接しない

がある。

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$$

とすると



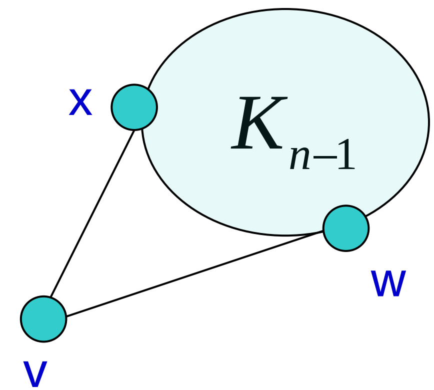
このような
閉路ができてしまう
（矛盾）

例題6.2

図のようなグラフの辺数は問題に与えられた

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$$

となる。



オーレの定理をぎりぎり満たす

K_{n-1}を構成する任意の点u_1と点vの次数和は

$$\deg(u_1)+\deg(v)=\boxed{n-2+2=n}$$

で定理を満たす.

K_{n-1}の辺を削除し,代わりにこの辺でvとK_{n-1}の1辺を結ぶと, 辺を削除した点をzとすれば

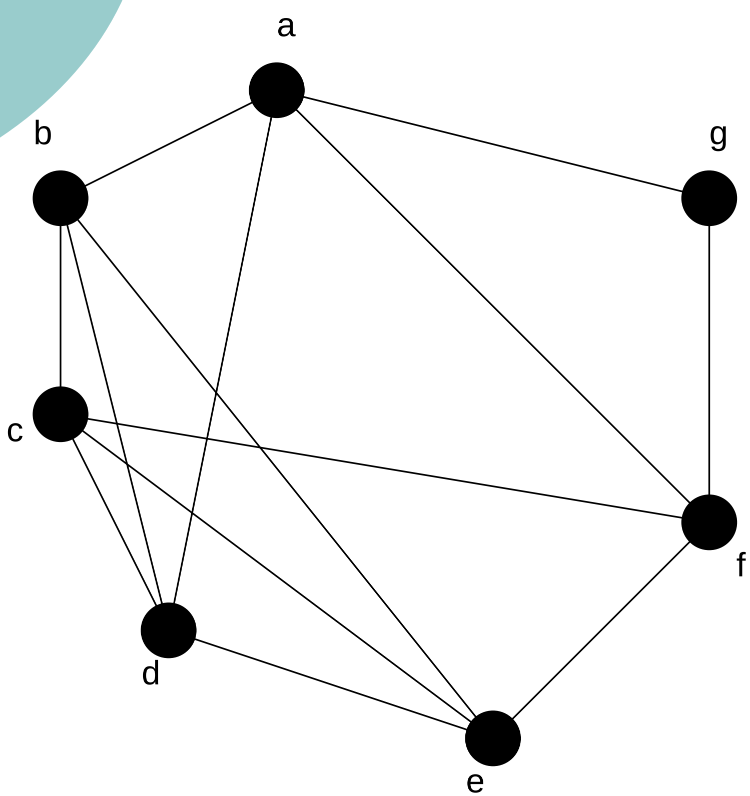
$\deg(v)+\deg(z)=3+(n-3)=n$で定理を満たす.

この操作を繰り返しても、オーレの定理が破れることはない。

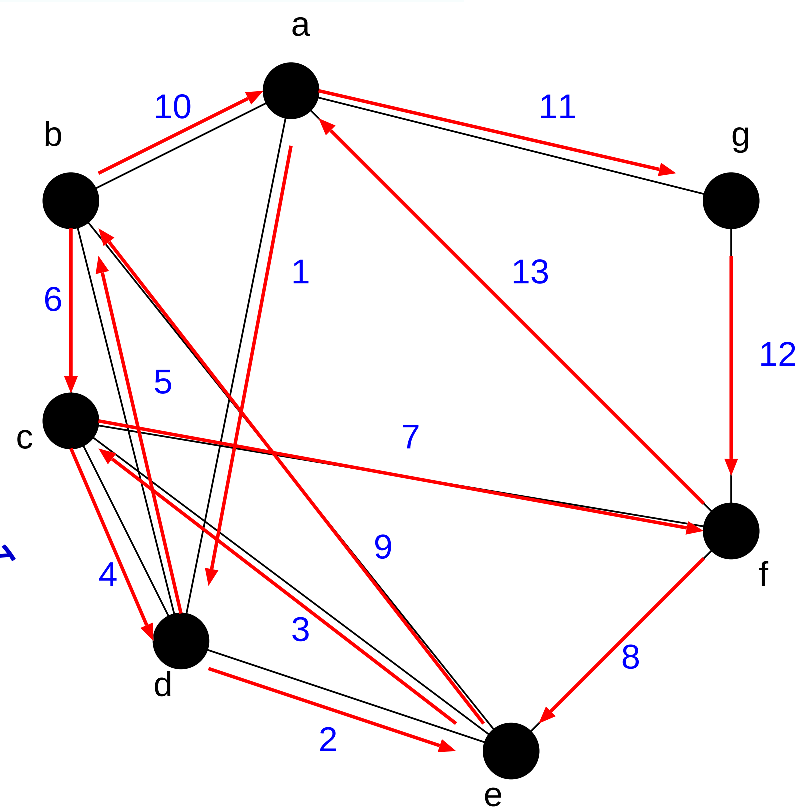
例題6.3の1

会場	a	b	c	d	e	f	g
道数	4	4	4	4	4	4	2

全ての次数
が偶数なので
一筆書き可能



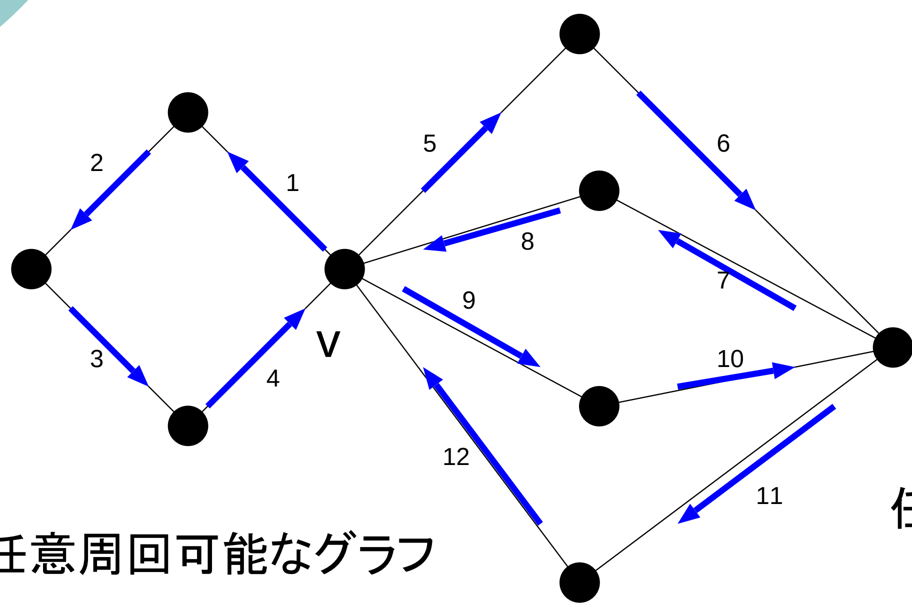
フラーリー
のアルゴリズム
より



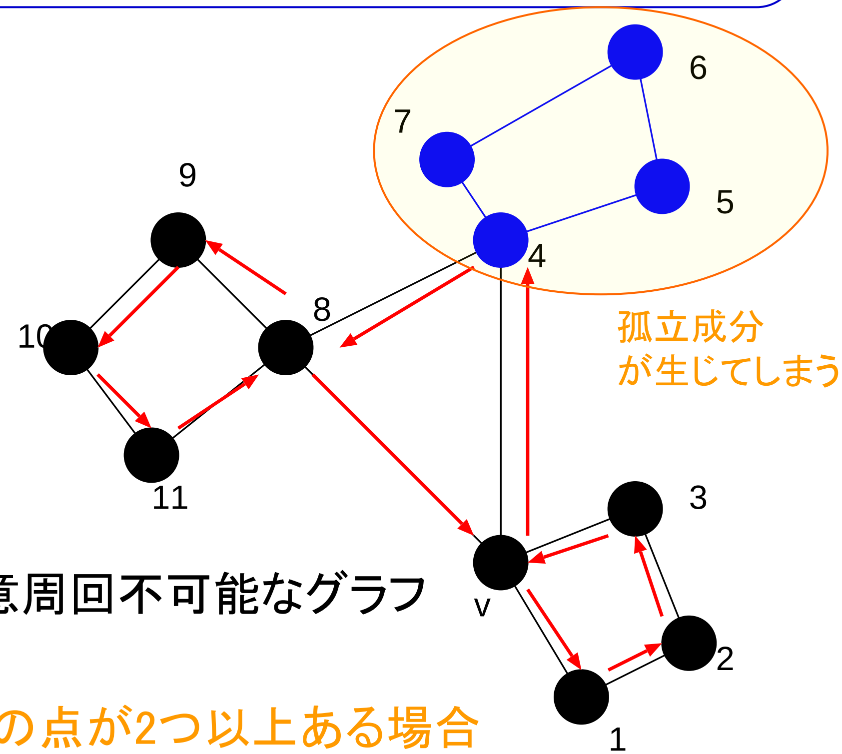
例題6.3の2(任意周回可能性)

ある点vからスタートする限りは、同じ辺を2度と通らないようにして勝手な方向をたどればオイラー小道が得られる

任意周回可能



任意周回可能なグラフ

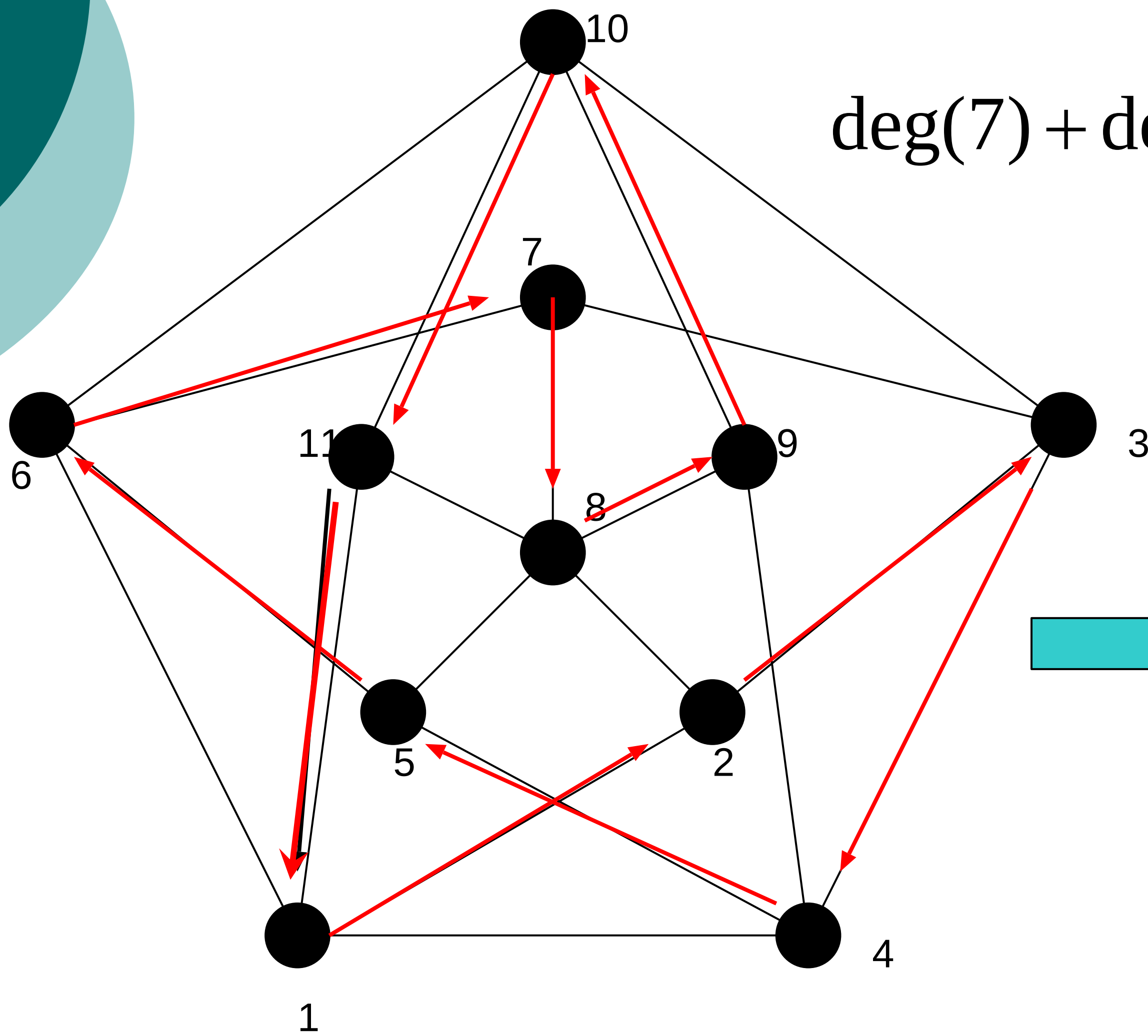


任意周回不可能なグラフ

次数4以上の点が2つ以上ある場合
に孤立成分が生じてしまう

例題6.3の3

（オーレの定理を満たさないハミルトングラフの例）

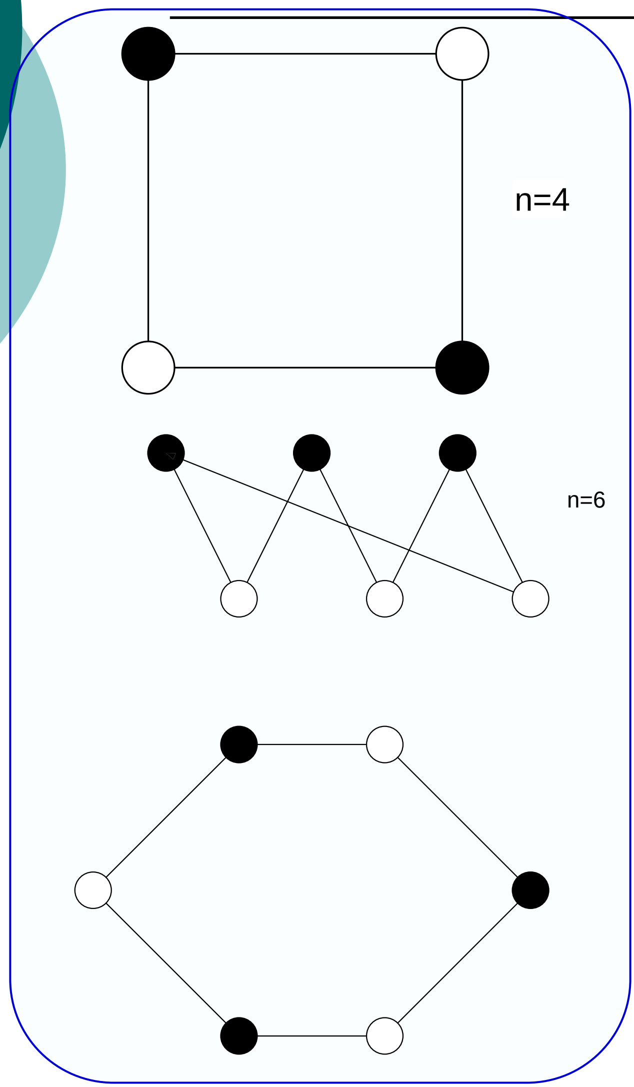


$$\deg(7)+\deg(10)=3+4=7<11$$

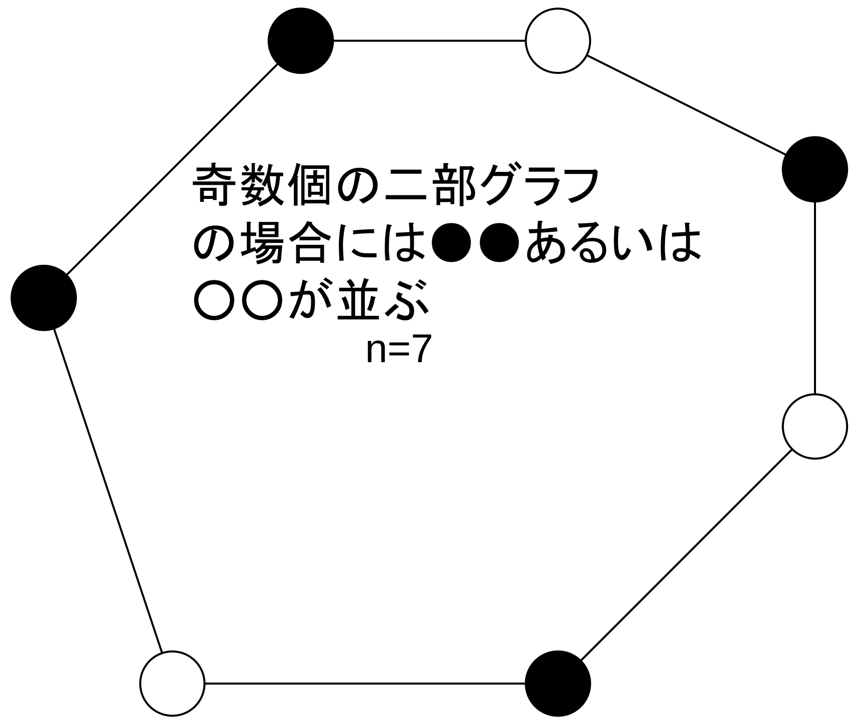
オーレの定理を満たしては
いないが、ハミルトンである

オーレの定理は
ハミルトンであるための
十分条件

例題6.4の1



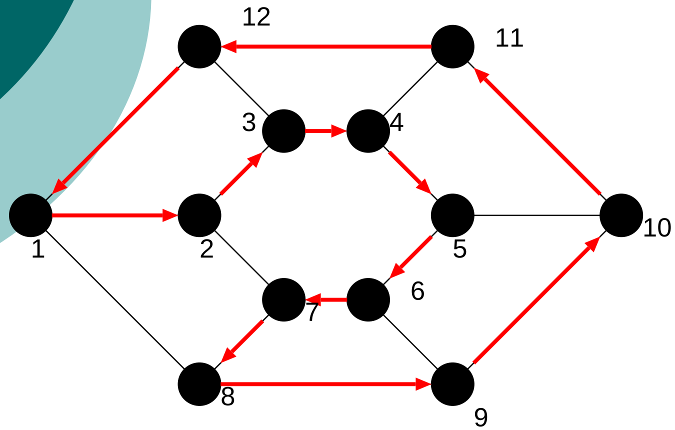
偶数個の点からなる二部グラフは
○●を交互に並べることができて、ハミルトン

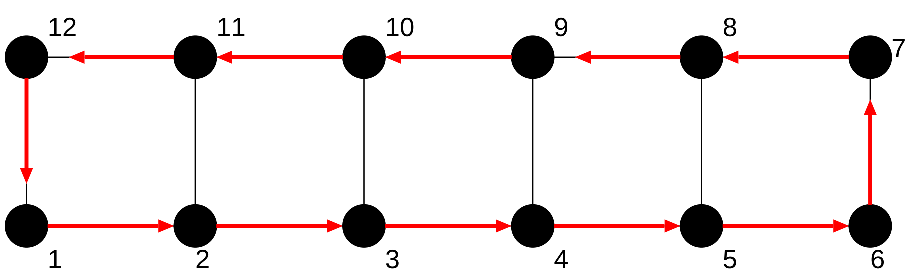


奇数個の二部グラフ
の場合には●●あるいは
○○が並ぶ

例題6.4の2

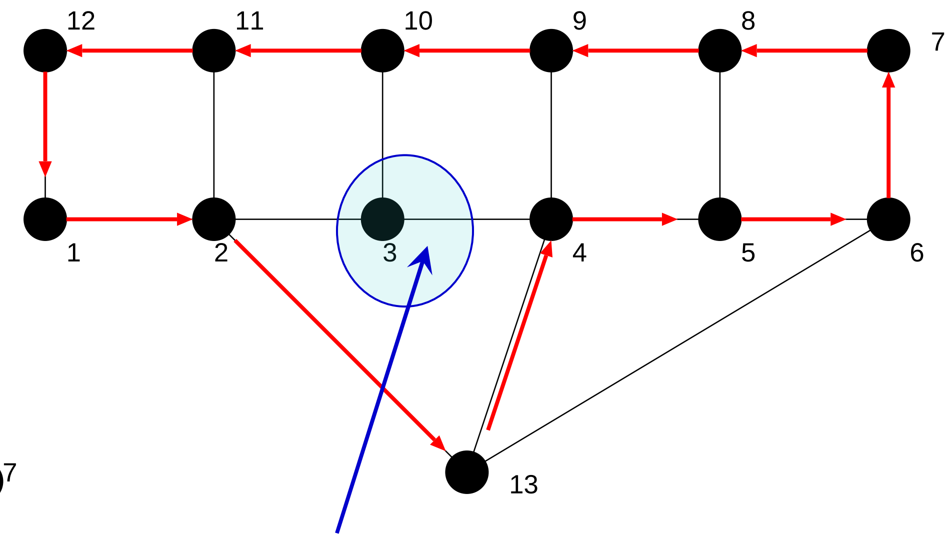
問題に与えられた中央の●を抜いたグラフとその同形グラフ





明らかにハミルトンである

問題に与えられたグラフ



例えば赤矢印の経路をとるとこの点を訪れることはできない。