



Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2006
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/15412
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html ; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory06_slide6.pdf (第6回講義スライド)



[Instructions for use](#)

グラフ理論 #6

第6回講義 5月15日

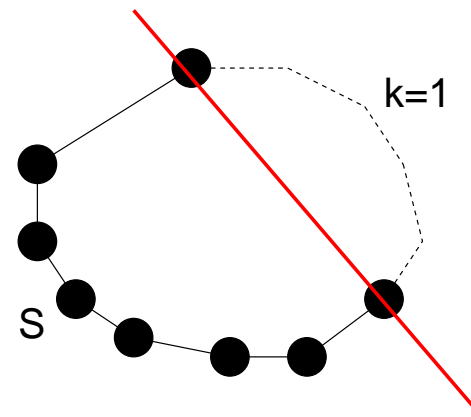
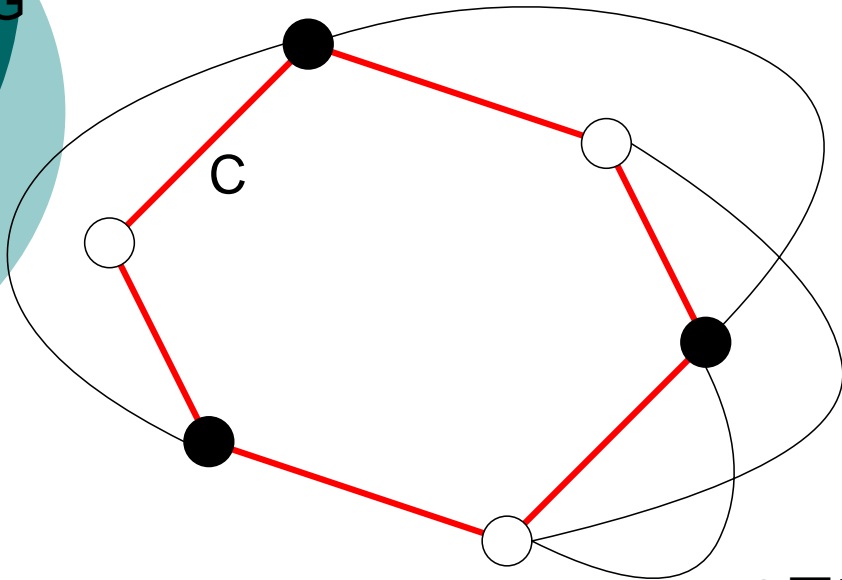
--- 木とその性質 ---

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題5 の解答例

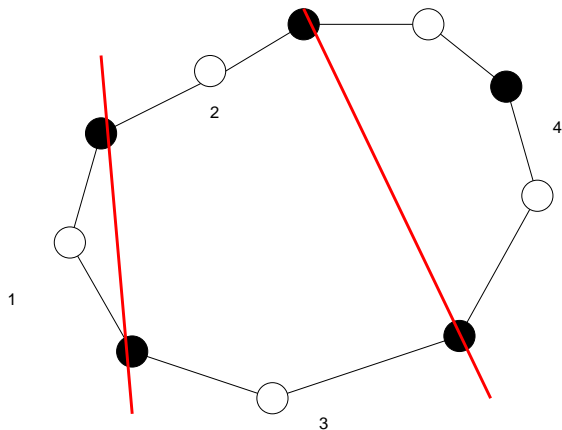
グラフGはハミルトンであるから
閉路Cを含む



Sの要素が全て隣接している場合、 $G-S$ の成分は1

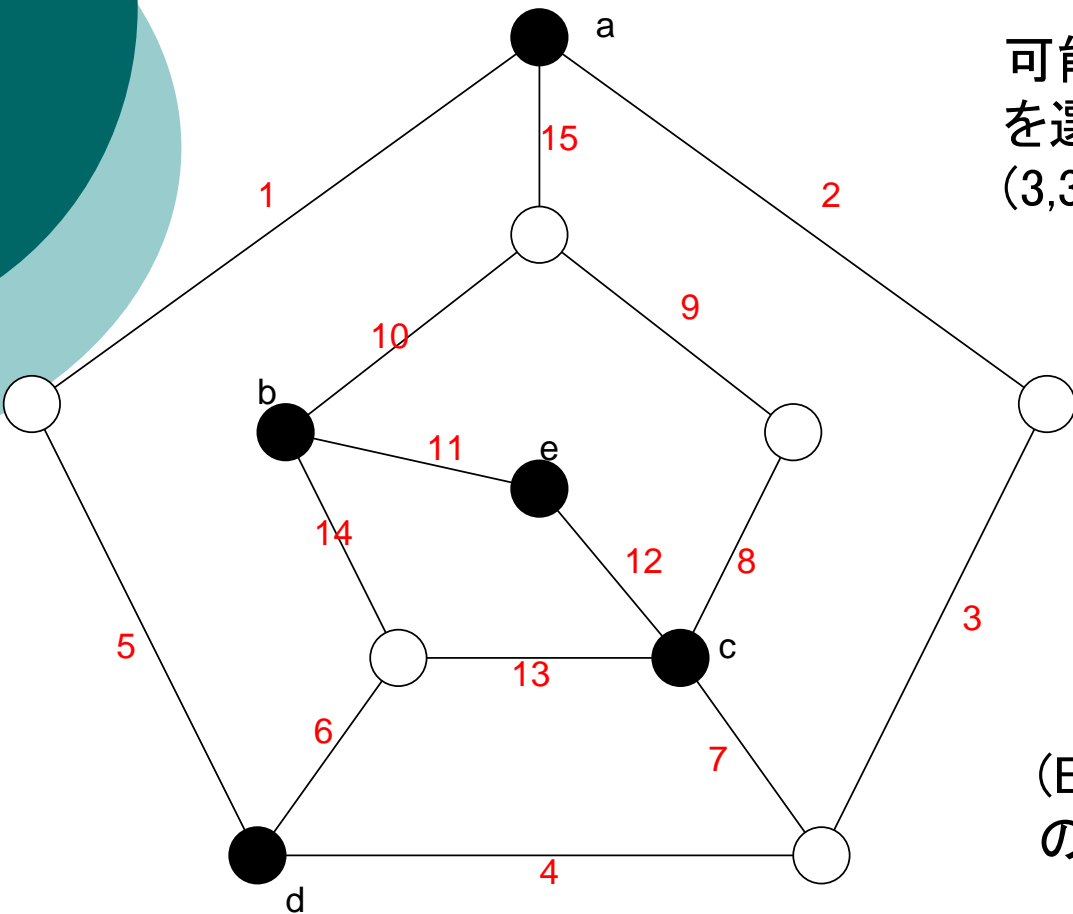
Sの要素が全て隣接していない場合
 $G-S$ の成分はkである

従って、 $G-S$ の成分数は k 以下



非ハミルトン性の示し方

(辺数に関して矛盾を引き出すやり方)



可能な限り互いに隣接していない点を選び出し、その次数を勘定する
(3,3,4,3,2)

ハミルトン閉路を構成しない辺数
 $(3-2)+(3-2)+(4-2)+(3-2)$
 $+(2-2)=5$ (本)

(A) ハミルトン閉路の辺数
 $=15-5=10$ (本)

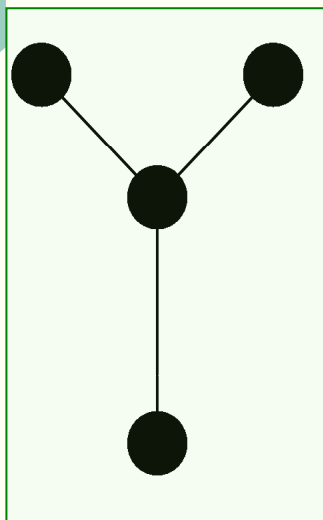
(B) 11個の点からなるハミルトン閉路
の辺数=11(本)

(A) < (B) となりハミルトン閉路はできない

木と林

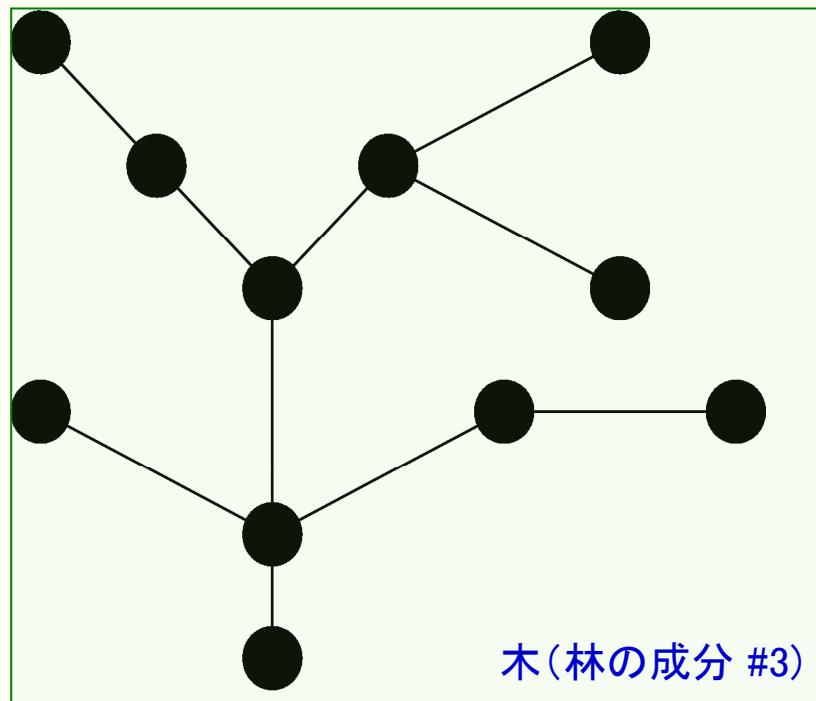
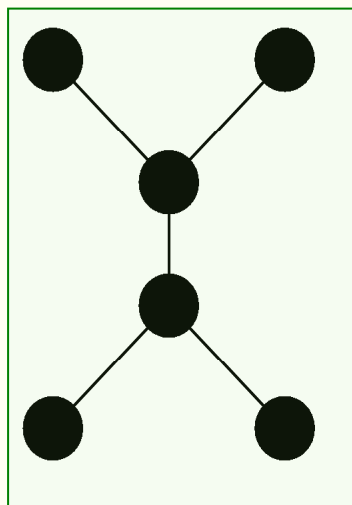
林 (forest) : 閉路を含まないグラフ

木 (tree) : 連結な林



木 (林の成分 #1)

木 (林の成分 #2)



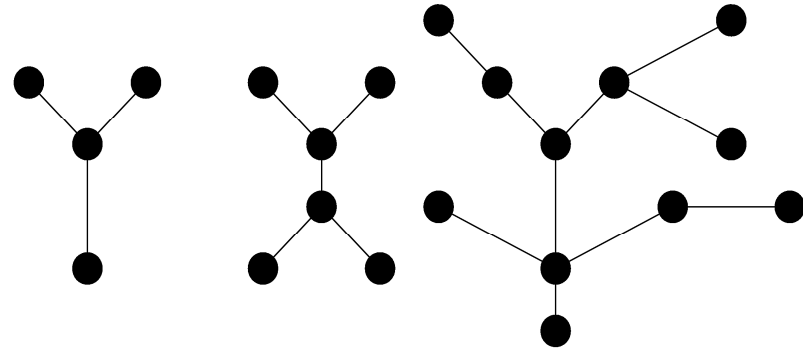
木 (林の成分 #3)

林

定理9・1

点 n 個からなるグラフ T に対し、次の各命題は同値である

- (i) T は木である
- (ii) T には閉路が無く、辺が $n-1$ 本ある
- (iii) T は連結であり、辺が $n-1$ 本ある
- (iv) T は連結であり、全ての辺は橋である
- (v) T の任意の2点を結ぶ道は丁度1本である
- (iv) T に閉路は無いが
新しい辺をどのように加えても
閉路ができ、しかも、1個の閉路である



各同値性の証明は教科書参照(以下、この事実のみを使う)

系9・2

林Gにはn個の点とk個の成分があるとする。このとき、林Gにはn-k本の辺がある

(証明)

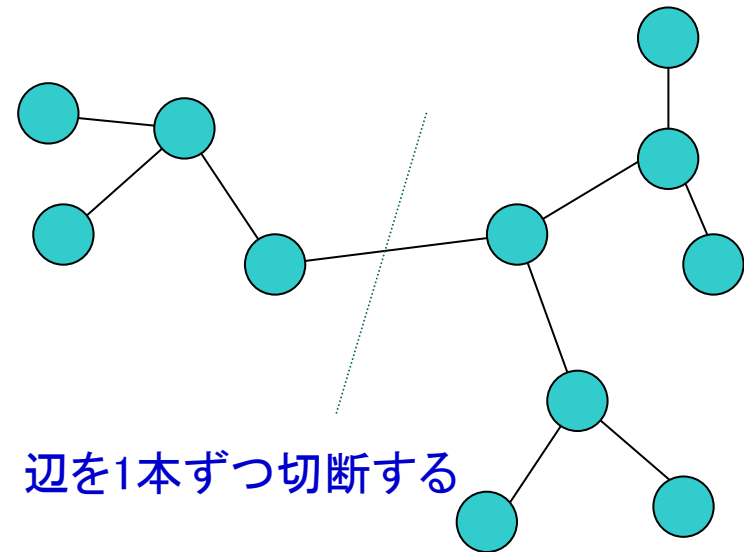
閉路が無く連結であるとする、n-1本の辺がある。これから辺を1本ずつ切断する操作を進めると

1本辺を切断 ⇒ 成分 2、辺数 n-2

2本辺を切断 ⇒ 成分 3、辺数 n-3

.....

K-1 本辺を切断 ⇒ 成分 k、辺数 n-k



系9・3

単点でない木は、少なくとも2点の端点を含む

(証明)

木T : $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $p \geq 2$, $E(T) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$

木の辺の本数は

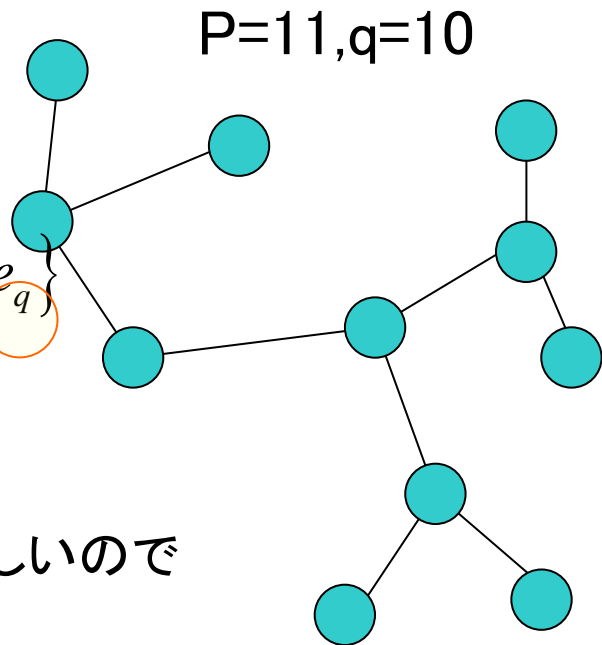
$$q = p - 1$$

定理9.1 (iii)

握手補題より、辺の総数の2倍はグラフの次数に等しいので

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q = 2(p-1)$$

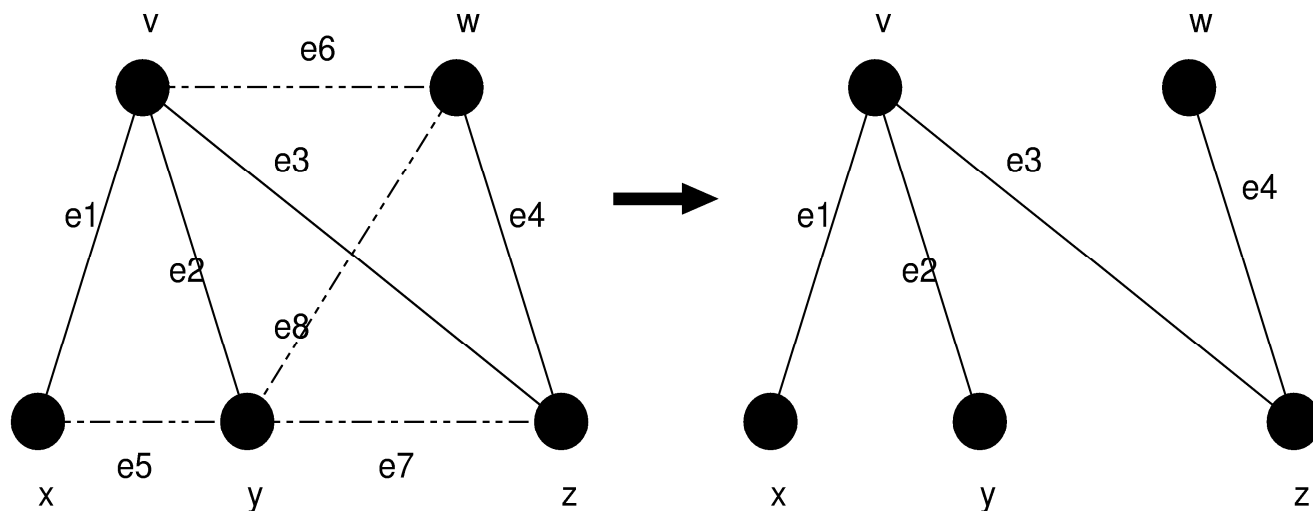
木の端点が2つ、つまり、 $p=0,1$ であるとする
点の数が2以上であるグラフの次数(>0)の定義に反する。



全域木と全域林

全域木 (spanning tree) :

連結グラフGに対し、閉路が無くなるまで辺を除去して残るグラフ



閉路階数 :

$$\gamma(G) = m - n + k = 4$$

(全域林(木)を得るために切断すべき辺の本数)

カットセット階数 :

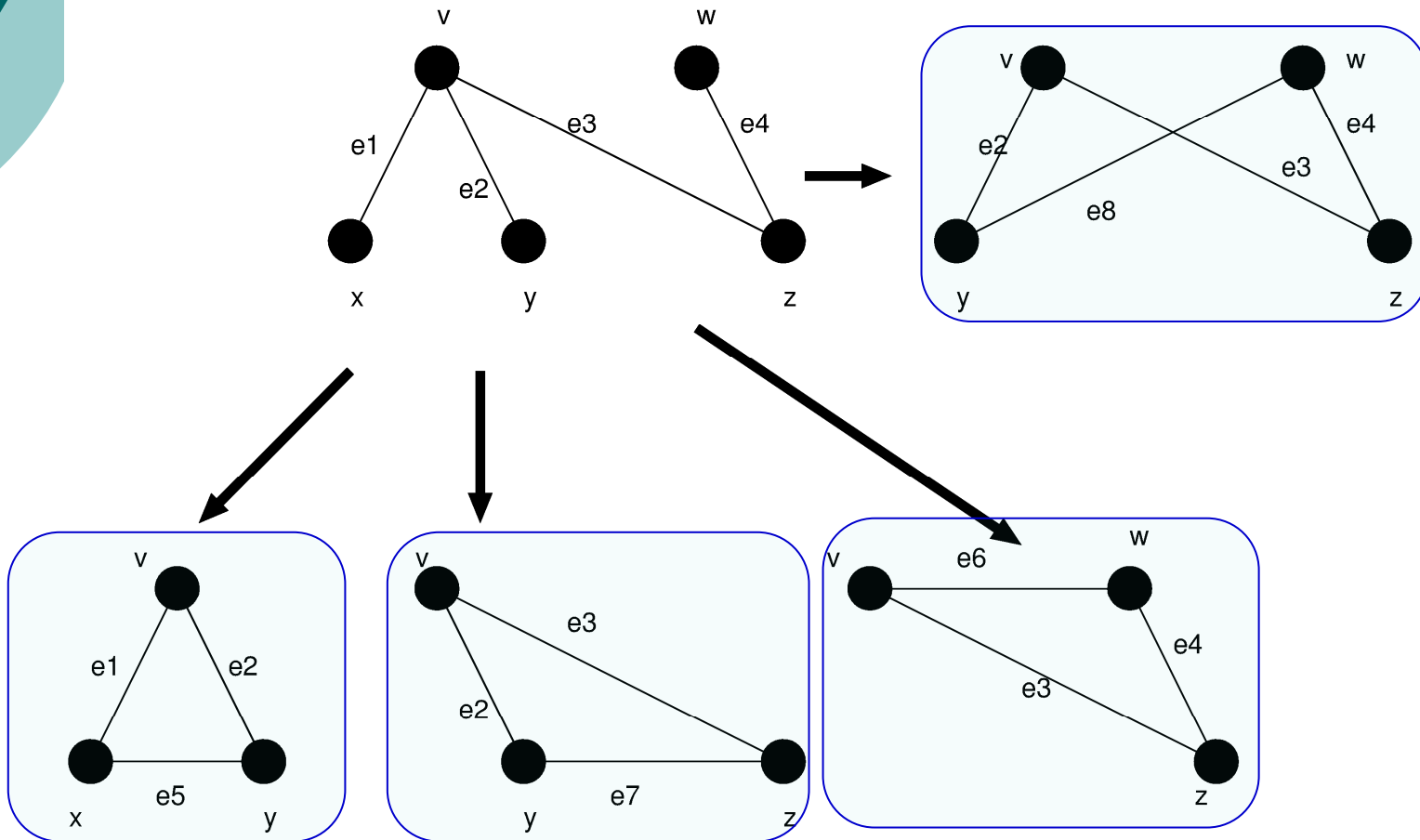
$$\xi(G) = n - k = 4$$

(全域木の辺数)

全域林 (spanning forest) : n個の点とm本の辺、k個の成分があるとし、Gの各成分に対し、閉路が無くなるまで辺を除去する操作を繰り返し得られるグラフ

基本閉路集合

基本閉路集合 : Tに含まれないGの任意の辺を一つTに付加すると一つずつできる閉路の集合

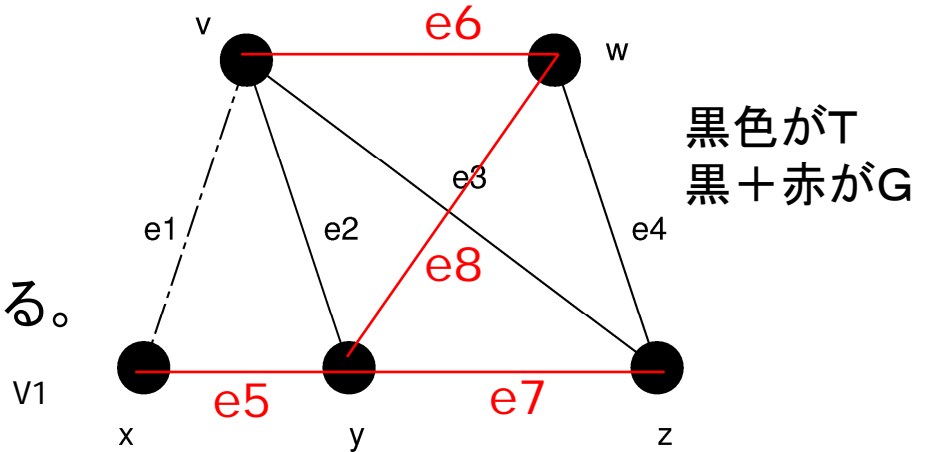


基本カットセット集合

基本カットセット集合

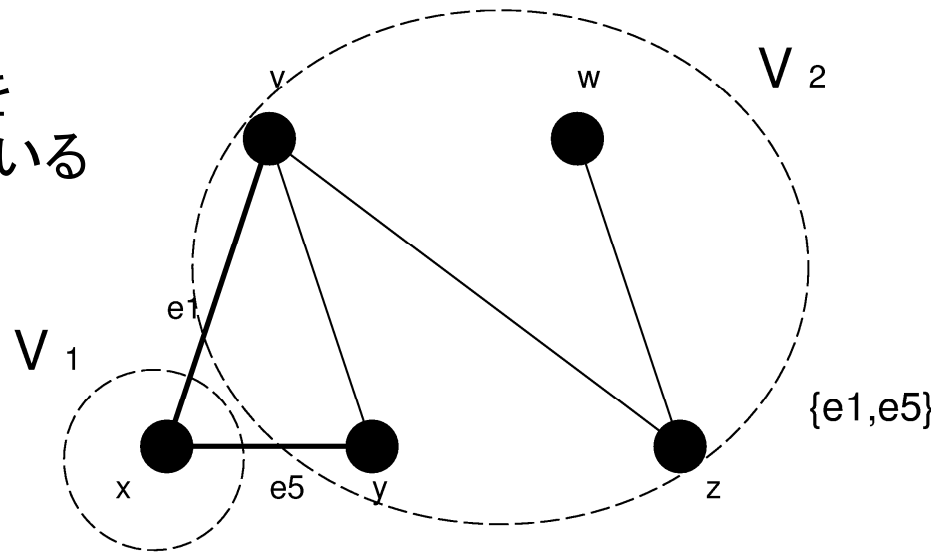
: T の各辺を除去して得られる
カットセット集合

e_1 で木を切断すると V_1 と V_2 に分離する。



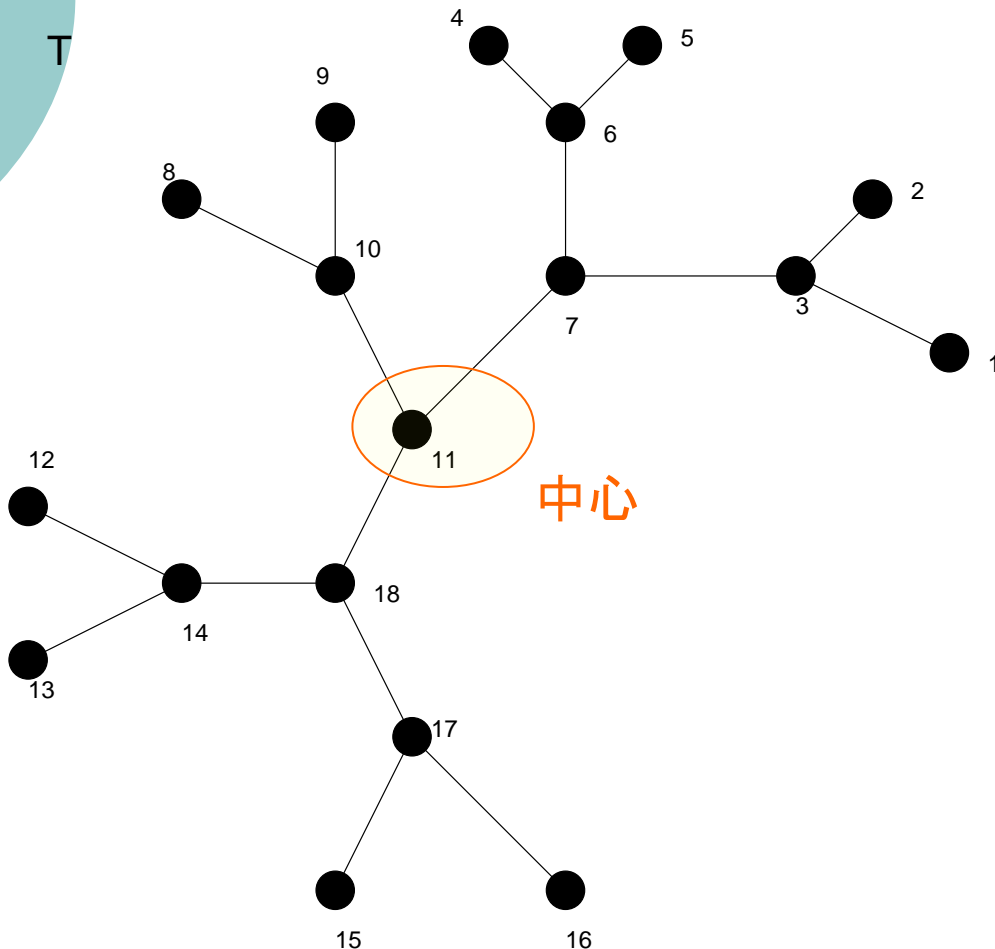
この e_1 と G で V_1 に接続していた辺 e_5 を
組んだものは G のカットセットとなっている

この他にも
(e_2, e_5, e_7, e_8)
などがある。



例題7.1 (1)

グラフGの中心：他点との間の距離の最大値ができるだけ小さい点 v



端点を削除していく

1回目に削除される点
{1,2,4,5,8,9,12,13,15,16}

2回目に削除される点
{3,6,10,14,17}

最後に削除される点
{7,18}

例題7.1 (2)

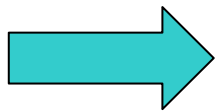
- (I) 点1に接続している成分と
点2に接続している成分が等しい場合



辺 $2v$, $v1$ を削除して中心 v が得られる

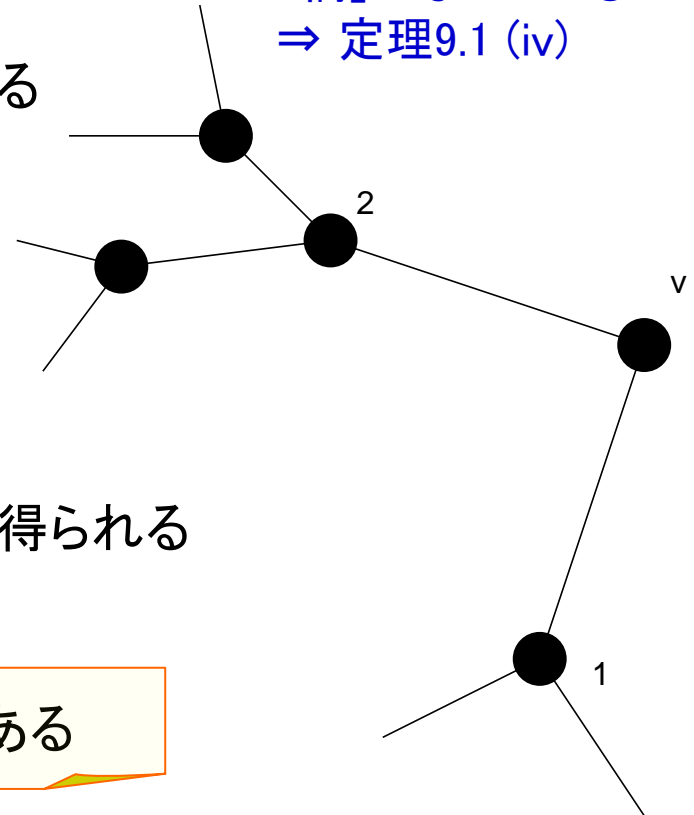
木の全ての辺は
「橋」になっている
⇒ 定理9.1 (iv)

- (II) 点2に接続している成分
> 点2に接続している成分の場合



辺 $v1$ を削除して、2つの中心 2 , v が得られる

どんな木でも中心は1つか2つである

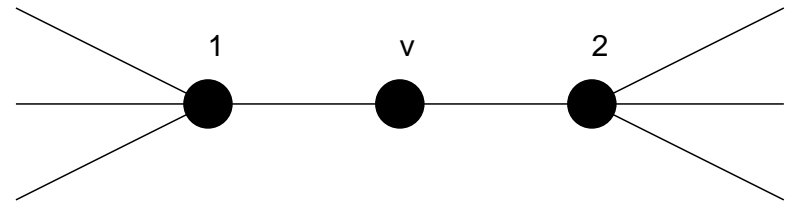


例題7.1 (3)(4)

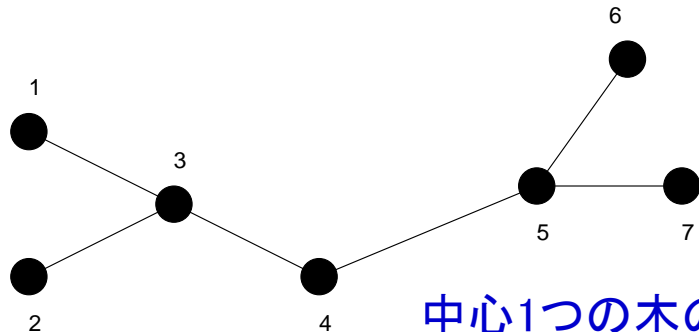
木の中心が2つあり、それらが隣接していないと仮定する。

このとき、中心1,2は点vを介して接続している

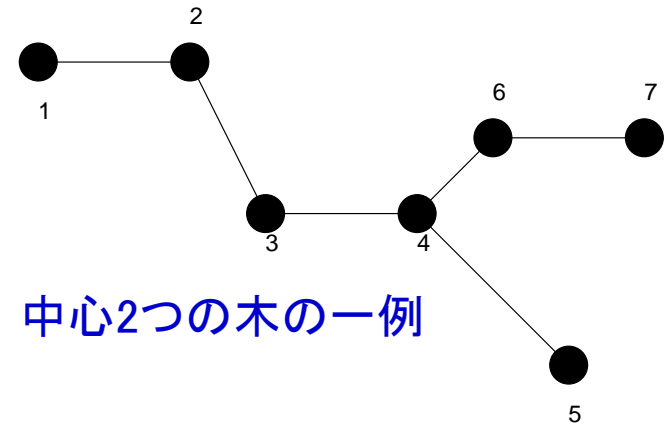
このとき、点1,2とこの中心vの接続辺を除去すると、中心がvの1つになるので仮定に反する。



木の中心が2つある場合、それは隣接している

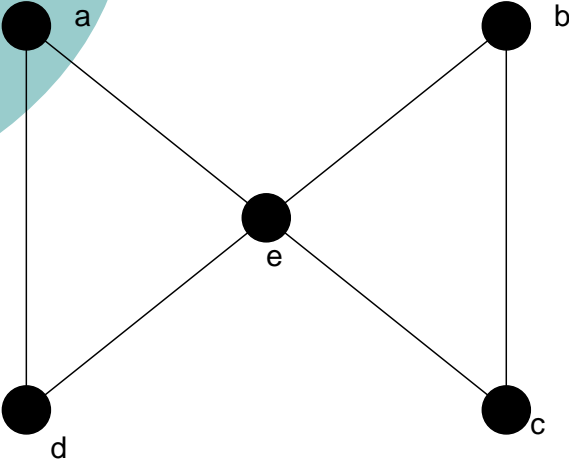


中心1つの木の一例

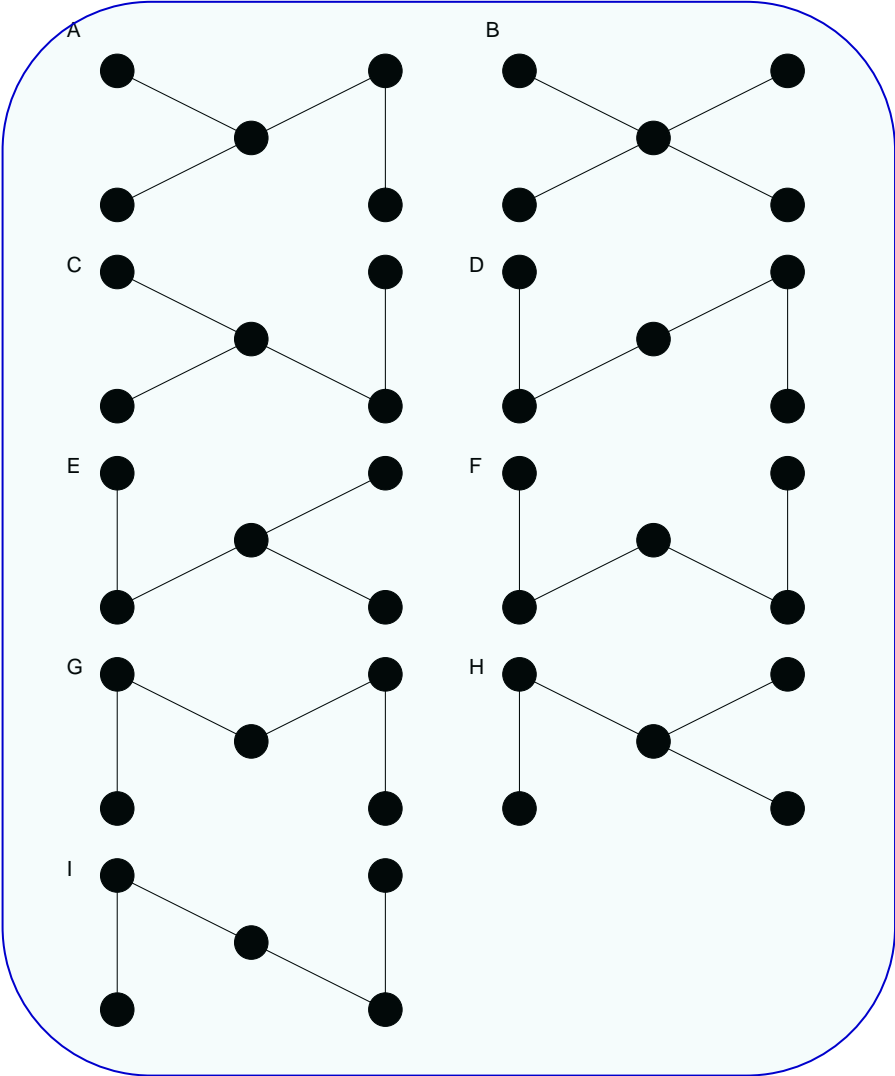


中心2つの木の一例

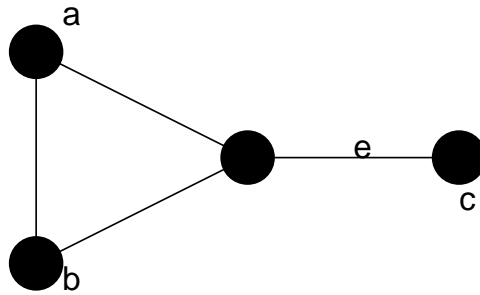
例題7.2 (1)



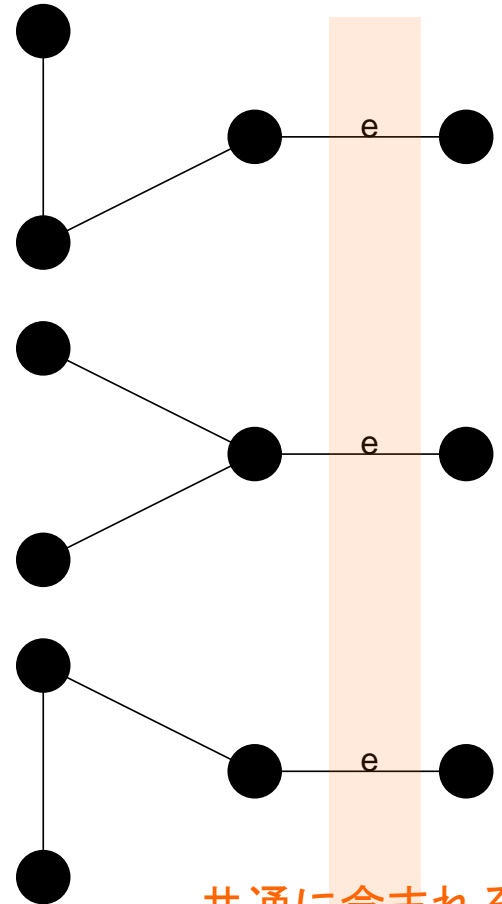
全ての全域木



例題7.2 (2)



グラフGの辺集合 C^* が、Gのどの全域木にも共通するならば、 C^* はカットセットである



共通に含まれる辺