T. Kaczynski, K. Mischaikow, and M. Mrozek:
Computational Homology
Applied Mathematical Sciences 157, Springer-Verlag, 2004 年, 480 ページ

平岡裕章，坂上貴之

1 序

ホモロジー群はポアンカレによって 19 世紀末に導入された概念であり，代数的トポロジーという数学における一大分野の基礎となったものである．現代数学において重要な位置を占めるこの分野には当然のことながら数多くの良書があるが，本書はそのような状況においても全く新しい視点からのホモロジー理論の解説書となっている．すなわち，本書の狙いは計算機を用いた「計算ホモロジー理論」を構築することにあり，その理論・実装，及び幅広い応用までが丁寧に解説されている．

本文中にも述べてあるように，本書は読者を数学者に限定しておらず，広く科学に携わる研究者に向けて計算機を通したホモロジー理論を展開している．さらに，これまでの著者等の研究を基にしたホモロジー群の他分野への応用についての詳細な解説も含んでいる．具体的には，ホモロジー群を用いた計算機援用証明，画像処理，パターン認識問題への適用など多岐にわたる．また，この本に基づいて作成されたプログラム群パッケージ CHomP(Computational Homology Program) がインターネット上で配布されており (http://www.math.gatech.edu/~chom/ から取得可能)，計算機を用いて手軽にホモロジー群の計算ができるようになっていることは特筆すべき点である．

本書は大枠で 3 部構成となっている．第 1 部 (1 章〜7 章) は，計算機を用いてホモロジー群を計算する為に必要な理論の構築とその計算機への実装にあてられている．それを受けて第 2 部 (8 章〜11 章) には計算ホモロジー理論の応用に関する様々な話題がまとめられている．第 3 部 (12 章〜14 章) には本書を読み進めていく上で必要となる最低限度の集合・位相及び代数の基礎的事項が整理されており，適宜参照できるようになっている．以下，本書において本質的な箇所である第 1 部と第 2 部についてその内容を見ていこう．

2 計算ホモロジー理論

第 1 章においては，以後の議論で重要になる概念の入門的な解説が行なわれている．まず初めに，幾何学的な「穴」の構造を反映するホモロジー群の性質を利用した幾つかの応用例が考察されている．その後 $\mathbb{R}^2$ 上に対象を限定してホモロジー群を考察する事により，幾何学的な情報を代数的にどのように表現していくかについての基本的なアイデアを解説している．この部分は幅広い読者層を想定し，興味を損なわずに以降の議論へ進んで行けるようにしている点に著者等の気配りが感じられる．

第 2 章から計算機を用いた計算ホモロジー理論の本格的な議論が始まる．ここでまず最初に考えなければならないことは，どのような幾何学的対象が計算機を用いて扱い易いかという点である．デジタル画像においてピクセルと呼ばれる長方形がその構成単位になっていることからも想像がつくように，区間の直積を構成単位とし，それらの和集合で作ら

れる対象を考えれば, 計算機上での扱いが容易だと想像される．そこで，以下の区間の直積からなる集合 (これを基本方体[1]と呼ぶ)：

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n,$$
$$I_i = [l, l+1] \text{ or } [l, l], \quad l \in \mathbb{Z}$$

を考え，これらの有限個の和集合

$$X = \bigcup \{Q_k : \text{基本方体},\ k = 1, 2, \cdots, m\}$$

で表される集合を方体集合 (cubical set) と呼び，本書で扱う幾何学的対象としている．このような設定を採用すれば，実際の観測・実験データなどは有理数の直積で構成される事から，適当なスケーリングを施すことで原理的に上記の設定に持ちこむことができるので, その汎用性は高い．また得られた数値データの誤差 (観測誤差や計算機内での丸め誤差) があらかじめ分かっている場合には，その誤差分を区間として扱う事により，誤差を考慮した方体集合として数値データを幾何学的に扱うこともできる．

ここで導入された方体集合 X に対して $\mathcal{K}(X) := \{Q : \text{基本方体} \mid Q \subset X\}$ を方体複体と呼ぶことにする．これに対して，その代数的対象である鎖複体 $C_*(X)$ を考え，その上での境界作用素を導入することで方体集合 X のホモロジー群 $H_*(X)$ を定義していく．この過程は，通常の代数的トポロジーにおける議論と同様であるが, ここでの方体複体の導入の仕方から明らかなように，通常の単体ホモロジー理論や特異ホモロジー理論などに比べ，その計算機上での扱いが非常に容易になっている点に注意したい．ちなみに 5〜7 章において，連続写像に対して定まるホモロジー群上の誘導準同型写像を計算機上で構成していく際にも，方体複体として扱うことの有用性が確認される．

第 2 章の内容を計算機上で実装する方法が 3，4 章にまとめられている．まず 3 章で与えられた方体集合のホモロジー群を有限回のステップで計算する初等的なアルゴリズムを述べ，理論的に計算機上でホモロジー群の計算が可能であることを見る．しかしこの初等的な方法では実行時間がかかり過ぎるので，続いて 4 章ではより実用性の高い効率的なアルゴリズムが考案されている．その基本的なアイデアは鎖ホモトピーの概念を用いて鎖複体をより簡単なものに縮約していく事であり，これを用いてホモロジー群の計算に要する計算量を減らすことができる．代数の世界に存在する鎖ホモトピーが，計算機を通じて我々の目の前に現れるところが非常に面白い．また本書を通じてアルゴリズムの記述法には十分な配慮がなされているので，プログラミング経験が浅い読者にも理解しやすいものとなっている．

第 5 章から第 7 章では，連続写像 $f : X \to Y$ (X, Y は方体集合) からホモロジー群上の誘導準同型写像 $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ を計算機を用いて構成する方法が解説されている．まず 5 章において，f_* の構成に関する概観的な説明が第 1 章と同様のスタイルで行なわれている．数学的な定式化は第 6 章でなされているが，そこでは「多価写像」$F : X \rightrightarrows Y$ が重要な役割を果たす．ここで扱う多価写像とは，$x \in X$ に対して Y 内の方体集合 $F(x) \subset Y$ をその値として取るものとする．通常の代数的トポロジーでは連続写像 f からまず鎖写像

[1] 以後, 本書評で用いられる用語 “基本方体” は本書における elementary cube, “立方集合” は cubical sets の訳語である．これらの用語には既存の訳語が存在しなかったため, 一部の関係者の間で相談の上で創作されたものである．

$f_\sharp$ を導き，そこからホモロジー群上の誘導準同型写像 f_* が定義されるが，彼等のアイデアは連続写像 f から $f(x) \in F(x),\ \forall x \in X,$ を満たすような多価写像 F を導入し，これから鎖写像 $F_\sharp : C_*(X) \to C_*(Y)$ を構成することにある．その後，この $F_\sharp$ から通常の手続きに従って構成される $F_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ を用いて，f の誘導準同型写像を $f_* = F_*$ と定義するわけである．この一連の過程から定義される f_* は，X 上でのスケーリング作用を考えることで well-defined であることが確かめられる．第 7 章は第 6 章で構成された f_* の計算機上での実装方法の解説にあてられている．ここでも 3，4 章と同様に，アルゴリズムの各ステップごとに丁寧な解説が付けられている．

3　計算ホモロジーの応用

第 2 部はこれまでの計算ホモロジー理論の応用編となる．ここで紹介されている応用例は，現在著者等を中心に精力的に取り組まれている最前線の研究内容を含んでおり，今後の発展が期待される分野である．内容的には以下の 2 本柱で構成されている．

1 つ目は画像処理におけるホモロジー群の応用である (8 章)．まず脳内の幾何学的情報の抽出に関する応用例が示されている．すなわち，MRI(磁気共鳴映像法) を用いて得られる脳のスライス画像から脳内の 3 次元構造を方体集合を用いて構成し，そのホモロジー群を計算している．また他にも Cahn-Hilliard 方程式とよばれる偏微分方程式に現れる解の時間発展の複雑なパターンに対して，その定性的な振舞いの変化をホモロジー群を用いて調べている例も挙げられている．

応用編におけるもう 1 つの中心的な話題は非線形力学系への応用である (10 章)．ここで著者等はホモロジー群を用いた計算機援用証明法を提案している．計算機援用証明とはその名の通り，計算機を用いて数学的に厳密な結果を導く方法を一般に指し，精度保証付き数値計算法，数値検証法などとも呼ばれている．本章では，ホモロジー群を用いて非線形力学系において現れる不動点，周期点，更にはカオス的不変集合の存在を証明する方法について，Hénon 写像[2] $f : (x, y) \mapsto (1 + y/5 - ax^2, 5bx)$, $(a, b$ はパラメータ$)$ を例に説明している．

この方法では，Conley 指数と呼ばれる力学系の孤立不変集合に対して定義される不変量が重要な役割を果たす．力学系 $f : X \to X$ に対して $f(S) = S$ を満たす部分集合 $S \subset X$ を f の不変集合と呼ぶが，この S に対してあるコンパクトな近傍 N が存在して S が N 内の最大の不変集合であり，かつ N の内部に真に含まれる時，この不変集合 S を孤立した不変集合，N をその孤立化近傍と呼ぶ．孤立不変集合に対しては次を満たす指数対と呼ばれるコンパクトな空間対 $(P_1, P_0), P_0 \subset P_1,$ が存在することが知られている：(1) $\overline{P_1 \setminus P_0}$ は S の孤立化近傍，(2) P_0 は P_1 内で正不変，(3) P_0 は P_1 での出口集合．これを用いて孤立不変集合に対する Conley 指数は $(H_*(P_1, P_0), f_{P*})$ で定義される．ここで Conley 指数の写像部分 f_{P*} は，紙面の都合上その詳細は割愛するが，大雑把に言うと (P_1, P_0) における f の振舞いを反映した $H_*(P_1, P_0)$ 上の誘導準同型写像である．このようにして定義される Conley 指数の際立った特長の 1 つは，Conley 指数の形から $\overline{(P_1 \setminus P_0)}$ 内に存在する

[2]教科書などでよく紹介される Hénon 写像とは係数のとり方が若干異なるが，本書で扱われている例がこの形なのでそのまま掲載した．しかし，この違いは本質的なものではない．

不変集合の情報が抜きだせる点である．例えば $f^n_{P_*}$ のトレースを調べることで，$\overline{(P_1 \setminus P_0)}$ 内に n-周期点 ($n = 1$ の場合は不動点に対応) の存在を示すことが可能である．

そこで彼等は，近似的に求めた周期軌道の近傍で指数対を方体集合の対として構成し，そこから CHomP を用いて具体的に Conley 指数を計算する事で，Hénon 写像の幾つかの周期軌道の存在を計算機を用いて証明している．ここで，計算機内で発生する誤差 (丸め誤差) を逐次評価することで，ホモロジー群やその上の準同型写像は数学的に厳密性を保った形で扱われている点に注意したい．例えば Hénon 写像 f に対して導入される多価写像は，丸め誤差を評価した形で扱えばよい．このようにして，Conley 指数が厳密に計算でき周期軌道の存在を示すことが可能となるのである．

上記の手法を更に進めて，Hénon 写像に現れるカオス的不変集合の計算機援用の下での存在証明法についても議論している．その方法は，上述の方法により存在が証明される幾つかの周期軌道とその Conley 指数の情報を用いて，これらの周期軌道を含む Hénon 写像の不変集合から記号力学系への位相半共役を構成することである．これにより記号力学系におけるカオス的不変集合が，Hénon 写像においても存在する事が示される．この議論でも Conley 指数を具体的に計算する箇所で計算機は使用されるが，先程と同様に丸め誤差の評価を行なうことで数学的に厳密な結果が導かれる．ちなみに本章の最初には，離散力学系，及び Conley 指数の簡単な解説がついているので，これらの概念に習熟していない読者も本章を読み進めて行くには十分な知識を得ることができる．

4 結び

以上，本書における本質的な箇所である第 1 部と第 2 部の内容を大まかに見てきた．本書の随所で，純粋数学において威力を発揮するホモロジー群という道具を具体的な問題へ応用したいという著者等の強い意気込みを感じる．また，本の中でも述べてあるように計算ホモロジー理論の応用はまだ始まったばかりであり，今後多くの可能性を秘めているように感じる．代数的トポロジーで培われた概念を，様々な分野に応用することを目指す読者には是非一読をお薦めしたい書である．

最後に数学理論の展開とその応用について，これ等を非常に高度な次元で融合したという点は重要である．数学は高度に抽象化された思考の産物であり，それ自身は誇るべきものであるが，そうした抽象概念を具体的な問題に使える方向へ切り拓くことも同時に重要であると我々は考える. 単に計算の処方箋を示すのみならず，実際に使えるアルゴリズムの開発と実装，ソフトウェアの配布そして数多くの応用例の紹介という一連の流れを見る時，本研究グループの業績の意味がますます際立ったものに映る．このような研究スタイルは応用数学の目指す一つの方向性を示すものとして評価したい.

(ひらおか やすあき · 北海道大学電子科学研究所)

(さかじょう たかし · 北海道大学大学院理学研究科)