Katsumi IMAHORI 1952 A Note on the Long Period Forecasting by Means of Harmonic Analysis (I). *Low Temperature Science, 9.*

調和解析による長期豫報（I）*

今 堀 克 巳

（昭和27年7月受理）

気象要素を或程度長期にわたつて予報すること，即ち長期予報又は季節予想と稱ばれている方法については，從來種々の試みが行われており，夫々或程度の成果を收めている樣であるが，それらの多くはいわば試みの域を脱してはおらず，科學的な方法として統一した体系をもつものはまれである。[1]** これに對して最近 Kolmogoroff 及び Wiener[2] は夫々独立に，確率過程の理論から，極めて一般的な予報の理論を展開した。これは一方において考えられた data から統計論的に最も確からしい予報を行う方法を與えると共に，他方において現象を支配する自然法則とも基礎的な意味でのつながりをもつているものであつて，その意味では単に予報の問題のみならず，他のあらゆる自然科学或は社会科学や人文科学等においても，極めて重要な役割を受けもつと考えられる。筆者も数年來同樣な理論の可能性を考え，一応の結論を得たが[3] それは結局 Wiener の理論に含まれることがわかつた。本稿ではこの樣な理論を如何に長期予報の實際に応用するかについて，その理論の概要と具体的な方法を述べ，讀者の參考に資したいと思う。

I. Wiener の理論

まず數学的な議論をなるべく避け Wiener の理論の前提と結論，並びにその意味について簡単に紹介しておく。今観測値の系列

$$\ldots\ldots,\ x_{-N},\ \ldots\ldots,\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots x_N,\ \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots(1)$$

が與えられたとする。これは所謂 discrete time series と稱ばれるものである。Continuous な場合も同樣に論ぜられるから —Wiener の理論ではむしろ後者の場合について詳しく論じている— ここでは応用的見地から前者の場合について説明する。時系列 (1) が或意味で stationary であると考えられる場合 —この厳密な定義についてはふれない— には，所謂 auto-correlation

$$X_k = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_{n+k}\, x_n \qquad \ldots\ldots(2)$$

がすべての k に對して存在し，且有限であることが證明される。これは與えられた時系列から偶

** 我国では高橋浩一郎博士及び小河原正巳博士による一連の研究が注目される．

* 予報研究ノート，第2巻，第5号 (1951)．

然的なものを取り去つた，物理的に意味のある特性的な系列として，基本的に重要な役割をつとめるものである。

次に上記の X_k は一つの単調増加函数 $\Lambda(\omega)$ によつて

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{2T_1}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega}\, d\Lambda(\omega)$$

の如く表わし得るのであるが，物理的には $\Lambda(\omega)$ は absolutely continuous で $\sqrt{2\pi}\ d\Lambda(\omega)=\Phi(\omega)\,d\omega$ と書ける場合のみが興味がある。従つて

$$X_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\omega)\,e^{ik\omega}d\omega,\ \ \Phi(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k\,e^{-ik\omega} \qquad \ldots\ldots(3)$$

となし得る。$\Phi(\omega)$ は X_k の spectrum を表わす。時系列（1）は實際には $\pm\infty$ に亘つて全部観測されることは決してない。無限の過去卽ち $-\infty$ に對しては，仮りに知る得る——原理的に——と仮定しても，將来の値は原理的には未知としなければならない。このような場合にも，（2）の平均を半無限についてとつたもの

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{n=-N}^{n+k=0}x_{n+k}\,x_n$$

は（2）と同じ値を取ることが ergodic theorem によつて保證される。従つて autocorrelation 又その spectrum は経験的に知ることの出来るものである。

さて時系列（1）について，過去から現在までの値が知れた時，それらの知識からどれだけのことが將来の値についていい得るであろうか。もし現象が決定論的な法則に従うものならば現在までの観測値からその間が存在する物理法則を求め，それを用いて將来の値を一義的に決定し得る筈である。この場合，考えられる物理法則には種々な形を取るであろうが，何れにしてもそれが linear であると仮定出来る場合のみが物理的に興味がある。そうするとこれは一般的に

$$x_{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty} K_m\,x_{n-m} \qquad \ldots\ldots(4)$$

と書き得るであろう。ここに suffix n は現在を表わし，$n+k$ はそれから k 単位時間後の將来を意味する。x_{n-m} は $m=0$ から ∞ に對し現在から無限の過去に至る値，卽ち観測された値を表わし，その各々に適当な比例常數を乗じて加え合せることにより將来の値が決まるものと考えるのである。従つて K_m は現象に與える物理系が従うべき物理法則に特有な意味をもつてくる。

所で確率過程においては以上の様な取扱いは不可能である。この場合には如何に現在の條件を指定しても，それによつて將来の値は一義的に決めることは出来ないのである。そこで Wiener は（4）に代る條件として

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}\left|x_{n+k}-\sum_{m=0}^{\infty}K_m\,x_{n-m}\right|^2 = \mathrm{Min.} \qquad \ldots\ldots(5)$$

とおいた。これは最小自乗法の思想と全く同一である。この原則を満足する K_m が見出されると，これを使つて

$$\bar{x}_{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty} K_m x_{n-m} \qquad \cdots\cdots (6)$$

とおけば，これが將来の値に對する最も確からしい値を與え，且つその平均自乗誤差は（5）の最小値によつて表わされる。

（5）の所謂 minimum problem の解は種々の形で與えられる。ここでは途中の数学的な推論を省き，結果だけを述べる。まづ（3）によつて定義される X_k の spectrum $\Phi(\omega)$ は ω の周期函数——周期 2π——で且 non negative な even function であるが，これを

$$\Phi(\omega) = \Psi(\omega)\Psi^*(\omega) \qquad \cdots\cdots (7)$$

なる二つの互に complex conjugate な $\Psi(\omega)$ と $\Psi^*(\omega)$ の積として表わす。但し $\Psi(\omega)$ は複素 ω 平面の下半面の零点も極も有しない様な複素函数である。そうすると $\Phi^*(\omega)$ は ω 平面の上半面で零点及び根を有しない函数となる。この所謂 factorization は常に可能とは限らないのであるが，やはり物理的に興味のあるのはそれが可能な場合だけである。

これを實際に行うには次の如き順序によつて計算する。

（i）$\log \Phi(\omega)$ を Fourier series に展開する。

$$\log \Phi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{-ik\omega} \qquad \cdots\cdots (8)$$

（ii）（8）から

$$L(\omega) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} A_k e^{-ik\omega}$$

を作つて

$$\Psi(\omega) = \sqrt{\Phi(\omega)} \exp\left[\frac{1}{2}L(\omega)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k e^{-ik\omega} \qquad \cdots\cdots (9)$$

を計算する。これが求める $\Phi(\omega)$ である。

$\Phi(\omega)$ がわかると，これから（5）を満足する K_m の Fourier spectrum $k(\omega)$ が求められる。即ち

$$K_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(\omega)\, e^{im\omega}\, d\omega \qquad \cdots\cdots (9)$$

とすると

$$k(\omega) = \frac{1}{2\pi\Phi(\omega)} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-im\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(u)\, e^{imu}\, du. \qquad \cdots\cdots (10)$$

結局（11）の $k(\omega)$ から（10）により K_m を求め，これを用いて（6）の $\bar{x}_{n+k}$ が得られることになる。なお平均自乗誤差は（9）によつて得られた B_k 用いて

$$E_k = \sum_{m=0}^{k-1} \left| B_m \right|^2 \qquad \cdots\cdots (12)$$

となる。

以上の理論において注目すべきことは，すべてが auto-correlation coefficient を基礎にしてそれから導かれること，計算の手つづきが殆んど調和解析を用いて行われること，の二点である。なお以上は単一の時系列についてのみ述べたが，更に二つ又はそれ以上の所謂 multiple time series についても，形式的に同様な理論が作られる。これは特に種々の気象要素の予報，並びにそれ等の要素内に存在する物理法則の発見の可能性に関連して非常に興味があり，又応用的にも極めて重要な役割をつとめるものと考えられるが，差し当り以上の説明だけに止めておく。

II. 筆 者 の 理 論

Wiener の予報の理論は，前節の minimization の考え方の他に，Brown 運動の思想を取り入れた形式[4)] * も発表されている。これに對して筆者の理論は本質的には後者と同じ考え方であるが，その具体的な形式は Wiener のそれと多少異なる。次に其の概要を前節と同様に discrete time series について述べよう。Continuous な場合は文献（3）で取扱つた。

與えられた観測値の系列

$$\cdots\cdots x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots (13)$$

において，相續く M 個の観測値を一組として考え，これを M 次元空間の一点として表わす。時間の経過と共にこの点は次々と位置を変えるであろう。最初 (13) で與えられた様に，一つの変數の一次元的な変化を考える代りに，この様な多變數の多次元的な変化を考えたのは，こうすることによつてこの現象を支配する物理法則が出来るだけ簡単な數学的形式を持ち得ることが予想されるからである。即ち Brown 運動論における random walk の問題と同様に，或時刻における点の位置が與えられた時，その次の時刻に受ける変位は，その時の位置のみに関係し，それ以前の歴史に無関係な函數として表わされる様な確率分布を有するとする。これは所謂 Markoff 過程と呼ばれるものであつて，この問題に對するかなり一般的な解はすでに與えられている。[5)6)]

今時刻 t から時刻 $t+\mathrm{M}-1$ までの相續く M 個の観測値を

$$q_0(t),\ q_1(t),\ \cdots\cdots\ q_{\mathrm{M}-1}(t)$$
$$t = \ \cdots\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\cdots\cdots$$

と表わす。t の或一つの値に對してこれらの値が與えられた時，t の値が 1 だけ増した時に受ける変化を

※ この形式では理論に含まれている物理的な意味が明確となり，従つて所謂 物理的予報 との関連がつき易い．

$$\xi_0(t),\ \xi_1(t)\ \ldots\ldots,\ \xi_{M-1}(t) \qquad \ldots\ldots (15)$$

とすると，時間的に一様な Markoff 過程では (15) の値は

$$W(\xi,q)\,d\xi_0 d\xi_1 \ldots\ldots\ d\xi_{M-1} \qquad \ldots\ldots (16)$$

の如く q —— q_0，q_1，…… q_{M-1} の全部を代表的に表わす —— のみに関係する様な ξ —— ξ_0，ξ_1，……ξ_{M-1} の代表—— の函数として表わされる分布函数をもつ。筆者は特にこれが

$$\left.\begin{aligned} &W=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}}(\triangle)^{\frac{1}{2}}}\exp\sum_{i,j=0}^{M-1}\tfrac{1}{2}\sigma_{ij}(\xi_i-\bar{\xi}_i)(\xi_j-\bar{\xi}_j)\\ &\text{但し}\qquad \triangle=\mathrm{Det}(\widetilde{\sigma_{ij}})\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (17)$$

なる Gauss 分布となる場合を考えた。ここに ($\widetilde{\sigma}_{ij}$) は行列 (σ_{ij}) の逆行列でその各要素は夫々ある定つた常数である。$\bar{\xi}$ は q の一次齊次式で與えられるとすると，即ち

$$\bar{\xi}_i(t)=\sum_{j=0}^{M-1}a_{ij}\,q_j(t) \qquad \ldots\ldots (18)$$

とおくと，$\widetilde{\sigma_{ij}}$ がすべて 0 なる場合には

$$\xi_i(t)-\sum_{j=0}^{M-1}a_{ij}\,q_j(t)=0 \qquad \ldots\ldots (19)$$

なる関係が成立ち，$\xi_i(t)=q_i(t+1)-q_i(t)$ なることを考慮すると，$q_i(t)$ の値から $q_i(t+1)$ の値，從つて更にこれに続くすべての値が一義的に決定されるが，そうでない場合には

$$\xi_i(t)-\sum_{j=0}^{M-1}a_{ij}\,q_j(t)=p_i(t) \qquad \ldots\ldots (20)$$

とおくと，偏差 $p_i(t)$ が (17) の Gauss 分布に從うことになり，$q_i(t)$ の値が與えられるとこれに對する $q_i(t+1)$ の平均値及び偏差の二次能率が分ることになる。從つて問題は

（a） 與えられた観測値の系列又はその他の物理的考察* から係数 a_{ij} 及び σ_{ij} の値を求めること。

（b） 聯立階差方程式 (20) を解いて $q(0)$ の値が與えられた時 $q(t)$ のの値の平均値及び偏差の能率を出すこと。

の二つに歸せられる。

q_i の定義を考慮すると (20) はずつと簡単になる。即ち

$$\left.\begin{aligned} &\xi_0(t)-[\,q_1(t)-q_0(t)\,]=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\xi_{M-2}(t)-[\,q_{M-1}(t)-q_{M-2}(t)\,]=0\\ &\xi_{M-1}(t)-\sum_{j=0}^{M-1}a_j\,q_j(t)=p(t)\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (21)$$

---

* 以下では一応観測値のみから求める方法について述べる。

或は q_i のみを用いて表わすと

$$\left.\begin{aligned} & q_0(t+1) - q_1(t) = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & q_{M-2}(t+1) - q_{M-1}(t) = 0 \\ & q_{M-1}(t+1) - \sum_{j=0}^{M-1} a_j q_j(t) = p(t) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (22)$$

と書くことも出来る。ここに $p(t)$ のauto-correlation は

$$[p(t+\tau)\,p(t)]_{tAv} \begin{aligned} &= 0 \quad \tau \neq 0 \\ &= \sigma \quad \tau = 0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots (23)$$

とする。

(22) を解くために次の様な一次変換を考える。即ち

$$z_i = \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij}\, q_j, \quad i = 0, \ \cdots\cdots, \ M-1, \qquad (24)$$

但し係数 C_{ij} は次の連立方程式を満足する如くきめる。

$$\left.\begin{aligned} C_{k,M-1}\, a_0 &= \lambda_k C_{k0} \\ C_{k0} + C_{k,M-1}\, a_1 &= \lambda_k C_{k1} \\ C_{k1} + C_{k,M-1}\, a_2 &= \lambda_k C_{k2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{k,M-2} + C_{k,M-1}\, a_{M-1} &= \lambda_k C_{k,M-1} \end{aligned}\right\}$$

この為には先づ λ_k を

$$\lambda^M - (a_0 + a_1\lambda + \cdots\cdots + a_{M-1}\lambda^{M-1}) = 0 \quad \cdots\cdots (25)$$

なるM次の代數方程式の根として求めると，夫々の λ_k —— $k = 0, 1, \cdots\cdots, M-1$, —— に對して

$$C_{kj} = \frac{C_{k0}}{a_0 \lambda_{kj}} \sum_{l=0}^{i} a_l \lambda_k^l \quad \cdots\cdots (26)$$

として求められる。 C_{k0} は不定でもよいが，以下では簡単のためすべて1としておく。

そうすると (22) 式は

$$z_i(t+1) - \lambda_i z_i(t) = \pi_i(t), \text{ 但し } \pi_i(t) = C_{i,M-1}\, p(t) \quad \cdots\cdots (27)$$

$$z_i(t) = \sum_{t'=-\infty}^{t-1} \pi_i(t')\, \lambda_i^{t-t'-1} = \sum_{t'=0}^{\infty} \pi_i(t-t'-1)\, \lambda_i^{t'} \quad \cdots\cdots (28)$$

で與えられる。さらにこれから (24) の逆変換を行うと，

$$\left.\begin{aligned} q_i(t) &= \sum_{j=0}^{M-1} \widetilde{C}_{ij} z_j(t) = \sum_{t=0}^{\infty} K_i(t')\, p(t-t'-1) \\ K_i(t) &= \sum_{j=0}^{M-1} \widetilde{C}_{ij}\, C_{j,M-1}\, \lambda_j^t \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (29)$$

を得る。但し，$\widetilde{C}_{ij}$ は行列（C_{ij}）の逆行列の要素を表わす。

$q_i(t)$ に関する correlation function を

$$Q_{ij}(\tau)=[q_i(t+\tau)\ \ q_j(t)]_{t\mathrm{AV}} \qquad \cdots\cdots (30)$$

と定義すると (29) から

$$\left.\begin{aligned} Q_{ij}(\tau) &= \sigma\sum_{t'=\tau}^{\infty} K_i(t')K_j(t'-\tau),\ \tau>0 \\ &= \sigma\sum_{t'=0}^{\infty} K_i(t')K_j(t'-\tau),\ \tau<0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (31)$$

が得られる。更にこの $Q_{ij}(\tau)$ に對して (22) の右邊を 0 とおいた定差方程式が成立することは容易に證明される。即ち

$$\left.\begin{aligned} &Q_{0j}(\tau+1)-Q_{1j}(\tau)=0 \\ &Q_{1j}(\tau+1)-Q_{2j}(\tau)=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &Q_{\mathrm{M}-1,j}(\tau+1)-\sum_{k=0}^{\mathrm{M}-1} a_k Q_{kj}(\tau)=0. \end{aligned}\right\}\ \tau>0 \qquad \cdots\cdots (32)$$

(30) 及び (32) を觀測値 x_i の auto-correlation $X(\tau)$ で表わすと，

$$Q_{ij}(\tau)=[X_{i+k+\tau}\ X_{j+k}]_{k\mathrm{AV}}=X(\tau+i-j) \qquad \cdots\cdots (33)$$

$$X(\tau+\mathrm{M})-\sum_{k=0}^{\mathrm{M}-1} a_k X(\tau+k)=0,\ \tau>0. \qquad \cdots\cdots (34)$$

$X(\tau)$ は實驗的に求められる量である。從つてこれを用いて (34) から係數 a_k を決定し,* 次に (25) を解いて λ_k を求めると係數 C_{ij} は (22) で與えられる。更に (29) 及び (33), (31) から常數 σ も求まる。それで吾々の必要とするあらゆる係數は決定されたことになる。

次に $z_i(0)=z_i^0$ が與えられた時，(27) の解は，

$$z_i(t)=\lambda_i^t z_i^0+\pi_i(t-1)+\lambda_i\pi_i(t-2)+\cdots\cdots+\lambda_i^{t+1}\pi_i(0) \qquad \cdots (34)$$

で與えられ，從つてその平均値及び偏差の moment として，

$$\bar{z}_i(t)=z_i^0\lambda_i^t,\ \overline{(z_i-\bar{z}_i)(z_j-\bar{z}_j)}=C_{i,\mathrm{M}-1}C_{j,\mathrm{M}-1}\,\sigma\,\frac{1-\lambda_i{}^t\lambda_j{}^t}{1-\lambda_i\lambda_j} \qquad \cdots (35)$$

が得られる。更にこれを q_i に變換すると

$$\left.\begin{aligned} &\bar{q}_i(t)=\sum_{j=0}^{\mathrm{M}-1}K_{ij}(t)\,q_j^0,\ K_{ij}(t)=\sum_{m=0}^{\mathrm{M}-1}\mathrm{C}_{im}C_{jm}\lambda_m^t, \\ &\overline{(q_i-\bar{q}_i)(q_j-\bar{q}_j)}=\sum_{k,l=0}^{\mathrm{M}-1}\widetilde{C}_{ik}\widetilde{C}_{jl}\,C_{k,\mathrm{M}-1}C_{l,\mathrm{M}-1}\,\sigma\,\frac{1-\lambda_k{}^t\lambda_l^t}{1-\lambda_k\lambda_l}. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

以上により予報の問題は一應形式的に解決されたことになる。殘る問題はこれを如何にして實際の計算に移すかということである。なお M の大きさの選び方をどうするかという問題もある

※ (32) 又は (34) 式の物理的意味に着目して，既に知られている氣象現象に關する物理法則からこれ等の形を決めることも可能と考えられる。詳しくは文獻（3）を參照されたい。

が，これについては気象現象の様に関係する要素が非常に多い場合には，いくら大きく取つても大きすぎるということはなく，計算方法の許す限り大きく取るべきであることだけを附言しておこう。*

III. 近似計算法

前節に述べた理論を實際問題に適用するには，まず充分に長い期間に亘つて得られた観測値からその auto-correlation $X(\tau)$ を求め，これを用いて (34) 式によりM個の係数 a_k を決定する。このためには $X(\tau)$ の値は少くともM個なければならず，從つて観測値の数は2M個以上を必要とする。(34) は a_k についてM元連立一次方程式であるから，Mが大きい割合にはこれを普通の方法で解くことは殆んど不可能である。仮に a_k は求まつたとしても，次に (25) のM次の代數方程式を解く問題がある。これも種々の近似方法を用いれば不可能ではないにしても實際は大変な手数を必要とする。

最近アメリカではこの様な計算を自動的に行う計算器械の研究が盛に行われ，一部は既に實施されている由である。若し我国でもこの様な器械を實現することがと可能ならば，残りの計算，即ち，(26) による C_{ij} の決定，(31) による σ の計算，そして最後に (35)，(36) による平均値——即ち予報値——及び偏差の平均自乘の決定は夫々 straightforward な計算で行い得るから——勿論これらも自動計算器で行えば申し分がない——ここに述べた理論を實行に移すことは充分可能性があると考える。筆者の研究室ではこの様な見透しの許に目下電子管を用いた computing machine に関する基礎實験を進めつつある。

所でこの様な器械を早急に實施することは，色々な事情のため困難と考えられるから，その前に嚴密性は或程度犠牲にしても，普通の計算方法で實行出来る様な近似計算法を用いて，理論の適用性や實際問題に現われる種々の特徴を調べることも極めて有意義と考えられるので，その為の二，三の試みを行つた。

まず最初に考えられることは，困難の原因がMの値の大きいことにあることは明らかであるから，若し與えられた時系列がいくつかの互に独立な時系列の重疊したものと考えられ，しかも夫々の部分時系列のMが充分小さい値を取る場合には，各々の部分時系列についても予報を行い，後でそれを合成すればよいことになる。——實は既述の理論はこの考えを嚴密に formulate したものである。——これに對する近似的な方法を考察する前に次のことを注意しよう。即ち前節の λ_k ——これは一般に複素値を取る——を

$$\lambda_k = e^{-\beta_k + ik\omega}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots M-1 \tag{37}$$

* 小河原氏が行つた例では此値をかなり小さく見積つている．文献（1）参照，

とおくと，(36) の $\bar{q}_k(\tau)$ は

$$\bar{q}_k(\tau) = \sum_{l,m=0}^{M-1} \tilde{C}_{kl}\, C_{lm}\, q^0_m\, e^{(\beta_l + i\omega_l)\tau} \tag{38}$$

となり観測値の時間間隔を時間の単位とした時の減幅率 β_k 角振動数 ω_k の減幅振動を合成したもので表わされ，同様に (29) の $q_k(\tau)$ が，この様な振動を更に不規則に重疊したもので表わされていることは，上述の時系列の分解を周期解析又はこれに類した原理に従つて行うのが最も自然であることを暗示する。

今 N は M に比して充分に大きいとし，N 個の観測値

$$x_0,\ x_1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ x_{N-1} \tag{39}$$

に對して次の様な一次直交変換を行う。即ち N=2n+1 として

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1} x_\tau \cos\frac{2\pi}{N}k\tau\ ,\quad k = 0,\ 1,\ 2, \quad \cdots\cdots n \\ B_k &= \frac{2}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1} x_\tau \sin\frac{2\pi}{N}k\tau\ ,\quad k = 1,\ 2, \quad \cdots\cdots n \end{aligned}\right. \tag{40}$$

これは與えられた観測値に對する N 項調和解析に他ならない。この逆変換は，

$$x_\tau = \frac{A_0}{2} \sum_{k=1}^{n}\left(A_k \cos\frac{2\pi}{N}k\tau + B_k \sin\frac{2\pi}{N}k\tau \right) \tag{41}$$

である。

次に時系列 (39) が二つの時系列 x'_τ と x''_τ とに分けられ，

$$x_\tau = x'_\tau + x''_\tau, \qquad \tau = 0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ N-1 \tag{42}$$

とし，それぞれに對して (40) と同じ変換を行つた時の Fourier 係数を，A'_k B'_k 及び A''_k B''_k とする。x'_τ と x''^τ が統計的に独立であることは N→∞ に對して

$$\left[x'_{t+\tau} \quad x''_t \right]_{tAv} = 0 \quad 或は \quad \sum_k (A'_k + iB'_k)(A''_k - iB''_k) = 0, \tag{43}$$

なる条件でいい表わされる。特別の場合として

$$A'_k = B'_k = 0,\ k = p+1,\ p+2, \ldots, n;\ A''_k = B''_k = 0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots p$$

とすると，勿論 (43) は ——N が有限であることによる誤差を無視して—— 満足される。これは分解を次の如く行うことに相当する。即ち (41) の右邊を二つの部分に分け，

$$\left.\begin{aligned} x'_\tau &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{p}\left(A_k \cos\frac{2\pi}{N}k\tau + B_k \sin\frac{2\pi}{N}k\tau \right), \\ x''_\tau &= \sum_{k=p+1}^{n}\left(A_k \cos\frac{2\pi}{N}k\tau + B_k \sin\frac{2\pi}{N}k\tau \right) \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

とするのである。

他方において (37) の表現による λ_k を ω_k の絶對値の大きさの順に配列した時

$$\bar{q}'_i(\tau) = \sum_{k=0}^{s} \left(\sum_{j=0}^{M-1} C_{ik}\, C_{kj}\, q''_j \right) e^{(-\beta_k + i\omega_k)\tau}$$

の Fourier 係數が第 p 次迄で或値を取り $p+1$ 次以上では 0 となり，反對に

$$\bar{q}''_i(\tau) = \sum_{k=s+1}^{M-1} \left(\sum_{j=0}^{M-1} \tilde{C}_{ik}\, C_{kj}\, q_j{}''^0 \right) e^{(-\beta_k + i\omega_k)\tau}$$

が p 次迄は 0 でそれ以上は 0 でないとする。この様な場合には (44) の如く分解された時系列は夫々 x'_τ は λ_0 から λ_s までを含み，x''_τ は λ_{s+1} から λ_{M-1} までを含む。從つて x'_τ に對する予報は s+1 次の行列式及び代數方程式を取扱い，x''_τ の予報は M $-s-1$ 次の問題となる。

以上で時系列の分解によつて問題を低次の予報に移す近似的な方法として調和解析を利用する方法が明らかにされた。この方法は更に多數の部分時系列に分解する場合も全く同様であつて，都合のよい場合には結局 M=1 或は M=2 の場合に歸することも不可能ではない。多少の誤差を許せば，殆んど凡ての場合この様に取扱うことも出來よう。その具体的な例は「そのII」で詳しく說明することとし，上の最も簡單な場合としての M=1 及び M=2 に對する完全な解を與えておく。

M＝1 の場合

(22) は

$$x_{\tau+1} - \lambda x_\tau = p(\tau) \tag{45}$$

に歸せられる。又 (34) は

$$X(\tau+1) - \lambda X(\tau) = 0, \quad \tau > 0 \tag{46}$$

となり，この解は

$$X(\tau) = X(0)\,\lambda^\tau = X(0)\,e^{-\beta\tau} \tag{47}$$

となる。これからβ，從つて λ が容易に求まる。普通 λ は1より小さい正の値を取り，從つて β は正である。

$\tau=0$ に對して x_0 の値が與えられた時，任意の τ における x^τ は (45) の解

$$x_\tau = \lambda^\tau x_0 + p(\tau-1) + \lambda p(\tau-2) + \dots\dots + \lambda^{\tau-1} p(0) \tag{48}$$

で與えられ，從つて予報値及び平均自乘誤差は

$$\bar{x}_\tau = \lambda^\tau x_0, \quad \overline{(x^\tau - \bar{x}^\tau)^2} = \sigma\,(1 + \lambda^2 + \dots\dots + \lambda^{2(\tau-1)}) = \frac{1-\lambda^{2\tau}}{1-\lambda^2}\,\sigma \tag{49}$$

となる。なお σ は

$$X(0) = \bar{x}_\tau^2 = \sigma \sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda^{2\tau} = \frac{\sigma}{1-\lambda^2} \quad \dots\dots (50)$$

より求められる。

M＝2の場合

(22)及び(34)は

$$x_{\tau+2}-a_1 x_{\tau+1}-a_0 x_\tau=p(\tau) \qquad \cdots\cdots (51)$$

$$X(\tau+2)-a_1 X(\tau+1)-a_0 X(\tau)=0, \quad \tau>0 \qquad \cdots\cdots (52)$$

となる。(52) に實測値から得られる $X(\tau)$ を入れて，最小自乘法により a_1 及び a_0 をきめる。

次に

$$\lambda^2-a_1-a_0\lambda=0 \qquad \cdots\cdots (53)$$

を解くと

$$\lambda_0,\ \lambda_1=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2+4a_0}}{2} \qquad \cdots\cdots (54)$$

として λ_0, λ_1 が求められる。

(26) は

$$\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda_1} \\ 1 & -\frac{1}{\lambda_0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{C}_{00} & \widetilde{C}_{01} \\ \widetilde{C}_{10} & \widetilde{C}_{11} \end{pmatrix}=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\lambda_0-\lambda_1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda_0} & \frac{1}{\lambda_1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (55)$$

となり，更に (29) の $K_i(\tau)$ は

$$K_0(\tau)=\frac{\lambda_0^\tau-\lambda_1^\tau}{\lambda_0-\lambda_1}, \quad K_1(\tau)=\frac{\lambda_0^{\tau+1}\lambda_1^{\tau+1}}{\lambda_0-\lambda_1} \qquad \cdots\cdots (56)$$

で與えられる。從つてこれを (31) に入れると

$$X(\tau)=\frac{\sigma}{(\lambda_0-\lambda_1)^2}\left[\frac{\lambda_0^\tau}{1-\lambda_0^2}+\frac{\lambda_0^\tau}{1-\lambda_1^2}-\frac{\lambda_0^\tau+\lambda_0^\tau}{1-\lambda_0\lambda_1}\right] \qquad \cdots\cdots (57)$$

が得られ，これより σ の値を定めることが出来る。最後に x_0 及び x_1 が與えられた時，x_τ の平均値及びその平均自乘誤差は (35) 及び (36) から

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_\tau &= \frac{1}{\lambda_0-\lambda_1}\left[(-\lambda_1\lambda_0^\tau+\lambda_0\lambda_1^\tau)x_0+(\lambda_0^\tau-\lambda_1^\tau)x_1\right], \\ \overline{(X_\tau-\bar{X}_\tau)^2} &= \frac{\sigma}{(\lambda_0-\lambda_1)^2}\left[\frac{1-\lambda_0^{2\tau}}{1-\lambda_0^2}+\frac{1-\lambda_1^{2\tau}}{\lambda-\lambda_1^2}-\frac{2(1-\lambda_0^\tau\lambda_0^\tau)}{1-\lambda_0\lambda_1}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

となる。

なお計算の便宜の爲に複素數 λ_0，λ_1 を (37) の形式に從つて實數の parameter に直しておくことが望ましい。(54) において

$$\lambda_0=e^{-\beta+i\omega}, \qquad \lambda_1=e^{-\beta-i\omega} \qquad \cdots\cdots (59)$$

とおくと，

$$\lambda_0 \lambda_1 = e^{-2\beta}, \quad \lambda_0 + \lambda_1 = 2\, e^{-\beta} \cos\omega, \quad \lambda_0 - \lambda_1 = 2\, i\, e^{-\beta} \sin\omega. \qquad \cdots\cdots (60)$$

これらを用いると (57), (58) は次の如くなる。

$$X(\tau) = \frac{\sigma e^{-\beta\tau}}{2e^{-2\beta}\sin^2\omega}\left[\frac{\cos\omega\tau}{1-e^{-3\beta}} - \frac{\cos\omega\tau - e^{-2\beta}\cos\omega(\tau-2)}{1-2e^{-2\beta}\cos 2\omega + e^{-4\beta}}\right] \qquad \cdots\cdots (62)$$

$$\bar{x}_\tau = \frac{e^{-\beta\tau}}{\sin\omega}\left[x_1 e^{\beta}\sin\omega\tau - x_0 \sin\omega(\tau-1)\right] \qquad \cdots\cdots (63)$$

$$\overline{(x_\tau - \bar{x}_\tau)^2} = \frac{\sigma}{2\, e^{-2\beta}\sin^2\omega}\left[\frac{1-e^{-2\beta\tau}}{1-e^{-2\beta}} - \frac{1-e^{-2\beta}\cos 2\omega - e^{-2\beta\tau}\{\cos 2\omega\tau - e^{-2\beta}\cos 2\omega(\tau-1)\}}{1-2\, e^{-2\beta}\cos 2\omega - e^{-4\beta}}\right]. \qquad \cdots\cdots (64)$$

文 献

1) 小河原正巳 ; 時系列論とその応用 (応用統計学 第2章)

2) Wiener N. 1949 Interpolation, Extrapolation and Smoothing of Stationary Time-Series.

3) Imahori K. and Kobayashi T. 1951 On the Long Period Forecasting by Means of Harmonic Analysis, J.Met.Soc.Japan, **29**, 366.

4) Wiener N. 1947 Cybernetics.

5) Chandrasekhar S. 1943 Stochastic Problems in Physics and Astronomy, Rev. Mod. Phys. **15**. 1.

6) Wang M. C. and Uhlenbeck G. E. 1945 On the Theory of the Brownian Motion II, Rev. Mod.Phys., **17**. 323.