Title	非定常時系列の予報について　I
Author(s)	堀, 淳一; 小林, 禎作
Citation	低温科學, 9, 83-92
Issue Date	1952-12-30
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/17524
Type	bulletin (article)
File Information	9_p83-92.pdf

Jun-ichi HORI and Teisaku KOBAYASHI 1952 On the Prediction of the Non-Stationary Time-Series. I. *Low Temperature Science 9* (With English résumé *p.92*)

非定常時系列の豫報について.*

堀　淳一，小林禎作
（低温科学研究所　気象学部門）

（昭和27年8月受理）

I. はしがき

定常時系列の予報の問題は，既に Kolmogoroff-Wiener の理論，Wold-小河原 の理論，及び今堀の理論などによつて，原理的な解決を見，あとはそれの實際面への応用の問題が残されているのみであるが，既にかなりの成果が挙げられている。ところが，實際に，時系列を解析してみた場合，それを定常と考えるよりも非定常と考えた方が適当と思われる場合にしばしば出会う。たとえばある時系列をいくつかの小区間に分けて，そのおのおのについてスペクトルを求めてみると，一般に各区間のスペクトルはそれらの間でいちじるしい変動を示す。この小区間がもとの時系列の長さに比べて十分短く，従つてその数が多い場合には，この変動は定常的な変動に含まれると考えてよいが，小区間の長さが十分長く，その数が少い場合には，このような変動は（時系列全体の長さに相對的な意味で）非定常的な変動即ち長期傾向とみなければならない。今堀はさきにこのような場合の予報をどうとり扱うべきかについて，1つの試論を提案したが，[1] ここではそれを敷衍して，より立ち入つた考察を行うとともに，Zadeh の可変徑数回路の周波数分析の理論にもとずく方法と，スペクトルに関する定常化の考えにもとずく方法との，2 つの試案をのべてみたいと思う。

II. 今堀の試論の吟味

今堀の提案した長期傾向の予報に對する方式は，離散的な時系列の場合，次のようにのべられている。

（1） 與えられた觀測値の系列を，適当に選んだ N 個ずつの系列に区劃する。

（2） おのおのの区劃に對応する母系列の自己相関係数またはその周波数スペクトルを求める。

（3） これらの相関係数またはスペクトルがどのように区劃ごとに変化するかを見て，その將來の変化を推定する。

---

* 北海道大学低温科学研究所業績　第143号

連続的な時系列の場合にも，全く同じ方式があてはまるが，この場合は各時点を中心とする適当な幅の区間をとつて，その区間内で計算したスペクトルで，この時点に對する母系列のスペクトルを推定すればよいであろう。

今堀の論文にものべられているように，時系列の定常或は非定常ということは，観測時間の長さに相對的な概念である。實際上において問題となる長期傾向は，それがどんなに持続的なものであつても，無限に長い観測時間を考えさえすれば，必ず非常に長い周期をもつた定常的な変動の一部とみなすことができるが，観測時間Tが有限な場合には，Tに比べて十分短い周期或は減衰時定数をもつた成分振動は定常成分と考えられるが，Tと同じ程度或はより大きな長さの周期をもつた成分は，長期傾向であると考えて，非定常的なとり扱いをしなければならないのである。

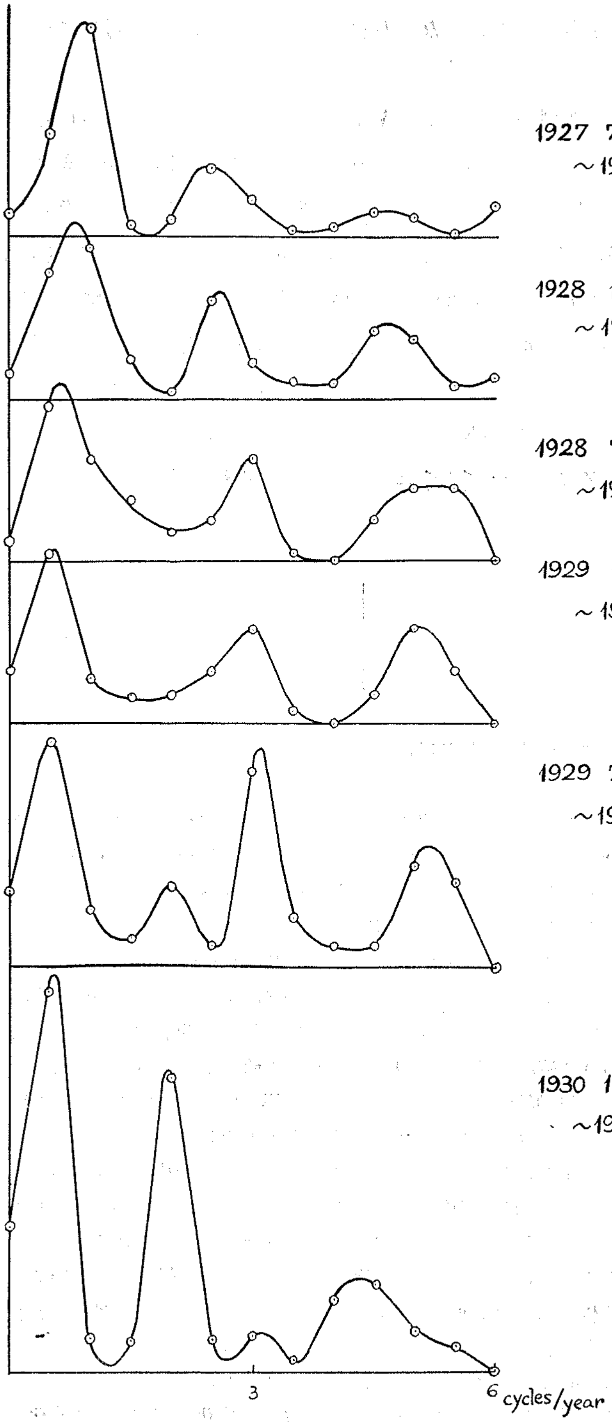
定常時系列の予報の根本は，観測された時系列 $q(t)$ を，一般化された Langevin 方程式

$$a_n \frac{d_n q}{d t_n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}q}{d t^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}q}{dt^{n-2}} + \dots \qquad + a_1\frac{dq}{dt} + a_0 q = p(t) \dots\dots (1)$$

で記述されるもの（いいかえれば（1）の右邊を零とおいた方程式によつて記述される物理系が，完全にでたらめな外力 $p(t)$ によつてかきみだされた結果生じたもの）と考えてこの，時系列の相関函数又はエネルギースペクトルから，係数 a_i を求めることにある。[2] 上の方式は，観測された時系列の各時点を中心とする小区間をとつて，そのおのおのをこの時点に對応する無限に続く仮想的な定常母系列の1部分（標本）と見なして，そのスペクトルから母系列の特性即ち（1）の係数 a_i を求め，それらの時点ごとの変化をしらべることに歸着するが，これは與えられた時系刻が時間的に十分ゆるやかに変化する係数 $a_i(t)$ をもつた

$$a_n(t)\frac{q^n q}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}q}{dt^{n-1}} + a_{n-2}(t)\frac{d^{n-2}q}{dt^{n-2}} + \dots + a_1(t)\frac{dq}{dt} +$$
$$a_0(t)q = p(t) \qquad \dots\dots (2)$$

のような形の方程式で記述されることを仮定することに相当する。小区間の長さに比べて十分小さな周期をもつ変動（定常変動）を微分方程式の係数で，定常変動に比べて十分ゆるやかな変動即ち長期傾向或は非定常変動をこの係数の時間的変化として表すわけである。こう考えると定常成分そのものが時間的に変化することになり，その変化が即ち長期傾向であると考えていることになつて，最初にのべた定常成分と長期傾向に對する考え方（無限大の観測時間を考えればすべての変動は定常成分となり，いずれも時間的に変化しない。これらを實際の観測時間に相對的な周期の大小で分類して定常成分と長期傾向とに分けたのである）と矛盾するように見える。しかしながら，實際問題としては，あらゆる長期傾向を定常成分として含む無限大の観測時間に對する方程式を求めることは不可能なのであるから，こういうものを仮想的に考えてからその成分を2つに分類することは意味がないのであつて，實際的には長期傾向は常に定常成分の時間的変化として現れてくるのである。従つて上のような定式化は必然的なものであるといえよう。



第　1　圖

今1つ注意しなければならないことは，この定式化では，右邊の$p(t)$の特性が，無限時間にわたつて一定であることが仮定されていることである。これは，この方程式によつて記述される時系列の平均値が，時間的に変化しない（零である）ことを意味する。しかしながら，一般にどんな時系列も，それを平均値に関して定常化することは比較的たやすいから，このことは何等の一般性の制限をも意味しない。一般にスペクトルは平均値を定常化したのちにはじめて評価量としての意味をもつのであるから，この意味においてもこの定式化は必然的であるといえるのである。* 以下において長期傾向とは常にこの意味の，即ち平均値のそれを除いたあとにのこる法化されないスペクトルの長期傾向を意味するものとする。

第1図は，札幌の1927年7月から1931年12月までの月平均気温の記録を

半年ずつずれた２ケ年の長さをもつ区間に区切つて，そのおのおのの中で24等分の調和解析を行つた結果であるが，３つの極大の左又は右への系統的なずれは，明かにこの区間に對して相對的な長期傾向と考えられる。

次に方式の（３）を検討してみる。母系列のスペクトルを推定するためにとる区間の長さＴが短くなればなるほど，それから求めたスペクトルの不確かさは大きくなるが，Fourier 変換はそれぞれ Gauss 分布をしていると考えられる各時点における時系列の値に對する線形変換であるから，その各成分は明かにＴに逆比例する分散をもつた Gauss 分布をなす。從つて各点において計算したスペクトルの成分は，また１つの Gauss 時系列をつくつている。從つてこの時系列から何等かの方法によつて將來のスペクトルを予報することは意味があると考えられる。** まず第一に考えられるのは，この時系列に對して，定常時系列の予報方式を適用できないかどうかということである。そこでこの時系列の定常性を吟味してみよう。そのために，スペクトルの各成分の分散を計算してみる。母系列を $Z(t), -\infty < t < \infty$ とすると，それの有限分析時間Ｔに對するスペクトルは，

$$
\left.\begin{aligned}
A_{\mathrm{T}}(\nu) &= \int_0^{\mathrm{T}} \sin \omega t\, Z(t)\, dt, \\
B_{\mathrm{T}}(\nu) &= \int_0^{\mathrm{T}} \cos \omega t\, Z(t)\, dt,
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3)
$$

で與えられる（$\omega = 2\pi\nu$）。$A_{\mathrm{T}}(\nu)$ の自乘の集団平均即ち分散は

＊ここのスペクトルは法化しないスペクトルである。法化したスペクトルは平均値と分散とを定常化したのちにはじめて評価量としての意味をもつてくる。法化しないスペクトルを用いると，分散の長期傾向は係数 $a_i(t)$ の時間的変化に含まれてくる。從つて上の定式化に於いて $p(t)$ の強さも時間的に一定と仮定しておいて差支えないのである。なお文献（３）p.12 を見よ。

＊＊ 一寸考えると，この時系列にあらわれる偶然的変動は，有限な分析時間を用いたためのスペクトルのぼけを意味するものであつて，もとの時系列における，外部からの擾亂によつて生じた偶然的変動とは本質的に異るもののように思われる。しかしながら Fourier 変換は一種の重荷平均であり，一方どんな観測においても，実際によみとられる値は何等かの意味での重荷平均値にすぎないことを考えると，スペクトルを求めることは普通機械が自動的にやつてくれる平均を人爲的にやつているにすぎないことが理解され，從つてこれをまた１つの時系列とみなすことは妥当であると思われる。ただもとの時系列の場合には，その各時点における観測値が，たとえそれが微視的には１つの平均値にすぎないものであつても，我々が実際に必要とするのは巨視的な平均値そのものなのであるから，確定的な値としての意味をもつているのに反して，今の場合には我々の求めているものは母系列のスペクトルそのもの，即ち前の場合の微視的な値そのものであるから，１つ１つの観測値そのものが不確定性をもつているのである。スペクトルのぼけはこの不確定性のスペクトル的なあらわれにすぎない。この時系列の予報値は，この不確定性のほかに更に予報の誤差を含んでくるから，スペクトルのぼけはますます大きくなつてくる。なお厳密にいうと，１つの母系列に対応するのはもとの時系列の１点だけであつて，有限な長さの区間ではないから，このことからも誤差が生じてくる。しかし $a_i(t)$ の変化が定常成分の変化に比べて十分ゆるやかならば，この誤差は十分小さくなるであろう。

$$\langle A_T(\nu)^2\rangle = \frac{1}{T}\left\langle\int_0^T \sin\omega\, t_1\, Z(t_1)\,dt_1 \int_0^T \sin\omega\, t_2\, Z(t_2)\,dt_2\right\rangle$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T \sin\omega\, t_1 \sin\omega\, t_2 \langle Z(t_1)Z(t_2)\rangle dt_1\, dt_2$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T \sin\omega\, t_1 \sin\omega\, t_2\, R_Z(t_2-t_1)\,dt_1\, dt_2$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T (T-x)\cos\omega\, x\, R_Z(x)\,dx - \frac{\cos\omega T}{T\omega}\int_0^T \sin\omega\,(T-x)\,R_Z(x)\,dx, \quad \ldots\ldots (4,1)$$

同様にして $B_T(\nu)$ の分散は,

$$\langle B_T(\nu)^2\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T (T-x)\cos\omega x R_Z(x)\,dx + \frac{\cos\omega T}{T\omega}\int_0^T \sin\omega(T-x)R_Z(x)dx, \quad \ldots\ldots (4,2)$$

となる。從つてこれらは ω によつて異るほか，母系列の相関函数 $R_Z(x)$ に関係する。$R_Z(x)$ は当然各時点によつて異るから，時系列 $A_T(\nu)$, $B_T(\nu)$ は一般に分散に関して非定常である。このことからだけでもこれらの時系列の予報に通常の方法を応用するのは妥当でないことがわかるが，更に我々が必要とするのはエネルギースペクトルであつて，$A_T(\nu)$ 及び $B_T(\nu)$ そのものではないのであり，このエネルギースペクトルの変化はもともと定常な変動に比べてゆつくりした，全区間の長さと同じ程度の周期をもつものであることを考えると，これらに對して定常時系列の予報の方法を適用することは無意味であることが明らかになるのである。從つて結局，エネルギースペクトル $S_T(\nu)=A_T(\nu)^2+B_T(\nu)^2$ を求めて，その各成分の時間的変化を，たとえば曲線のあてはめの方法によつて平滑化し，それからその將來の値を推定するよりほかないであろう。

以上は長期傾向そのものの予報であるが，次にこれを利用してもとの時系列 $q(t)$ の予報を行う問題を考えなければならない。その方法には以下に示すような，2つの可能性がある。その第1は，時間的に変化する係数をもつ（2）のような形の方程式によつて記述される物理系（可変徑数系 —— variable parameter system）の性質に對する L. Zadeh の数学的理論にもとずいて，定常時系列の場合と同様に，現在までの観測値からそれに對応する過去の衝撃の列即ち外力 $p(t)$ を算出し，（2）の右邊を零とおいた方程式によつて記述される系の，それらに對する応答の重ね合せとして將來の値を推定するという方法であり，[2] その第2は，與えられた時系列を，スペクトルに関して定常化してしまつてから，通常の方式によつて予報を行い，それを定常化しない場合にひき直すという方法である。

III. Zadeh の理論とそれによる非常定時系列の豫報方式の定式化

$p=d/dt$ とおき，$p(t)$ のかわりに一般の外力 $e(t)$ をかくと，（2）は

$$L(p;t)q(t)=[a_n(t)p^n+\ldots\quad+a_1(t)p+a_0(t)]q(t)=e(t) \qquad \ldots\ldots(5)$$

とかかれる。この方程式によつて記述される系の $t=\xi$ における衝撃 $\delta(t-\xi)$ に對する応答を $W(t,\xi)$ とすると，

$$L(p;t)W(t,\xi)=\delta(t-\xi) \qquad \ldots\ldots(6)$$

であつて，重ね合せの原理により，$q(t)$ は

$$q(t)=\int_{-\infty}^{\infty}W(t,\xi)e(\xi)d\xi \qquad \ldots\ldots(7)$$

で與えられる。固定係数系の場合の周波数応答函数 $H(i\omega)$ の擴張として，可変係数系の周波数応答函数を

$$H(i\omega;t)=\int_{-\infty}^{\infty}W(t,\xi)e^{-i\omega(t-\xi)}d\xi \qquad \ldots\ldots(8)$$

で定義することができる。なぜなら，この式は，外力 $e^{i\omega t}$ に對するこの系の応答が $H(i\omega;t)e^{i\omega t}$ であることを示しており，また $e(t)$ の Fourier 変換を $E(i\omega)$ とすると，

$$q(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(i\omega;t)E(i\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad \ldots\ldots(9)$$

となつて，これは固定係数系における周知の関係

$$q(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(i\omega)E(i\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad \ldots\ldots(10)$$

の自然な擴張となつているからである。外力が $p(t)$ である場合には，そのエネルギースペクトルを $S(f)$ とすれば，$q(t)$ の分散は

$$\sigma^2(t)=\int_{0}^{\infty}|H(i\omega;t)|^2S(f)df \qquad \ldots\ldots(11)$$

で與えられることも容易に示される。

$a_i(t)$ $(i=1,2,\ldots\ldots,n)$，従つて $H(i\omega;t)$ が周期的に変化する場合には，$H(i\omega;t)$ を Fourier 級数に展開することができる。一般には $a_i(t)$ ないし $H(i\omega;t)$ の変化は非周期的でであから，その Fourier 変換を考えなければならないが，それには $H(i\omega;t)$ そのものよりもむしろ $H(i\omega;t)e^{i\omega t}$ 即ち $e^{i\omega t}$ に對する系の応答の Fourier 変換を考えた方が便利である：

$$\Gamma(i\omega;iu)=\int_{-\infty}^{\infty}H(i\omega;t)e^{i(\omega-u)t}dt. \qquad \ldots\ldots(12)$$

この“2重周期応答”は次の関係をみたす：

$$Q(iu)=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(i\omega;iu)E(i\omega)d\omega. \qquad \ldots\ldots(13)$$

但し $Q(iu)$ は $q(t)$ の Fourier 変換である。これは重ね合せの積分（7）の周波数領域における表現にほかならない。

$H(i\omega;t)$ の最も重要な性質として，これが微分方程式：

$$\left[\frac{1}{n!L(i\omega;t)}\frac{\partial^n L(i\omega;t)}{\partial(i\omega)^n}\right]\frac{d^n H(i\omega;t)}{dt^n}+\cdots+\left[\frac{1}{L(i\omega;t)}\frac{\partial L(i\omega;t)}{\partial t}\right]\frac{dH(i\omega;t)}{dt}+H(i\omega;t)=\frac{1}{L(i\omega;t)} \qquad \cdots\cdots (14)$$

を満足することが證明される。$1/L(i\omega;t)$ は，t という瞬間においてこの系がもつ係数 $a_i(t)$ ($t=1,2,\ldots,$ n) と等しい係数をもの固定徑数系の周波数応答函数であるが，これを我々の系の $t=t$ における瞬間的周波数応答とよび，$H_f(i\omega;t)$ とかくことにする。(14) は $H(i\omega;t)$が，形式的にこの系の瞬間的周波数応答 $H_f(i\omega;t)$ を入力として，(14) の右邊を零とおいた方程式によつて記述される仮想的な系に入れた場合の応答と見なされ得ることを示している。即ち系の瞬間的周波数応答 $H_f(i\omega;t)=1/L(i\omega;t)$ がわかれば，(14) を解くことによつて $H(i\omega;t)$ が求まり，從つて任意の入力 $e(t)$ に對する応答 $p(t)$ を，(9) から求めることができるのである

II にのべた方式は，結局観測された時系列が (2) という方程式によつて記述されているものと考えて，$a_i(t)$ ($i=1,2,\ldots,$ n) の各瞬間の値，從つて系の瞬間的周波数応答 $H_f(i\omega;t)=1/L(i\omega;t)$ を，各瞬間を中心としてとつた適当な長さの小区間のスペクトルから推定し，その將来の値を予報することにほかならない。現在を $t=0$ とすると，このようにして理想的にいえば $t=-\infty$ から $t=\alpha$ (予報すべき將来の時点) までの $H_f(i\omega;t)$ がわかる。そうするとそれを用いて (14) 式を解くことによつて $-\infty<t<\alpha$ における $H(i\omega;t)$ がわかり，從つて (8) の逆変換によつて系の $t=\xi$ における衝撃に對する応答 $W(t,\xi)$ が $t=\alpha$ まで計算されることになる。観測された時系列に對する過去の衝撃の列 $p(\xi)$，$-\infty<\xi\leqq 0$ は (2) 式から上に知られた $a_i(t)$ を使つて算出することができるから，これらの衝撃に對する $t=\alpha$ における応答を重ね合せて，$q(\alpha)$ の推定値とすればよい。また $0<t<\alpha$ における衝撃が全く推定可能であることによる予報の誤差は，

$$E^2=\int_0^\alpha W^2(\alpha,\ \xi)d\xi \qquad \cdots\cdots (15)$$

で與えられる。この誤差のほかに，母系列のスペクトルを短い区間の觀測値のスペクトルから推定しなければならないことによる誤差が入つてくることはいうまでもない。この誤差の評価も重要な問題であるが，これに関する詳しい考察は將来にゆだねて，ここでは立ち入らないことにする。

VI. 定常化による方法

Zadeh の理論による定式化は，理論的には正しいものであつて，非定常時系列の予報の問題は，原理的にはこれで解決されたと考えてよいであろう。しかしながら，この方式は非常に複雑

な計算を必要とするから，實用にはむかないのではないかと思われる。そこで，より簡単な方法として，まず與えられた時系列をスペクトルについて定常化してしまい，定常化された系列に對して通常の方法を適用することを考える。平均値ならびに分散に関しては，既によく知られた定常化の方法があるが，ここでは更にスペクトルまでを定常化しようというのである。平均値はスペクトルの周波数零の成分であり，分散はスペクトル全体の强さに比例するから，平均値と分散の定常化も，もともとスペクトルの定常化の特別の場合にすぎないのである。エネルギースペクトルと相関函数とは全く同等なものであるから，スペクトルに関する定常化は即ち相関函数に関する定常化を意味する。現在まで，相関函数に関して非定常な時系列をとり扱うには，異る相関函数をもつ部分を互にきりはなして解析する方法がとられているが,[3] 予報という觀点からみるとこれでは不十分と思われる。定常時系列においては，（1）のような常数係数の線形微分方程式による定式化が必然的なものであるということができるのであるが,[2] 時系列の場合の確率化が定常化を意味するものとすれば,[4] （1）の係数 a_i が相関函数ないしエネルギースペクトルから一義的に定まる以上，非定常な時系列が與えられた場合，これる平均値だけでなくすべてのスペクトル成分について，定常化することは必然的要請であつて，定常化を平均値（及び分散）だけに止めて，異る相関函数をもつ部分をきりはなして論ずることは中途半端な意味しかないと思われる。

今 $t=t'$ を中心とする幅 T の小区間内で計算した振幅スペクトルを

$$A(\nu,t')=\int_{t'+\frac{T}{2}}^{t'+\frac{T}{2}} q(t)\sin\omega\left(t-t'+\tfrac{T}{2}\right)dt, \qquad \ldots\ldots (16,1)$$

$$B(\nu,t')=\int_{t'+\frac{T}{2}}^{t'+\frac{T}{2}} q(t)\cos\omega\left(t-t'+\tfrac{T}{2}\right)dt, \qquad \ldots\ldots (16,2)$$

とすると，$t=t'$ に對応する母系列のエネルギースペクトルの推定値は，

$$S(\nu,t')=A^2(\nu,t')+B^2(\nu,t') \qquad \ldots\ldots (17)$$

で與えられる。おのおの ν の値に對してこれを t' の函数としてグラフに描き，それを平滑化した曲線 $S'(\nu,t')$ から將来 $(t'=\alpha)$ のエネルギースペクトルの値 $S(\nu,\alpha)$ を推定するわけである。今ある時刻 $t=t_0$ を定常化の規準時刻にとり，

$$\sqrt{\frac{S'(\nu.t_0)}{S'(\nu,t')}}\quad M(\nu,t') \qquad \ldots\ldots (18)$$

をつくる。この $M(\nu,t')$ を $B(\nu,t')$ 及び $A(\nu,t')$ に乘ずると，スペクトルが定常化される。なぜなら，

$$M(\nu,t')^2\left[A(\nu,t')^2+B(\nu,t')^2\right]=M^2(\nu,t')S(\nu,t')=S(\nu,t_0)$$

となり，エネルギースペクトルは t の如何にかゝわらず一定 $(=S(\nu,t_0))$ になるからである。

即ち $M(\nu,t)$, $B(\nu,t)$ の逆余弦変換

$$q_R(t)=4\int_0^\infty M(\nu,t')\,B(\nu,t')\cos\omega\left(t-t'+\frac{T}{2}\right)dt,$$

$$t'-\frac{T}{2}<t<t'+\frac{T}{2} \qquad \dots\dots (19)$$

が定常化された時系列を與えるのである。この時系列に對して通常の予報の方式を適用して（即ち $q_R(t)$ に對して改めて全区間を用いてエネルギースペクトルを計算し，それから求められる予報フィルターを用いて)[2] $\alpha-T/2<t<\alpha+T/2$ の間の $q_R(t)$ を推定し，その区間内で計算した余弦スペクトル $B(\nu,\alpha)$ を $M(\nu,\alpha)=\sqrt{S'(\nu,t_0)/S'(\nu,\alpha)}$ で割つたものの逆余弦変換をもつてこの区間内の予報値とするのである。

V. む す び

以上で，原理的にいつて，非定常時系列の予報の問題は完全に解決されたと考えられる。II にのべたように，定常時系列の予報の常数係数微分方程式（1）による定式化が必然的なものであるのと同じ意味で，非定常時系列の予報においては可変係数微分方程式（2）による定式化が必然性をもつと考えられる。上にのべた2つの方法は一見全くちがうもののようであるが，IIIでのべた方式は（2）をそのまゝの形でとり扱おうとするものであり，VIにのべた方式はこれを（1）にひきなおしてとり扱おうとするものであつて，同等な必然性をもつのである。これらの方法をより推計学的に厳密に論ずるとともに，實際への応用を試みることが今後の課題であるが，これを効果的に實際問題に適用すれば，今まで定常時系列の場合の方法を實際に応用した結果に對してしばしば加えられた，基本周期の変動を考えに入れていないという批難に對しても耐え得る結果が得られることが期待される。

なお今堀は，時系列を小区間に分けて各区間のスペクトルを求めることによつて，スペクトルの時間的変化を求めても，結局全系列結局全系列を一区間と考えてスペクトルを計算した場合と同じ知識量しか得られないことをのべたが，[1] これは上のような非定常的なとり扱いが無意味であることを意味するのではないことに注意しておく。これは小区間に分けてその各区間のスペクトルを計算するという操作と全体を一区間と見てそのスペクトルを計算するという操作とを比較した場合の話であつて，我々の場合は，小区間に分けることによつて得られたスペクトルの時間的変化に関する知識を利用して，もとの時系列を定常化したのち，更に解析を加えるのであるから，必ずしもその議論は適用されないであろう。

文 献

1）今堀克巳 1952 調和解析による長期予報（Ⅱ）．予報研究ノート，3，2号．低温科学，9，34．

2）堀 淳一 1952 今堀の長期予報，脳波統計，乱流統計理論の基礎的意味，特に Kolmogoroff-Wiener, Wold-小河原 の予報理論との関連について．低温科学，9，45．

3）小河原正巳 時系列論とその応用．応用統計学，第7章．

4）Zadeh L.A. 1952 Frequency Analysis of Variable Networks. Proc.I.R.E., 33, 291−299.

Résumé

The scheme of the prediction of the non-stationary time series, which has previously been proposed by K.Imahori, was discussed in detail. It was concluded that it amounts to the assumption that the observed time series is described by the equation of the form:

$$a_n(t)\frac{d^n q}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}q}{dt^{n-1}}+\dots\qquad+a_1(t)\frac{dq}{dt}+a_0(t)q=p(t),$$

which has temporally variable coefficients, instead of the equation with constant coefficients which is used as the fundamental equation in the stationary cases. Two different mathematical formulations of the prediction scheme based upon this equation were proposed, one of which makes use of Zadeh's theory of frequency analysis of variable networks, and the other is based on the principle of stationarization with respect to the power spectrum. The former is mathematically rigorous but involves considerable practical difficulties, while the latter is expected to be useful in practice and will be applied subsequently.