Jun-ichi HORI and Teisaku KOBAYASHI 1952 On the Multiple Prediction.
Low Temperature Science, 9. (With English résumé p. 104)

多重豫報について*

堀 淳一, 小林禎作
(低温科学研究所 気象学部門)

(昭和27年8月受理)

I. はしがき

単一な時系列の予報の問題に對しては, 既に多くの場合許し得る假定, 即ち定常性の假定の下において, 原理的な解決がなされており, 實際への応用もかなり試みられている。単一定常時系列の予報理論の代表的なものとしては Kolmogoroff-Wiener 及び Wold-小河原のそれを挙げることができる。これらは数学的に嚴密なものであつて, 特に後者は推計学的な段階にまで到達した, 實際への応用に對しても有力な便利な形式をもつた理論である。しかしながら, たとえば複雑な気象現象などに對してこれらの方法を応用して予報を行おうとすると, 非常に複雑な計算が必要となるので, 自動計算機の製作が未だよく発達していない現在の段階では, 實用化はなかなか困難である。この困難は結局は電子計算機を作ることによつて解決されるべきものであるが, さしあたりの一時的手段として, 筆算にたよつた比較的簡単な計算でも間に合うような近似的方法を考えることも大きな意味をもつと思われる。今堀はさきに, Kolmogoroff-Wiener 及び Wold-小河原と独立に, 異つた観点から長期予報の理論をたて, 且つそれから實際の応用に便利な近似方法を導いたが, この近似方法は, 気温に對する二三の場合に応用され, その有效性が示された。[1)2)]

これらの方法を時系列が非定常な場合並に多重予報即ちいくつかの時系列を同時に考えて, それらの相互の相関をも考えに入れてより精度の高い予報を行おうとする場合に擴張することは重要な課題である。非定常な場合に對する擴張については, さきに二三の考察を行つたが,[4)] ここでは多重予報の場合に関する今堀の理論の擴張についてのべる。

Kolmogoroff-Wiener の理論のこの場合への擴張は Wiener 自身によつて, また Wold-小河原の理論のそれは小河原によつて試みられ, 単一時系列の場合と殆ど同様な理論ができている。[5)6)] もともとこれらの理論及び今堀の理論は, 導き方や形式はそれぞれちがうけれども, 本質的には同じ内容のものであることが示されるのであつて,[3)] 今堀の理論もそれらの場合と同じ線に沿つて擴張し得ることが期待される。ただこの場合には, 前二者に比べてその物理的内容が式の上でもあらわに示されるという特徴があるのである。更に, 今堀の近似的方法が, 多重予報の場合に

* 北海道大学低温科学研究所業績 第148号.

どういう形をとるかということも，興味のある問題であるが，これについては第III節に示すように，この近似方法を用いる場合には，多重予報を行つても単一予報より精度はよくならないというやや意外な結論が得られる。今堀理論の最も大きな特徴は，この近似的方法にあつたのであるから，このことは以下の擴張があまり意味をもたないことを示しているようにも思われるが，この結果からこの近似がどんな意味をもつているかを知ることができるという点と，上にのべたような多重予報の物理的意味を明らかにするという点からみて，一応その考え方をのべておく価値があるであろう。

II. 多重豫報理論の定式化

単一時系列の予報理論は，いずれも觀測される現象が，ある振動系に外から完全にでたらめな外力が加わつた結果現れたものであるという考えを基礎にしてつくられている。むしろこう考えることが論理的な必然性をもつているのである。[3]　今堀の理論においては，このことが，それの基礎となる一般化された Langevin 方程式

$$a_n\frac{d^n q}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}q}{dt^{n-1}}+a_{n-2}\frac{d^{n-2}q}{dt^{n-2}}+\dots\quad+a_1\frac{dq}{dt}+a_0q=p(t)\quad\dots\dots(1)$$

によつて，明らかに表現されている。*　多重予報における1つ1つの時系列も，やはりこのような方程式によつて支配されていると考えられるが，この場合各時系列は独立でなくて，相互に影響を及ぼしあつている，即ち相互相関 (cross correlation) をもつているから，それぞれの時系列に對応する振動系も，互に独立でなくて，相互作用を及ぼし合うものと考えなければならない。いいかえれば，これらの振動系は，全体として1つの聯成振動系を作つていると考えなければならないのである。各時系列を $q_1(t),\ q_2(t),\dots\dots,\ q_n(t)$ で表すと，このことは数式的には次のように表される：

$$\begin{aligned}
&a_{11}^{(m)}\frac{d^m q_1}{dt^m}+a_{11}^{(m-1)}\frac{d^{m-1}q_1}{dt^{m-1}}+\dots\qquad+a_{11}^{(1)}\frac{dq_1}{dt}+a_{11}^{(0)}q_1\\
&+a_{12}^{(m)}\frac{d^m q_2}{dt^m}+a_{12}^{(m-1)}\frac{d^{m-1}q_2}{dt^{m-1}}+\dots\qquad+a_{12}^{(1)}\frac{dq_2}{dt}+a_{12}^{(0)}q_2\\
&+\dots\dots\dots\dots\\
&+a_{1n}^{(m)}\frac{d^m q_1}{dt^m}+a_{1n}^{(m-1)}\frac{d^{m-1}q_n}{dt^{m-1}}+\dots\qquad+a_{1n}^{(1)}\frac{dq_n}{dt}+a_{1n}^{(0)}q_n=p_1(t),\\
&a_{21}^{(m)}\frac{d^m q_1}{dt^m}+a_{21}^{(m-1)}\frac{d^{m-1}q_1}{dt^{m-1}}+\dots\qquad+a_{21}^{(1)}\frac{dq_1}{dt}+a_{21}^{(0)}q_1
\end{aligned}$$

---

* 今堀の最初の定式化においては，1つの高階微分方程式の代りに，1階微分方程式系が用いられているが，兩者は本質的には同等であることが示される．ここでは便宜上前者を用いる．[3]

$$+a_{22}^{(m)}\frac{d^m q_2}{dt^m}+a_{22}^{(m-1)}\frac{d^{m-1}q_2}{dt^{m-1}}+\dots \qquad +a_{22}^{(1)}\frac{dq_2}{dt}+a_{22}^{(0)}p_2$$

$$+\dots\dots\dots\dots$$

$$+a_{2n}^{(m)}\frac{d^m q_n}{dt^m}+a_{2n}^{(m-1)}\frac{d^{m-1}q_n}{dt^{m-1}}+\dots \qquad +a_{2n}^{(1)}\frac{dq_n}{dt}+a_{2n}^{(0)}q_n=p_2(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n\,1}^{(m)}\frac{d^m q_1}{dt^m}+a_{n\,1}^{(m)}\frac{d^{m-1}q_1}{dt^{m-1}}+\dots \qquad +a_{n\,1}^{(1)}\frac{dq_1}{dt}+a_{n\,1}^{(0)}q_1$$

$$+a_{n\,2}^{(m)}\frac{d^m q_2}{dt^m}+a_{n\,2}^{(m-1)}\frac{d^{m-1}q_2}{dt^{m-1}}+\dots \qquad +a_{n\,2}^{(1)}\frac{dq_2}{dt}+a_{n\,2}^{(0)}q_2$$

$$+\dots\dots\dots\dots$$

$$+a_{nn}^{(m)}\frac{d^m q_n}{dt^m}+a_{nn}^{(m-1)}\frac{d^{m-1}q_n}{dt^{m-1}}+\dots \qquad +a_{nn}^{(1)}\frac{dq_n}{dt}+a_{nn}^{(0)}q_n=p_n(t),$$

$$\overline{p_i(t')p_j(t'')}=B_{ij}\,\delta(t'-t''). \qquad \dots\dots(2)$$

これらの方程式は，形式的に次のようにかきなおすことができる：

$$\frac{dq_1}{dt}=q_1^{(1)},$$

$$\frac{dq_2}{dt}=q_2^{(1)},$$

$$\vdots$$

$$\frac{dq_n}{dt}=q_n^{(1)};$$

$$\frac{dq_1^{(1)}}{dt}=q_1^{(2)},$$

$$\frac{dq_2^{(1)}}{dt}=q_2^{(2)},$$

$$\vdots$$

$$\frac{dq_n^{(1)}}{dt}=q^{n\,(2)};$$

$$\vdots$$

$$\frac{dq_n^{(m-2)}}{dt}=q_n^{(m-1)};$$

$$a_{11}^{(m)}\frac{dq_1^{(m-1)}}{dt}+a_{12}^{(m)}\frac{dq_2^{(m-1)}}{dt}+\dots+a_{1n}^{(m)}\frac{dq_n^{(m-1)}}{dt}$$

$$+a_{11}^{(m-1)}q_1^{(m-1)}+a_{12}^{(m-1)}q_2^{(m-1)}+\dots\dots \qquad +a_{1n}^{(m-1)}q_n^{(m-1)}$$

$$+\dots\dots\dots\dots$$

$$+a_{11}^{(1)}q_1^{(1)}+a_{12}^{(1)}q_2^{(1)}+\dots \qquad a_{1n}^{(1)}q_n^{(1)}$$

$$+a_{11}^{(0)}q_1+a_{12}^{(0)}q_2+\ldots \qquad +a_{1n}^{(0)}q_n=p_1(t),$$

$$a_{21}^{(m)}\frac{dq_1}{dt}^{(m-1)}+a_{22}^{(m)}\frac{dq_2}{dt}^{(m-1)}+\ldots \qquad +a_{2n}^{(m)}\frac{dq_n}{dt}^{(m-1)}$$

$$+a_{21}^{(m-1)}q_1^{(m-1)}+a_{22}^{(m-1)}q_2^{(m-1)}+\ldots \qquad +a_{2n}^{(m-1)}q_n^{(m-1)}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+a_{21}^{(1)}q_1^{(1)}+a_{22}^{(1)}q_2^{(1)}+\ldots \qquad +a_{2n}^{(1)}q_n^{(1)}$$

$$+a_{21}^{(0)}q_2+a_{22}^{(0)}q_2+\ldots \qquad +a_{2n}^{(0)}q_n=p_2(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}^{(m)}\frac{dq_1}{dt}^{(m-1)}+a_{n2}^{(m)}\frac{dq_2}{dt}^{(m-1)}+\ldots \qquad a_{nn}^{(m)}\frac{dq_n}{dt}^{(m-1)}$$

$$+a_{n1}^{(m-1)}q_1^{(m-1)}+a_{n2}^{(m-1)}q_2^{(m-1)}+\ldots \qquad +a_{nn}^{(m-1)}q_n^{(m-1)}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+a_{n1}^{(1)}q_1^{(1)}+a_{n2}^{(1)}q_2^{(1)}+\ldots \qquad +a_{nn}^{(1)}q_n^{(1)}$$

$$+a_{n1}^{(0)}q_1+a_{n2}^{(0)}q_2+\ldots \qquad +a_{nn}^{(0)}q_n=p_n(t). \qquad \ldots\ldots (3)$$

こゝで

$$z_i=\sum_{j=1}^{n}C_{ij}q_j\ , \qquad i=1,2,\ldots\ldots,n, \qquad \ldots\ldots (4)$$

$$\sum_j C_{ij}a_{jk}^{(m)}=A_i C_{ik}, \quad i,k,=1,2,\ldots\ldots,n, \qquad \ldots\ldots (5)$$

(但し A_i は

$$Det\ \vdash (a_{ij}^{(m)}-A\,\delta_{ij})=0 \qquad \ldots\ldots (6)$$

の根）で定義される一次変換を変数 q_i , $q_i^{(1)}$,… $q_i^{(m-1)}$,($i=1,2,\ldots,n$) に對して施すと，(3) は，

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dz_i}{dt}=z_i^{(1)},\\
&\frac{dz_i}{dt}^{(1)}=z_i^{(2)},\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{dz_i}{dt}^{(m-2)}=z_i^{(m-1)},\\
&A_i\frac{dz_i}{dt}^{(m-1)}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p}d_{ip}^{(k-1)}z_p^{(k-1)}=\sum C_{ij}p_j(t),\\
&\qquad\qquad i=1,2,\ldots,n,
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (7)$$

となる。但し

$$d_{ip}^{(k-1)}=\sum_l\sum_j a_{lj}^{(k-1)}C_{il}\widetilde{C}_{jp}, \qquad \ldots\ldots (8)$$

$$(C_{ij}) = (C_{ij})^{-1} \qquad \ldots\ldots (9)$$

である。そこで $(z_1, z_2, \ldots\ldots z_n ; z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots\ldots z_n^{(1)} ; \ldots\ldots z_1^{(m-1)}, z_2^{(m-1)}, \ldots\ldots, z_n^{(m-1)})$ なる値の組を1つの $m \times n$ 次元のベクトルと考えると，（7）は

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \\ \vdots \\ z_n^{(1)} \\ z_1^{(2)} \\ z_2^{(2)} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{(m-2)} \\ z_n^{(m-2)} \\ z_1^{(m-1)} \\ z_2^{(m-1)} \\ \vdots \\ z_n^{(m-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overbrace{0\,0\,0 \cdots\cdots}^{n\text{ 個}} & 1\,0\,0\,0 \cdots\cdots & 0\,0\,0 \cdots\cdots & 0\,0\,0 \cdots\cdots 0\,0 \\ 0\,0\,0 \cdots\cdots & 0\,1 \cdots\cdots 0\,0 & 0\,0\,0 \cdots\cdots & 0\,0\,0 \cdots\cdots 0\,0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0\,0 \cdots\cdots \vdots & 0\,0 \cdots\cdots 0\,0\,1 & 0\,0\,0 \cdots & 0\,0\,0 \cdots\cdots 0\,0 \\ & 0\,0 & 1\,0\,0 & \\ & & 0\,1\,0\,0 & \\ & & & \\ & & & \cdots\cdots 0\,1\,0\,0 \\ & & & \cdots\cdots 0\,1\,0 \\ & & & \cdots\cdots 0\,0\,1 \\ -\frac{d_{11}{}^0}{A_1} - \frac{d_{12}{}^0}{A_1} \cdots - \frac{d_{1n}{}^0}{A_1} & -\frac{d_{11}{}^1}{A_1} \frac{d_{12}{}^1}{A_1} \cdots - \frac{d_{1n}{}^1}{A_1} & & -\frac{d_{11}^{(m-1)}}{A_1} \; -\frac{d_{12}^{(m-1)}}{A_1} \cdots \\ -\frac{d_{21}{}^0}{A_2} - \frac{d_{22}{}^0}{A_2} \cdots\cdots & & & -\frac{d_{1n}^{(m-1)}}{A_1} \\ \cdots\cdots & & & \\ -\frac{d_{n1}{}^0}{A_n} - \frac{d_{n2}{}^0}{A_n} & & & -\frac{d_{n1}^{(m-1)}}{A_n} \cdots - \frac{d_{nn}^{(m-1)}}{A_n} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ z_n^{(m-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \\ \\ \\ \\ \frac{\Sigma C_{1j} p_j}{A_1} \\ \vdots \\ \frac{\Sigma C_{nj} p_j}{A_n} \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots (10)$$

という形にかくことができる。ここで再び今度は（10）式の行列

$$| A_{ik}^{jl} | \; (i, k = 1, 2, \ldots, n \;, ; j, l = 1, \ldots \;, m)$$

を對角線型にする1次変換

$$y_i^j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} b_{ik}^{jl} Z_k^{(l-1)} \;, \qquad \ldots\ldots (11)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} b_{ik}^{jl} A_{ks}^{lt} = \lambda_i^j b_{is}^{jt} \;, \qquad \ldots\ldots (12)$$

$$Det\,(A_{ik}^{jl} - \lambda\, \delta_{jl}\, \delta_{ik}) = 0 \qquad \ldots\ldots (13)$$

を導入すると，（10）は

$$\frac{dy_i^j}{dt} - \lambda_i^j y_i^j = \pi_i^j (t) \qquad \ldots\ldots (14)$$

という簡単な形に歸せられる。但し

$$\pi_i^j (t) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^{jm} \sum_{s=1}^{n} \frac{C_{ks}}{A_k} p_s \;, \qquad \ldots\ldots (16)$$

であつて，

$$\overline{\pi_i^j (t') \pi_q^h (t'')} = \sigma_{iq}^{jh}\, \delta(t' - t'') = \sum_k \sum_s b_{ik}^{jm} \frac{C_{ks}}{A_k} \sum_l \sum_t b_{ql}^{hm} \frac{C_{lt}}{A_l} B_{ts}\, \delta(t' - t'') , \qquad \ldots\ldots (16)$$

但し $\overline{p_t(t')\,p_s(t'')} = B_{ts}\,\delta(t'-t'')$ …… (17)

である。

Langevin 方程式の解は，

$$y_i^j(t)=\int_0^{\infty}\pi_i^j(t-t')e^{\lambda_i^j t'}\,dt'=\int_{-\infty}^{t}\pi_i^j(t')e^{\lambda_i^j(t-t')}\,dt', \qquad \text{…… (18)}$$

$$\overline{y_i^j} = y_i^j(0)\,e^{\lambda_i^j t}, \qquad \text{…… (19)}$$

$$\overline{(y_i^j-\overline{y_i^j})(y_g^h-\overline{y_g^h})} = -\frac{\sigma_{ig}^{jh}}{\lambda_i^j+\lambda_g^h}\left[1-e^{(\lambda_i^j+\lambda_g^h)t}\right], \qquad \text{…… (20)}$$

で与えられ，また相関函数は

$$Y_{ig}^{jh}(\tau)=\left[y_i^j(t+\tau)\,y_g^h(t)\right]_t = -\frac{\sigma_{ig}^{jh}}{\lambda_i^j+\lambda_g^h}\,e^{\lambda_i^j\tau}, \quad \tau>0 \qquad \text{…… (21)}$$

となつて，方程式

$$\frac{dY_{ig}^{jh}}{d\tau} = \lambda_i^j\,Y_{ig}^{jh}, \qquad \tau>0 \qquad \text{…… (22)}$$

を満足する。

これらの結果に b_{ik}^{jl} の逆変換 $\widetilde{b}_{ik}^{jl}$ を施してもとの変数 $z_i^{(j-1)}$ にもどすと，

$$\begin{aligned} z_i^{(j-1)} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\widetilde{b}_{ik}^{jl}\,y_k^l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\widetilde{b}_{ik}^{jl}\int_0^{\infty}\pi_k^l(t-t')\,e^{\lambda_k^l t'}\,dt' \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\widetilde{b}_{ik}^{jl}\int_{-\infty}^{t}\pi_k^l(t')\,e^{\lambda_k^l(t-t')}\,dt', \end{aligned} \qquad \text{…… (23)}$$

$$\begin{aligned} \overline{z_i^{(j-1)}} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\widetilde{b}_{ik}^{jl}\,\overline{y_k^l} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\widetilde{b}_{ik}^{jl}\,y_k^l(0)\,e^{\lambda_k^l t} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\widetilde{b}_{ik}^{jl}\sum_{s=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}b_{ks}^{lt}\,z_s^{(t-1)}\,e^{\lambda_k^l t}, \end{aligned} \qquad \text{…… (24)}$$

$$\begin{aligned} Z_{i\ g}^{(j-1)(h-1)} &= \left[z_i^{(j-1)}(t+\tau)\,z_g^{h(h-1)}(t)\right]_t \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\widetilde{b}_{jk}^{il}\,y_k^l(t+\tau)\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\widetilde{b}_{gs}^{ht}\,y_s^t(t)\right]_t \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\widetilde{b}_{ik}^{jl}\,\widetilde{b}_{gs}^{ht}\left[y_k^l(t+\tau)\,y_s^t(t)\right]_t \\ &= \Sigma\,\Sigma\,\Sigma\,\Sigma\,\widetilde{b}_{ik}^{jl}\,b_{gs}^{ht}\,Y_{ks}^{lt}(\tau) \\ &= -\Sigma\,\Sigma\,\Sigma\,\Sigma\,\widetilde{b}_{ik}^{jl}\,\widetilde{b}_{gs}^{ht}\,\frac{\sigma_{ks}^{lt}}{\lambda_k^l+\lambda_s^t}\,e^{\lambda_k^l\tau}, \quad \tau>0 \end{aligned} \qquad \text{…… (25)}$$

等が得られる。また (25) と (22) より，

$$\frac{dZ_{i\ g}^{(j-1)(h-1)}}{d\tau} = \sum_k\sum_l\sum_s\sum_t\widetilde{b}_{ik}^{jl}\,\widetilde{b}_{gs}^{ht}\,\lambda_k^l\,Y_{ks}^{lt}(\tau)$$

$$= \sum_h \sum_l \sum_s \sum_t \tilde{b}_{ik}^{jl} \tilde{b}_{gs}^{ht} \lambda_k^l \sum_a \sum_b \sum_c \sum_d b_{ka}^{lb} b_{sc}^{td} Z_a^{(b-1)}{}_c^{(d-1)}(\tau)$$

$$= \sum_k \sum_l \tilde{b}_{ik}^{jl} \lambda_k^l \sum_a \sum_b b_{ka}^{lb} Z_a^{(b-1)}{}_g^{(h-1)}$$

$$= \sum_k \sum_l \sum_s \sum_t b_{ks}^{lt} A_{sa}^{tb} \tilde{b}_{ik}^{jl} \sum_a \sum_b Z_a^{(b-1)}{}_g^{(h-1)}$$

$$= \sum_a \sum_b A_{ia}^{jb} Z_a^{(b-1)}{}_g^{(h-1)}. \qquad \ldots\ldots (26)$$

即ち相関函数 $Z_i^{(j-1)}{}_g^{(h-1)}$ は $z_i^{(j-1)}$ の従う方程式の，外力の項を零とおいた方程式を満足する。

次に C_{ij} の逆変換 $\tilde{C}_{ij}$ を z に施して，最初の変数 q_i にもどすと，同じようにして，

$$q_i^{(j-1)} = \sum_{k=1}^n \tilde{C}_{ik} z_k^{(j-1)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^m \tilde{C}_{ik} \tilde{b}_{ka}^{jb} \int_0^\infty \pi_a^b(t-t') e^{\lambda_a^b t'} dt$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^m \tilde{C}_{ik} \tilde{b}_{ka}^{jb} \int_{-\infty}^t \pi_a^b(t') e^{\lambda_a^b (t-t')} dt', \qquad \ldots\ldots (27)$$

$$\overline{q_i^{(j-1)}} = \sum_{k=1}^n \tilde{C}_{ik} \overline{z_k^{(j-1)}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^m \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^m \tilde{C}_{ik} \tilde{b}_{ka}^{jb} b_{as}^{bt} z_s^{(t-1)}(0) e^{\lambda_a^b t},$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^m \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^m \sum_{p=1}^n \tilde{C}_{ik} \tilde{b}_{ka}^{jb} b_{as}^{bt} C_{sp} q_p^{(t-1)}(0) e^{\lambda_a^b t}, \qquad \ldots\ldots (28)$$

$$Q_p^{(q-1)}{}_r^{(s-1)} = [q_p^{(q-1)}(t+\tau) q_r^{(s-1)}(t)]_t$$

$$= \left[\sum_{i=1}^n \tilde{C}_{pi} z_i^{(p-1)}(t+\tau) \sum_{j=1}^n \tilde{C}_{rj} z_j^{(s-1)}(t)\right]_t$$

$$= \sum_{i=1}^n \tilde{C}_{pi} \sum_{j=1}^n \tilde{C}_{rj} Z_i^{(q-1)}{}_j^{(s-1)}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{u=1}^n \sum_{t=1}^m \tilde{C}_{pi} \tilde{C}_{rj} \tilde{b}_{ik}^{ql} \tilde{b}_{ju}^{sk} Y_{ku}^{lt}(\tau)$$

$$= -\sum \sum \sum \sum \sum \sum \tilde{C}_{pi} \tilde{C}_{rj} \tilde{b}_{ik}^{ql} \tilde{b}_{ju}^{st} \frac{\sigma_{ku}^{lt}}{\lambda_k^l + \lambda_u^t} e^{\lambda_k^l \tau}, \quad \tau > 0$$

$$\ldots\ldots (29)$$

等が得られる。また (29) と (26) とから，

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_p^{(q-1)}{}_r^{(s-1)}}{d\tau} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m} \widetilde{C}_{pi}\widetilde{C}_{rj} A_{ia}^{qb} Z_a^{(b-1)}{}_j^{(s-1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{u=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m} \widetilde{C}_{pi}\widetilde{C}_{rj} C_{au} C_{jt} A_{ia}^{qb} Q_u^{(b-1)}{}_t^{(s-1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}\sum_{u=1}^{m} \widetilde{C}_{pi} C_{au} A_{ia}^{qb} Q_u^{(b-1)}{}_t^{(s-1)} \\
&= \sum_{a=1}^{n} C_{pa}\sum_{u=1}^{n} c_{au} Q_{ur}^{q(s-1)} \\
&= Q_p^{q}{}_r^{(s-1)}
\end{aligned}
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}
\begin{aligned} &q=1,\dots,\ m-1, \\ &b=1,\dots,\ m\ , \end{aligned}
\qquad \cdots (30)$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}\sum_{u=1}^{n} \widetilde{C}_{pi} C_{au} \frac{d_{ia}^{(b-1)}}{A_i} Q_u^{(b-1)}{}_r^{(s-1)} \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\sum_{u=1}^{n} \widetilde{C}_{pi} C_{il}\widetilde{C}_{ta} C_{au} \frac{a_{lt}^{(b-1)}}{A_i} Q_u^{(b-1)}{}_r^{(s-1)} \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{u=1}^{n} \widetilde{C}_{pi} C_{il} \frac{a_{lu}^{(b-1)}}{A_i} Q_u^{(b-1)}{}_r^{(s-1)}. \qquad \dots\dots (31)
\end{aligned}$$

（5）から，

$$\sum_{p=1}^{n} a_{vp}^{(m)}\widetilde{C}_{pi} = \widetilde{C}_{vi} A_i$$

という関係が出るから，

$$\begin{aligned}
\sum_p a_{vp}^{m}\frac{dQ_p^{(m-1)}{}_r^{(s-1)}}{d\tau} &= -\sum_p\sum_i\sum_b\sum_l\sum_u a_{vp}^{m}\widetilde{C}_{pi} C_{il}\frac{a_{lu}^{(b-1)}}{A_i} Q_u^{(b-1)}{}_r^{(s-1)} \\
&= -\sum_b\sum_u a_{vu}{}^{(b-1)} Q_u^{(b-1)}{}_r^{(s-1)}, \qquad q=m, \qquad \dots\dots (32)
\end{aligned}$$

が得られる。(30) 及び (32) は，相関函数 $Q_p^{(q-1)}{}_r^{(s-1)}$ が，（3）即ちもとの変数 $q_p^{(q-1)}$ の従う方程式の，外力の項を零とおいた方程式に従うことを意味している。予報を行うのには観測された相関函数 $Q_p^{(q-1)}{}_r^{(s-1)}$ を用いて，これらの方程式から係数 $a_{vu}{}^{(b-1)}$ を求め，(28) 式を適用すればよい。この結果が小河原のそれ[6] と本質的に同じものであることは，文献（3）にのべたのと同じような議論によつて，容易に認められるであろう。

しかしながら，次数 m 或は n が大きい一般の場合に，このような計算を實際に行うことは極めて困難である。この事情は Kolmogoroff-Wiener ないし Wold-小河原 の理論でも同様であるが，ここで今堀が単一時系列の場合に對して定式化したのと同様な近似方式が，この場合にも有效に定式化され得るかどうかを考え，その意味を檢討してみよう。

III. 今堀の近似方式の意味

上に導いた一般式はあまりに複雑であるから，ここでは $m=2$, $n=2$ の簡単な場合：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2q_1}{dt^2}-a_{11}q_1-a_{12}q_2=p_1(t),\\&\frac{d^2q_2}{dt^2}-a_{21}q_1-a_{22}q_2=p_2(t),\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(33)$$

に對する式を導いて，それによつて考えよう。(33) を前と同様にしてかき直すと，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_1'\\q_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\a_{11}&a_{12}&0&0\\a_{21}&a_{22}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_1'\\q_2'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\p_1\\p_2\end{pmatrix},\quad\cdots\cdots(34)$$

$$\overline{p_i(t')\,p_j(t'')}=B_{ij}\,\delta(t'-t''),$$

となる。この行列を對角線形にするような1次変換

$$\left.\begin{aligned}&z_1=c_{11}q_1+c_{12}q_2+c_{13}q_1'+c_{14}q_2',\\&z_2=c_{21}q_1+c_{22}q_2+c_{23}q_1'+c_{24}q_2',\\&z_3=c_{31}q_1+c_{32}q_2+c_{33}q_1'+c_{34}q_2',\\&z_4=c_{41}q_1+c_{42}q_2+c_{43}q_1'+c_{44}q_2',\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(35)$$

を行うと，(34) は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dz_i}{dt}=\lambda_i z_i+\pi_i(t),\\&\pi_i(t)=c_{i3}\,p_1+c_{i4}\,p_2,\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(36)$$

$$\begin{aligned}\overline{\pi_i(t')\,\pi_j(t'')}=&C_{i3}\,C_{j3}\,B_{11}\,\delta(t'-t'')+C_{i3}C_{j4}\,B_{12}\,\delta(t'-t'')\\&+C_{i4}\,C_{j3}\,B_{21}\,\delta(t'-t'')+C_{i4}C_{j4}\,B_{22}\,\delta(t'-t''),\end{aligned}\quad\cdots\cdots(37)$$

となる。(36) の解は

$$z_i(t)=\int_0^\infty\pi_i(t-t')e^{\lambda_i t'}dt'=\int_{-\infty}^{t}\pi_i(t')e^{(\lambda_i t-t')}dt',\quad\cdots\cdots(38)$$

$$\overline{z_i(t)}=z_i(0)e^{\lambda_i t}$$

$$\left.\begin{aligned}Z_{ij}(\tau)=\overline{z_i(t+\tau)\,z_j(t)}&=-\frac{\sigma_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}\mathrm{e}^{-\lambda_j\tau},\quad\tau<0,\\&=-\frac{\sigma_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}e^{\lambda_j\tau},\quad\tau>0,\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(40)$$

であるが，これを (C_{ij}) の逆変換 $(\widetilde{C}_{ij})$ によつてもとの座標 q_i にもどすと，

$$\left.\begin{aligned}q_i(t)=&\sum_j\widetilde{C}_{ij}\,z_j(t)=\sum_j\widetilde{C}_{ij}\int_0^\infty\pi_i(t-t')\,e^{\lambda_j t}dt'\\&=\sum_j\tilde{c}_{ij}\int_{-\infty}^{t}\pi_j(t')e^{\lambda_j(t-t')}dt',\\&\qquad i=1,2,\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(41)$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{q_i(t)} &= \sum_j \widetilde{C}_{ij}\overline{z_j(t)} = \sum_{jk}\widetilde{C}_{ij}\,C_{jk}\,q_k(0)\,e^{\lambda_j t} \\ \mathrm{i} &= 1,\ 2,\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (42)$$

及び

$$Q_{ij}(\tau) = \overline{q_i(t+\tau)\,q_j(t)} = \Sigma\,\widetilde{C}_{ik}\,\widetilde{C}_{jl}\ \overline{z_k(t+\tau)\,z_l(t)}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \sum_{kl}\frac{\widetilde{C}_{ik}\,\widetilde{C}_{jl}\sigma_{kl}}{\lambda_k+\lambda_l}\,e^{-\lambda_l\tau}, \quad \tau<0, \\ &= \sum_{kl}\frac{\widetilde{C}_{ik}\,\widetilde{C}_{jl}\,\sigma_{kl}}{\lambda_k+\lambda_l}\,e^{\lambda_k\tau}, \quad \tau>0,\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (43)$$

となる。

さて，今堀の近似方式の骨子は，観測されたエネルギースペクトルを，観察によつて近似的に互に分離しているとみなされ得るいくつかの極大に分解し，その１つ１つが１つの固有値をもつ互に独立な単純 Markoff 過程（即ち最も簡単な型の Brown運動）に對応するものと考え，與えられた時系列がこれからの単なる重ね合せであるとみることにあつた。そうすると，適当な移動平均の操作によつて，この１つ１つの過程を，もとの時系列から分離してとり出すことができ，從つてこの成分過程の現在の値（初期値）が求められる。１つの単純過程においては，その初期値が與えられれば，Brown 運動論の方からその後の過程の平均値と分散とが容易に計算されるから，これらをその過程に對応する予報値及び誤差と考えることができ，はじめの時系列の予報値及び誤差はこれらの和として求められるのである。（42）式は，$\overline{q_i(t)}$ が λ_j という固有値をもつ４つの Markoff 過程のそれぞれの平均値

$$\overline{q_{ij}(t)} = \sum_k \widetilde{C}_{ij}\,C_{jk}\,q_k(0)\,e^{\lambda_j t} \quad \cdots\cdots (43)$$

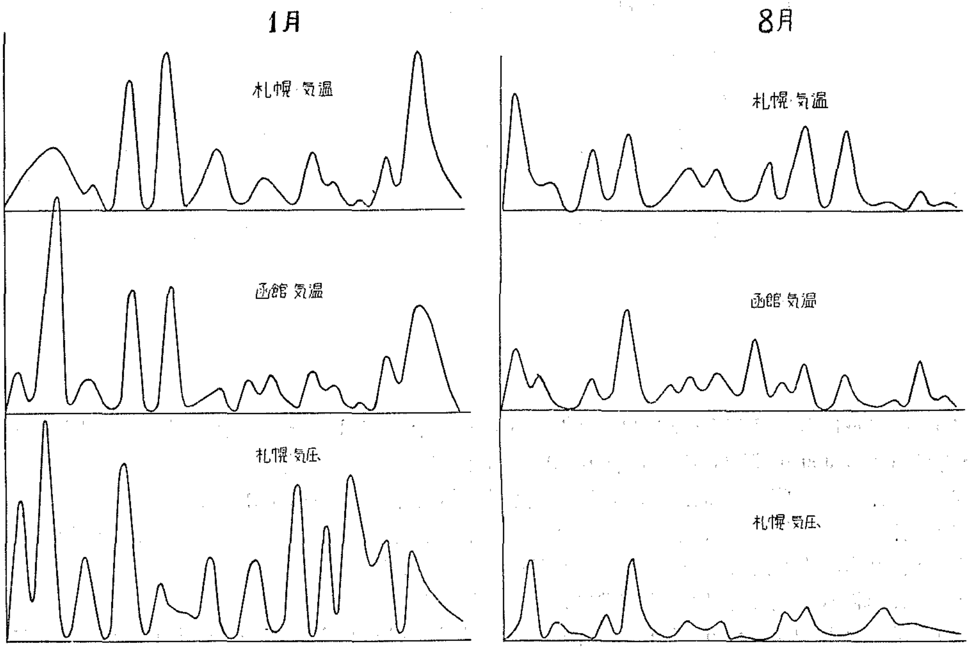
の和で與えられることを示しているが，今堀の近似方式ではこれらの１つ１つの成分過程に對する初期値

$$q_{ij}(0) = \Sigma\,\widetilde{C}_{ij}\,C_{jk}\,q_k(0) \quad \cdots\cdots (44)$$

が観測された時系列から適当な操作によつて求まるのである。

今堀の近似方式の基礎となる仮定がなりたたない場合には，このおのおの成分の初期値は，最初の各時系列の初期値 $q_i(0)$ と，係数 C_{ij} 及び $\widetilde{C}_{ij}$ とがわからないと求められない。このためには前節にのべたように，すべての時系列 $q_i(t)$ の自已相関函数及び相互相関函数が必要となる。これに反して今堀の近似方式を用いる場合には予報を行おうとする目的の時系列のエネルギースペクトル從つて自已相関函数だけを求めれば，成分過程の初期値を求めることができるのである。このことは，今堀の近似においては，多重予報は無意味であるということ，いいかえれば単一予報において既に得られるべきすべての知識が得られているのであつて，多重予報によつて精度を大きくすることはできないのである。

(26) ないし (42) からわかるように，相関関係をもつ時系列はいずれも $m \times n$ 個の同じ λ_i の値をもつた成分過程からなつている（もちろんある時系列でそれらのいくつかが欠けている場合もあり得る。）従つて上の仮定がなりたつものとすれば，これらのエネルギースペクトルはすべて同じ位置に同じ半幅をもつ極大をもつていなければならない。ただその高さが時系列によつて異るだけである。このことは第1図に示させているように，實際にもたしかめられる。即ち互



第　1　圖

に関連をもつていると考えられる2つの時系列，たとえば札幌における気温と気圧，または札幌の気温と函館の気温のスペクトルをとつてみると，それらは多かれ少かれ互に非常によく似ており，これらを今堀の方式に従つて互に独立な成分に分けると，同じ λ_i をもつた極大の列になつてしまうのである。1つ1つの極大は互に独立であるから，全体のスペクトルから得られる知識は，1つ1つの極大から得られる知識の總和である。ところが1つ1つの山は，2つの時系列において，その高さだけしかちがわないのであるから，その1つからその時系列に関する知識を得てしまえば，もう1方のスペクトルはその時系列に對してそれ以上何等の知識をもつけ加えることができないのである。これを数式的にいえば次のようになる：いま2つの時系列 $q_1(t)$，$q_2(t)$ の，λ_1 という固有値をもつ成分 $q_{11}(t)$，$q_{21}(t)$ を考えてみると，(44) からわかるように，

$$\left.\begin{aligned} \overline{q_{11}(t)} &= \widetilde{C}_{11} \sum_k C_{1k}\, q_k(0)\, e^{\lambda_1 t} \quad , \\ \overline{p_{21}(t)} &= \widetilde{C}_{21} \sum_k C_{1k}\, q_k(0)\, e^{\lambda_1 t} \quad , \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (45)$$

であつて，これらは $\widetilde{C_{11}}/\widetilde{C_{21}}$ という常数だけしかちがわない。従つて $\overline{q_{11}(t)}$ は $q_1(t)$ の解析だけによつて求まり，$q_{21}(t)$ に関する知識がそれに對して何もつけ加え得ないのは当然である。

もともと1階の微分方程式系を用いる今堀の最初の定式化は，（2）の特別な場合であつて，互に相関をもつた n 個の時系列の系，いいかえれば連成振動系の中の1つが，我々の問題とする時系列として観測されるのだと考えているのである。* その場合にも，厳密な定式化によればすべての相関函数 $Q_{ij}(\tau)$ を用いなければならないところを，今堀の近似によつて，着目する時系列の自己相関函数或はエネルギースペクトルのみで間に合わせたのであつて，上の結論はこれをやや一般化したにすぎないのである。

以上で，少くとも今堀の近似方式を用いるかぎりは，多重予報によつて予報の精度は大きくならないことが明かになつた。従つて，多重予報の場合には，是非とも厳密な方法によらなければならないが，そのためには電子計算機が必須のものとなつてくるのである。

文　　献

1） Imahori K. and Kobayashi T. 1951 On the Long Period Forecasting by Means of Harmonic Analysis (I). Journ. Met. Soc. Japan. 29, 365. ; 同上邦訳，低温科学，9，

2） 今堀克巳　1951　調和解析による長期予報．I,II．予報研究ノート，2,5号及び 3，2号．

3） 堀　淳一　1952　今堀の長期予報，腦波統計，及び亂流統計理論の基礎的意味，特に Kolmogoroff-Wiener 及び Wold-小河原 の理論との関連に就いて．低温科学，9，45．

4） 堀　淳一，小林禎作 1952 非定常時系列の予報について．低温科学，9，83．

5） Wiener 1949 Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. New York.

6） 小河原正巳 1949 ベクトル時系列の解析法．統計数理研究，3，1～2号，46－50．

Résumé

Imahori's theory of Prediction of the stationary time series was extended to the case of multiple predction, which came out to be essentially the same as Wold-Ogawara's prediction theory of vector time series. Imahori's approximate procedure can also be generalized, but it was concluded that when the approximate method is employed, no

---

＊ n 個の1階微分方程式による定式化と，1個の n 階微分方程式による定式化とが同等であるということは，連成振動系のある構成要素の振動が，少くとも近似的には適当な1つの振動系のそれとして記述できるということにほかならない。同様に m 階の微分方程式 n の個の系は，$m\times n$ 階の1個の微分方程式と実際上同等であるといつてよいであろう。この観点からみると。単一予報と多重予報とのちがいは，単に見方の相違であるように思われる。従つて精密な多重予報を行つた場合，単一予報の場合より大きな精度が得られるというのはどういうことかということも，検討する余地がありそうである。しかしこれに就いてはここでは議論しない。

increase in efficiency can be obtained by the use of multiple time series. The origin of this rather surprising result was discussed in some detail.