



Title	雪洞の天井を支える梁にかかる力
Author(s)	大浦, 浩文
Citation	低温科学. 物理篇, 16, 55-71
Issue Date	1957-12-13
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/17929">http://hdl.handle.net/2115/17929</a>
Type	bulletin (article)
File Information	16_p55-71.pdf



[Instructions for use](#)

## 雪洞の天井を支える梁にかかる力\*

大 浦 浩 文

(低温科学研究所 応用物理学部門)

(昭和32年7月受理)

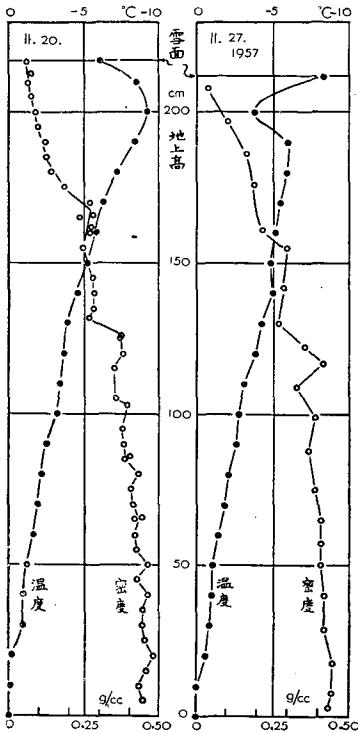
### I. ま え が き

この実験は北海道雨竜郡にある北海道大学演習林母子里看守所の前庭に於いて、昭和32年2月20日から28日までに亘つて行なわれたものである。深さ約2 m 17 cmの積雪に地面にまで達する広い縦穴を掘つて、穴の壁の下部に水平方向の雪洞を作つた。雪洞の大きさは間口約1 m、高さ約1 m、奥行2 m 70 cmで床は地面である。したがつて雪洞の天井の厚さは1 m 17 cmであるが、この天井を奥行に平行な1本の梁によつて支えた。はじめ、この梁を天井に当てて、ジャッキで押し上げたところ、梁にかかる力は緩和して減少していつたが、途中から逆に増加しはじめ、ある一定値に漸近的に落ち着いた。そこで再びジャッキで梁を押し上げて梁にかかる力の緩和減少してゆくところを観測した。こんどの力は単調に減少しほぼもとの一定値にもどつた。次に梁にかかる力が零になるまで梁を下げておいて、時間が経つにつれて梁にだんだん力がかかつてゆくのを観測した。こうして梁にかかる力が時間とともに増加、或いは減少してゆく様子をしらべ、その結果から各実験毎の力の緩和スペクトルを求めた。スペクトル分布は実験毎に異なつていて、それぞれ特徴を持つていたが、これ等を統一して同一の模型によつて説明することを試みた。

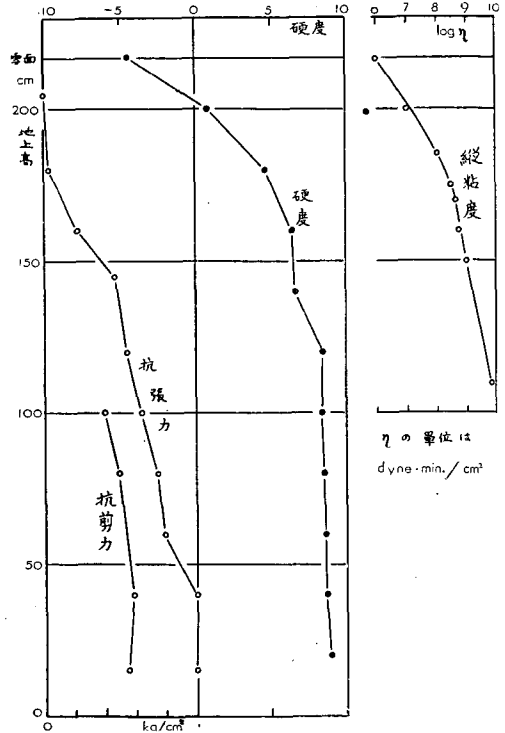
### II. 積雪の状態

観測をはじめた頃及び終了する頃の積雪の状態を表わすものとして2月20日及び27日に縦穴の壁の高さに沿うて測定した雪の温度、密度を第1図に示してある。又20日に測定した抗張力、抗剪力、硬度(抗張力、抗剪力、硬度は黒田の方法によつて求めた)を第2図に示してある。はじめ積雪深は2 m 17 cm、積雪水量670 mmであつたが、この上に22日夕方17時から27日までに深さ30 cm、水量37.6 mmの雪が積つた。その中、下層の深さ20.7 cmの部分の雪は水量29 mmで、25日10時30分までに降つたもので、上層の深さ9.3 cm、水量8.6 mmの積雪はその後のものである。このように新しく積つた新層を上層と下層とに分割して観測できたのは、22日17時頃と、25日10時30分とに霧吹きで霧状にしたインクを雪面上に散布して層の途中に目印をつけておいたからである。観測開始22日以後の新しい積雪としては、

\* 北海道大学低温科学研究所業績 第371号



第1図 地面から積雪表面までの  
温度及び密度の分布



第2図 いろいろな高さにおける積雪の硬度、抗張力  
抗剪力 (以上は黒田の方法による) 及び縦粘度

これだけあつた。しかしこの 30 cm にも及ぶ新雪層が加わつたにもかかわらず、観測終了前日の 27 日の積雪深は 22 日のものとほとんど同じで、5 cm の増加がみとめられたにすぎなかつた。積雪はその上に積つた雪の目方のために圧縮され、体積を減じ、沈降するからである。一定質量の積雪について体積の減少の割合は、密度の増加の割合に等しい。したがつて積雪を構成する各層について 20 日から 27 日までの間にどれだけ密度が増加したかを測定することによつて、圧縮の場合の粘性係数、すなわち縦粘度  $\eta$  を求めることができる。第 2 図の右の図はこうして得られた縦粘度と深さとの関係を示している。 $\eta$  は積雪表面で最も小さく  $10^6$  dyne min/cm<sup>2</sup> の程度で、深さ 1 m では  $10^9$  dyne min/cm<sup>2</sup> 程度に増大する。縦穴の壁による積雪断面の観察によれば、地上 1 m 16 cm から 1 m 26 cm 位までの間に薄い氷板が 5~6 枚あつた。又 1 m 32 cm ~ 34 cm のところと 1 m 38 cm ~ 39 cm のところにぎらめ雪の層がみられた。

### III. 観測装置

第 3 図の写真が観測装置の全ぼうである。雪洞の大きさは、入口の高さ約 1 m、間口約 1 m、奥行 2 m 70 cm で、雪洞の奥行に平行な梁によつて雪洞の天井の中央を支えるようになっている。梁は幅 10 cm、厚さ 5 cm の櫓材で、長さは約 1 m 60 cm であるが 1 本の続いたもの

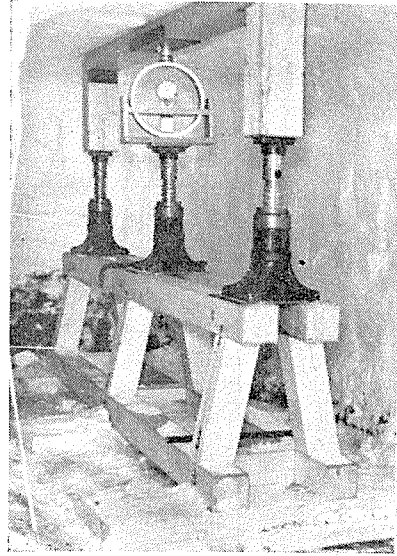
ではない。梁は中央で切断されていて、切断部分はチャンネル型の鉄板にはまっている。そして梁の両端は3寸5分の角柱で支えてあるので梁はその両端を一定の高さに保たれつつその中央は上下に自由に動けるわけである。上下運動に対して梁の両端の角柱は支点の役をするので角柱の上端面には鉄のアンクルを取りつけて丈夫にした。又梁の両端部の下面、このアンクルに当たるところにも鉄板を取り付けた。

梁の中央のチャンネル型の鉄板は環状力計の頭部で支えられている。したがって梁の全長に亘つて一様な荷重が掛つた場合、環状力計によつてその半分の値が測られることになる。梁の両端の支点間の距離は1 m 50 cm であるから長さ75 cm の梁に掛る荷重が測定されるわけである。

梁の両端を支えている2つの角柱、及び環状力計はそれぞれ、角材で組立てた木の台の上に乗せた3つのジャッキの上に立ててある。ジャッキの下には面積の広い厚さ約3 mm の鉄板を敷いて、ジャッキに力がかかつたときにジャッキの底が木の中にめり込むのを防いだ。またこの木の台も地面に敷きつめた二重の敷き板の上に置いて地面にめり込むのを防いだ。すなわち、地面を平らにしたうえ、厚さ1寸5分、幅8寸、長さ6尺4寸の板3枚をまず雪洞の奥行に平行に並べ、その中央部と両端とにおなじ厚さの板を直角に横たえ、その上に木の台を置いたのである。

雪洞内の温度が外気の急激な変動のえいきよを受けないようにするため、入口には木の蓋を二重に施した。2枚の蓋の間隙は25 cm である。

環状力計は2トンまで測り得るものであつて、1/100 mm の縮みが約8.3 kg に相当する。梁を押し上げるのに使つたジャッキは、角ねじによつて持ち上げる建築用のジャッキで、長時間力が掛つても縮む事はない。ねじのピッチは12 mm であつた。

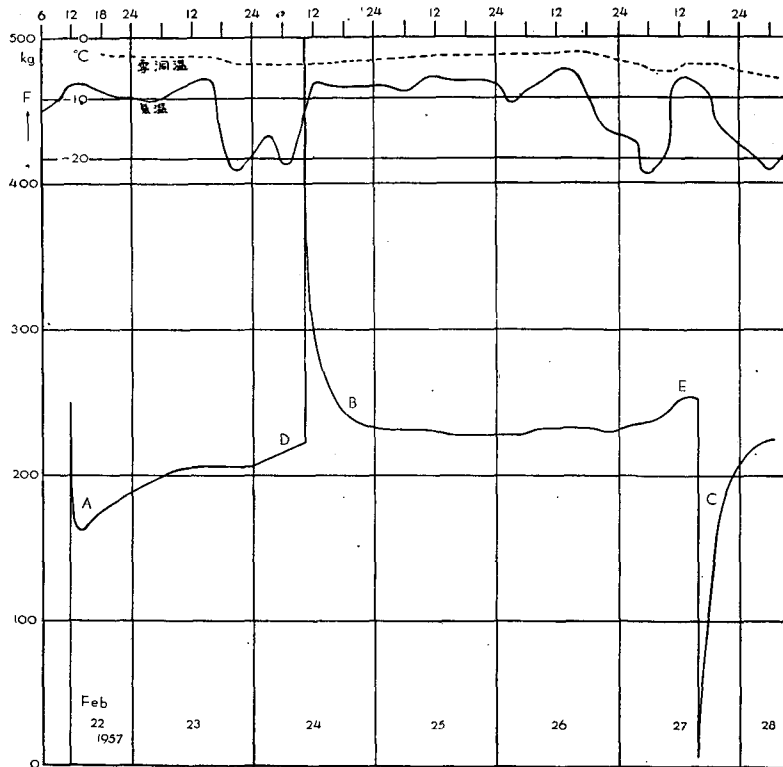


第3図 観測装置

#### IV. 観測結果

以上の装置により、厚さ、横幅ともに約1 m の雪洞の天井が梁を押さげようとする力が観測されたわけであるが、観測経過の概要は第4図によつて知ることができる。第4図には、力計にかかる力  $F$  の時間的変化の他に、外気温度や、雪洞の壁の地面から60 cm のところの温度も図示してある。

まえおきにも記したように、2月22日に先ず雪洞の天井の中央に押しつけた梁をジャッキで押し上げて、力計が250 kg に相当する目盛を示すまで締めつけた。力はジャッキを締め終つた瞬間から急激に減少しはじめ、5分後には196 kg まで減つた。力の減り方は時間が経つ



第 4 図 2 月 22 日から 28 日まで観測された梁にかかる力  $F$  の時間的变化  
及び気温、雪洞温 (高さ .60 cm の壁の温度) の変化

にしたがつてゆるやかにになり、2 時間後には 162 kg になつてこのまま落着くようにみえた。ところが、やがて力は増加しはじめ、約 207 kg の値まで漸近的に増加して、実験をはじめてから約 24 時間後の 23 日正午にはほぼ 207 kg にまで達した。この実験を後の記述に便利なように実験 A と呼び、このときの力の変化を示す曲線を曲線 A と名付けることにする。

実験 A にひきつづいて、実験 B を 24 日に行なつた。ジャッキを締めて、力計の目盛が 500 kg を示すまで雪の天井を押しあげたところ、実験 A のばあいとちがつて力はただ単調に減少を続け、227 kg に漸近的に近づいた。その後は気温の変動のえいきょうを調べるために 2 日間ほどそのままに放置しておいた。26 日までは気温の変動も小さく、力も一定値を示していたが、26 日の晩から 27 日の朝にかけて気温が急激に下ると同時に力は急に増加しはじめた (曲線 E)。このことからみても、実験 A の後、実験 B をはじめる直前にみられた力の増加 (曲線 D) も、実験 A の結果としてあらわれたのではなく、その時の気温の低下によるものと考えられる。

27 日にジャッキを緩めて力計の示す力が零になるまで梁を下げた。天井は次第に下つて圧力を増し、力計の示す力は実験 B のあとに続いた一定値 227 kg に漸近的に増加するような傾

向をみせた。但し、その翌日の28日で観測の予定日数が尽きて、実験をやめねばならなかつたので、力はその後果して277 kgに達したかどうかを見とどけていない。この最後の実験を実験Cと名づけ、その力の増加曲線を曲線Cと呼ぶことにする。

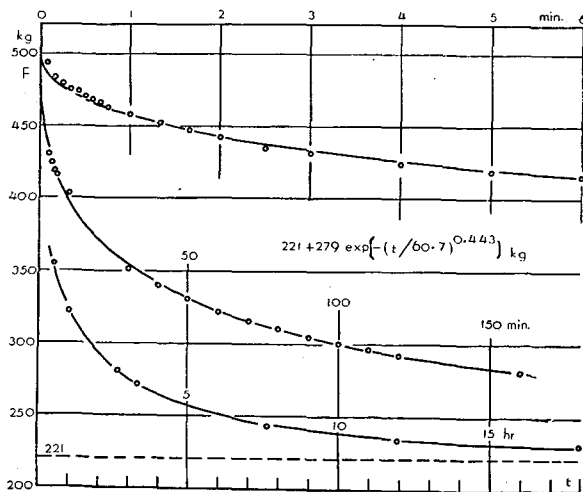
(1) 梁にかかる力の大きさ

曲線A、曲線Bの漸近線は207 kg 或いは227 kgであるが、この大きさは、どのくらいの範囲の雪の重量に相当するであろうか。雪洞の天井から積雪の表面までの積雪水量は255 mm すなわち天井の面積1 m<sup>2</sup> 当り225 kgである。若し雪洞の雪の壁がしつかりした固体であれば天井の上に積つた雪の重さの半分が梁にかかる筈である。雪洞の幅は0.97 m、梁の長さは1.5 mであるから梁の受もつ天井の面積は0.95×1.5=1.45 m<sup>2</sup> で、これに1 m<sup>2</sup>あたりの雪の重さ255 kgをかけたものの半分186 kgが梁にかかる雪の重さとなる。そしてその更に半分の93 kgが力計に現われる筈である。しかるに力計には207 kgとゆうその2倍以上の力が現われた。これは積雪全体の沈降現象のため雪洞の壁が沈降を起し、雪洞の天井のまうえにある雪の重さのみでなく、そのまわりに広がっている雪の重さまでも梁にかかつてきたためと考えられる。このまわりの雪の重さが梁にかかる状態は、この実験の期間中、大きな変化がなかつたと思われる。それは、23日に測定された207 kgとゆう値は、天井のまうえに積つた雪の重さ186 kgの1.1倍であり、その後25日

までの降雪約25 mmのために20 kg (227 kg-207 kg) 増加したが、この値は天井のまうえの降雪量の重さ18 kgの1.1倍で、その割合が前と等しいことから推論できる。

(2) 曲線Bの実験式

曲線A、B、Cのうち曲線Bがいちばん擾乱をうけていないようである。それでまず曲線Bの実験式を求めよう。第4図のままでは、時間の単位が粗すぎて詳細がよくわからないので、第5図に、時間の単位を小さないろいろな値をとつて曲線Bを示した。この図の点は実測値で、実線は次の式を表わす曲線である。



第5図

時間の単位をいろいろに変えて表現した曲線B。  
 黒丸は測定値、実線は実験式  $221 + 279 \exp \{ -(t/60.7)^{0.443} \}$  をあらわす。

$$F = [221 + 279 \exp \{ -(t/60.7)^{0.443} \}] \text{ kg} \quad (1)$$

但し、この式のtは分単位で表わされた時間でFはkg単位で表わされた力である。実測値と曲線とはかなりよく一致している。

(3) 曲線Cの実験式

(1)式に於いて、時間的变化をあらわしているのは右辺第2項の複雑な指数函数である。この函数は外力を陽に含んでいない次元のない量であるから、この実験における力学的構造に固有のものであると考えられる。実験Cは実験Bと較べると均合の値約230 kgを中心にして丁度同じ程度の大きさの力を逆向きに作用させたことに相当する。したがつて、力の時間的变化をあらわす部分は(1)式と同じ型の函数によつて表現されようである。しかるに、曲線Cの実験式としては(1)式のような複雑な式を必要とせず、唯一つの緩和時間176分を持つ簡単な緩和函数

$$F = 227 - 220 \exp(-t/176) \quad (2)$$

によつて表現される。

### V. 実験式の解析

前節の(1)式で表わされる現象も(2)式で表わされる現象も共に力の緩和現象である。しかるに(2)式は簡単な緩和函数である。このことから(1)式の複雑な指数函数は、実際はいろいろな緩和時間を持つた緩和函数の和

$$F = \sum_i a_i \exp(-t/\tau_i) \quad (3)$$

によつて表現されるべきものではないかと考えられる。ここで、多くの緩和時間 $\tau_i$ は観測の対象とした雪に個有のものであるが、係数 $a_i$ の方は力の掛け方など、外部から雪に加えられる作用によつて定まるものである。たとえば過去に受けた力の歴史によつて、ある係数 $a_i$ は正であるのに他の係数 $a_k$ は負となつて、曲線Aのような曲線を表わすこともあるであろうし又特定の係数 $a_j$ だけが有限な値をとり、他の係数は非常に小さいか零となつて、曲線Cのような単純な曲線をあらわすこともあるであろう。

そこで曲線A, B, Cは(3)式の形で表現できるものと仮定して、曲線毎に係数 $a_i$ を求めてみた。正確な値を求めることは困難であるが、次のような方法で近似的な値なら求めることができる。

(3)式を $\log t$ ( $t$ の常用対数)で微分すると

$$\frac{dF}{d(\log t)} = \sum_i 2.3 a_i \exp(-t/\tau_i) \times (-t/\tau_i) \quad (4)$$

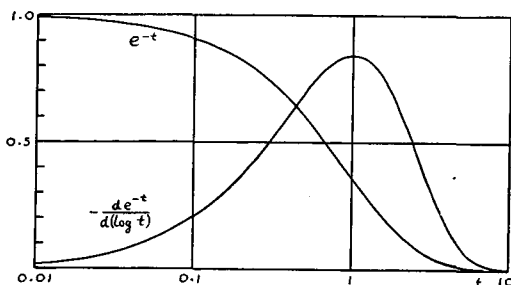
となる。この式の各項の函数 $f(t/\tau_i)$ は

$$\begin{aligned} f(t/\tau_i) &= 2.3 \exp(-t/\tau_i) \times (-t/\tau_i) \\ &= \varphi(\log t - \log \tau_i) \end{aligned} \quad (5)$$

の形にかかれるが、 $|f|$ は $t=\tau_i$ で極大値を示し、 $t$ の値が $\tau_i$ からある程度離れるとほとんど零になる。この関係を例示するために $F=\exp(-t)$ として $-dF/d(\log t)=-f(t/1)=-\varphi(\log t - \log 1)=2.3 t \exp(-t)$ と $\log t$ との関係を第6図に示した。このばあいの緩和時間 $\tau$ は1であるから、 $-f(t/1)$ の最大値は $t=1$ でおこり、その値は0.847である。そして $t$ が1からへだたれば、その値は次第に減少して零に近づく。そして、任意の緩和時間 $\tau_i$ に対する $-f(t/\tau_i)$

は、 $f(t/\tau_i) = \varphi(\log t - \log \tau_i)$  の関係からわかるように、横軸に  $\log t$  をとつて表現すれば、 $-f(t/\tau_i)$  のグラフをそのまま横軸に沿うて  $\log \tau_i$  だけずらせて得られる。

以上のことから次のことが云われる。実験によつて得られた  $F$  の値から  $F' = dF/d(\log t)$  を求め、それと  $\log t$  との関係を表わす曲線を書いた場合、もし  $t = \tau_i$  の



第 6 図

ところに山 ( $F' < 0$  では  $|F'|$  の山) がでたら、 $\tau_i$  は雪に固有な緩和時間のひとつであり、それに対応する係数  $a_i$  はある有限の値を持つている。そしてその  $a_i$  の値は、その山の高さ  $b_i$  ( $F' < 0$  では  $b_i < 0$ ) の  $-1/0.847$  倍によつて与えられる。こうして  $F'$  の曲線から得られた  $b_i$ 、 $\tau_i$  をつかつて  $F$  は

$$F = a_i \exp(-t/\tau_i) \tag{6}$$

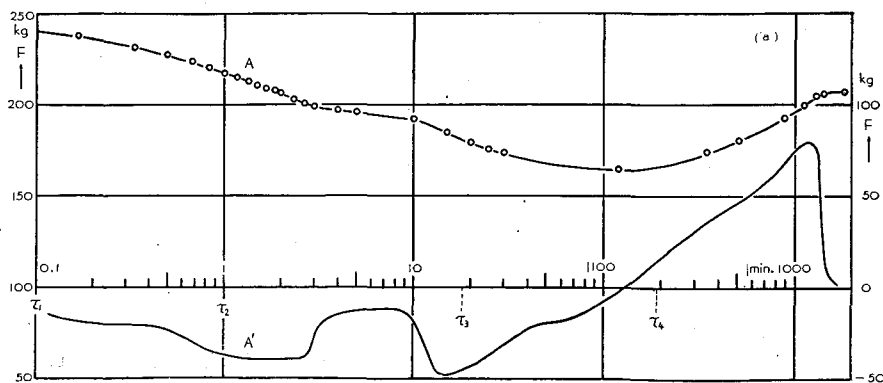
として表現できる。若し、 $F'$  が幾つかの山の和  $\sum b_i f(t/\tau_i)$  で表現されるときには各々の山について極大値  $b_i$  と極大値を与える  $t$  の値  $\tau_i$  とがわかるから  $F$  は

$$F = \sum - (b_i/0.847) \exp(-t/\tau_i) \tag{7}$$

として表現される。

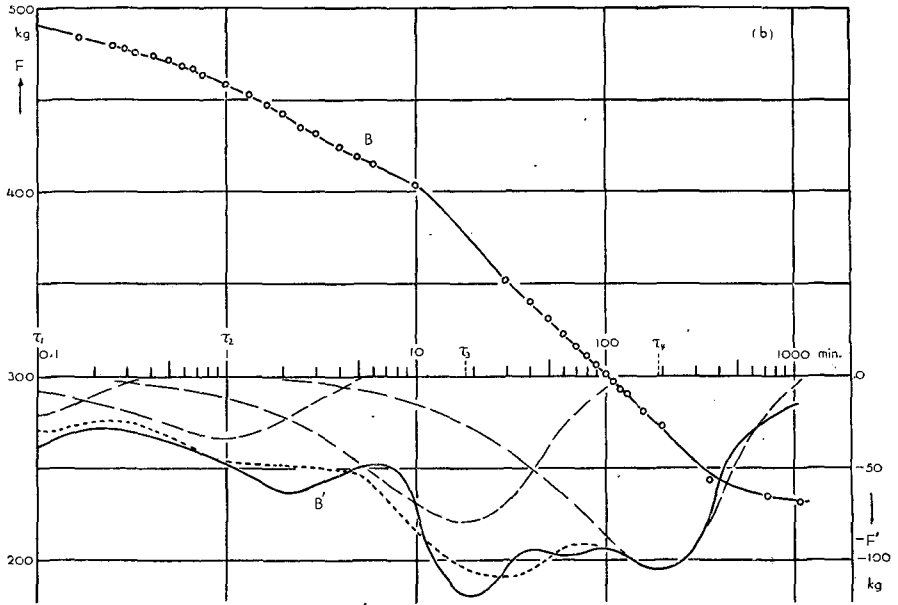
第 7 図 (a), (b), (c) はそれぞれ実験、A, B, C について、 $F$  と  $F' = dF/d(\log t)$  とを  $\log t$  に対して示したグラフである。実線 A, B, C が  $F$ 、実線 A', B', C' が  $F'$  を表わす。

まずいちばん簡単な曲線 C' の場合を考察しよう。第 7 図の  $F'$ 、すなわち  $dF/d(\log t)$  の曲線の形が、第 6 図の  $-de^{-t}/d(\log t)$  の曲線に非常に似ていることが目につくであろう。第 6 図の曲線では  $t=1$  で極大がおこつているが、この極大のおこるところを 190 min の点にあわせ、山の頂の高さがだいたい一致するように縦方向に伸ばして第 6 図の曲線を第 7 図 (c) になつて書いたのが点線の曲線である。

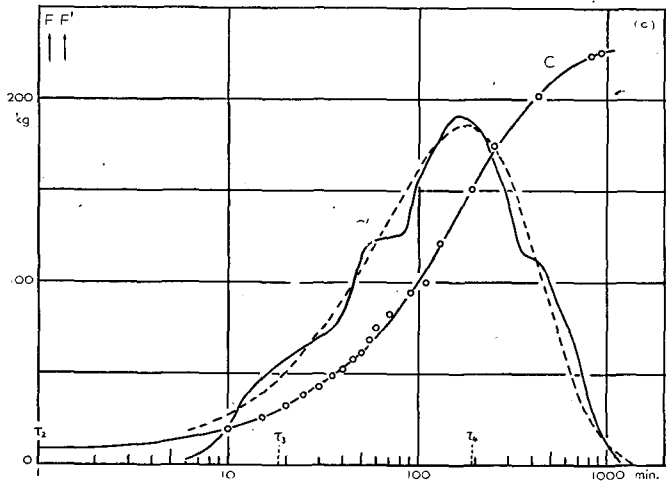


第 7 図 (a) 実験 A, B, C における力  $F$  及び  $F' = dF/d(\log t)$  と  $\log t$  との関係





第 7 図 (b)



第 7 図 (c)

実際の曲線  $C'$  は多少波をうつつているが、全体として点線の曲線とよく一致している。したがって、実験  $C$  に於いては雪の力  $F$  は単一な緩和時間  $190 \text{ min}$  をもつて緩和したと考えてよいであろう。このことは、まえに第  $IV$  節 (3) で実験  $C$  に関して実験式 (2) が導かれたことと全く一致している。ただ実験式では緩和時間が  $176 \text{ min}$  となつている。しかし、 $176$  と  $190$  とは非常に近い値である。それで、実験  $C$  での緩和時間は  $190 \text{ min}$  であると考え、それを  $\tau_4$  で

あらかずことにする。

第7図(b)の実験Bのばあいには $F'$ は負であるが、これは力の作用する方向が実験Cのばあいと逆であったことによるにすぎない。それで、以下、この図を上から下の方向に見ることとし、たとえば曲線が下の方に凸になつているとすれば、それを谷と呼ばないで山と呼ぶことにする。

$F'$ を表わす曲線 $B'$ は、うねつていくつかの山をもっている。そして、最も右の山は $\tau_4=190$  minの所にある。これは、実験Cで緩和時間として見出されたものである。したがつて、この $\tau_4$ が観測した雪のもっている緩和時間のひとつであることに疑いの余地はないであろう。つぎに $t=18$  minのところにならかなり急峻な山がある。したがつて、18 minがひとつの緩和時間である確率が大きい。ところで、第7図(a)の実験Aの曲線を見ると、曲線 $A'$ も $t=18$  min附近に急な山を現わしている。したがつて18 minも緩和時間のひとつであるとうり公算が大きい。これを $\tau_3$ と名づけることにしよう。

さらに第7図(b)の $B'$ は $t=2$  minのところになだらかな山をもっている。したがつてこれもまた緩和時間のひとつであるらしい。しかし、 $\tau_3$ に頂上をもつ高い山はこのあたりまで裾をひいているので、 $t=2$  minの山の頂きは、その山が独立にあるばあいにくらべて右の方にずれているにちがいない。それで、この山のもとなつた緩和機構の緩和時間は2 minより短いはずである。どれほど短いかは決定しかねるが、1 minと採ると簡単であるからそれを1 minとし、 $\tau_2$ と名づけよう。

さらに曲線 $B'$ は図の左端で左の方にむかつて上昇している。したがつて、このあたりに緩和時間がありそうである。それを $\tau_1$ とし、その値を0.1 minときめる。

以上のようにして、全く確実とゆうわけではないが、観測した雪について4個の緩和時間を見出した。このほかにも緩和時間があるかも知れないが、そのことは全く不明である。しかし、とにかく、ここで行なつた3回の観測の結果はこれ等の4個の緩和時間で説明されるはずのものである。それで、曲線A, B, C, 曲線 $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ は、上に決定した4個の緩和時間 $\tau_i$ を含む

A, B, Cについて

$$F = a_\infty + \sum_{i=1}^4 a_i \exp(-t/\tau_i) \quad (8)$$

$A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ について

$$F' = \sum_{i=1}^4 2.3 a_i (-t/\tau_i) \exp(-t/\tau_i) \quad (9)$$

の式で $a_i$ を適当に定めたものによつて表わされるはずである。

第7図(b)には $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $\tau_4$ のところにならかなり急峻な山をもつ第6図の $-de^{-t}/d(\log t)$ の曲線とおなじ形の山が4つ破線で書いてある。これがこの場合における(a)式の右辺の各項を表わしている。4つの破線の山を重ねあわせたのが点線の曲線で、これが実線で表わされた曲線 $B'$ と一致すべきものである。事実、両者はかなりよく一致していると見てよいであろう。

(8), (9) 式の係数  $a_i$  は実験を行なうときのいろいろな条件で決定されるものである。したがって、行なわれた 3 回の実験 A, B, C に於いて,  $a_i$  の値はそれぞれ違う。つぎに, (8), (9) 式ができるだけ実測値と一致するように定めた  $a_i$  の値を第 1 表に示す。

第 1 表  $a_i$  の値 (単位 kg) 及び  $\tau_i$  を与える層の高さ\*\*

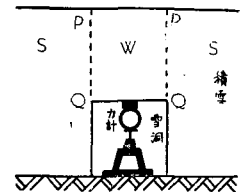
実 験	$\tau_i$				
	0.1 min	1 min	18 min	190 min	$\infty$ min
A	12	42	62	-71*	207
B	20	41	96	126	227
C	0	0	0	-220	227
層の高さ地面より (cm)	217—204 (217—173)	204—170 (173—157)	170—132 (157—127)	132—100 (127—100)	
層の厚さ (cm)	13 (44)	34 (16)	38 (30)	32 (27)	

\*  $\tau=700$  min としたときの値。

\*\* 実験 B の  $a_i$  を用い, 雪の弾性係数  $E$  について  $E \propto \rho$  (或いは  $E \propto -0.07 + \rho$ ) を仮定して計算した。但し,  $\rho$  は雪の密度。

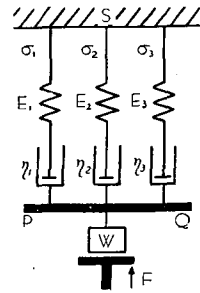
## VI. 模型による考察

以上のように雪が 4 個の緩和機構から成立っていることがわかつたわけであるが, その 4 個は常に同じように働くわけではない。あるときはすべてが働き, あるときはそのうちのいくつかは休止する。このことがどうして起るか, その機構について考えてみよう。第 8 図は観測法を簡略に表わしたものである。雪洞の天井になつている部分 W の雪の重さを  $w_0$  とすると, この部分は力計を具えた梁によつて下から支えられるとともに, 左右の PQ 面において, まわりの雪 S との間の剪断力によつて吊り下げられていると考えられる。この剪断力は弾性力と粘性力との成分からなつている。第 2 図の右側に示したように, 雪の粘性係数  $\eta$  は積雪面からの深さによつて著しくちがつている。雪の天井の上層では  $\eta$  は  $10^6$  dyne min/cm<sup>2</sup> 程度であるのに下層では  $10^9$  dyne min/cm<sup>2</sup> 程度へと 1000 倍にも増加している。弾性係数  $E$  の測定は行なわなかつたが, 雪の  $E$  についてはそれが  $10^7$  dyne min/cm<sup>2</sup> 程度であり密度によつて変化するが,  $\eta$  のように桁が違うほどには変わらないことが知られている<sup>1)</sup>。したがつて第 V 節で見出されたように, 雪洞の天井 W の緩和時間  $\tau = \eta/E$  の値が 0.1 分程度から 100 分程度までにわたつてることが了解されると同時に, 短い緩和時間は W の上層部の雪から, 長い緩和時間は W の下層部の雪からくることがわかる。そこで, 雪洞の天井の雪の状態を理想化して W は異なつた緩和時間を有する 3 つの層からなり, その各層はその両端において, 粘弾性的な剪断力



第 8 図 観測法の略図

によつて積雪  $S$  によつて支えられていると考える。実は3つでなく4つの層にわけて考えるべきであるが、前節の最後にあげた表でみられるように、係数  $a_i$  は小さい値なので、緩和時間  $\tau_i$  の緩和機構はあまり利いていない。それで、簡単のためにそれを無視したのである。以上のことを更に理想化すると、これを第9図のような模型で表わすことができる。すなわち、雪洞の天井  $W$  は3個の Maxwell 模型を並列につないだものによつて吊り下げられると同時に、下から梁で支えられているものと考えられる。このような模型で梁を上下させたとき、梁にかかる力が増えたり減つたりする様子を調べればよい。前節では



第9図 第8図を理想化した模型

4つの緩和機構を見出し、それに緩和時間の短いものから1, 2, 3, 4と番号をつけた。しかし、今後はその第1番目を無視するので、さきに2, 3, 4としたものを改めて1, 2, 3と呼ぶことにする。さて、 $i$ によつて、1, 2, 3を代表し、 $i$ 番目の Maxwell 模型の弾性係数を  $E_i$ 、粘性係数を  $\eta_i$ 、歪力を  $\sigma_i$  とする。歪力は張力を正、圧力を負とする。但し、Maxwell 模型の  $E_i$ 、 $\eta_i$  と第8図 PQ 面にあらわれる積雪の弾性係数  $E$ 、粘性係数  $\eta$  との関係は、 $\tau_i$  を与える雪の層が地面から測つて  $h_i$  から  $h_{i-1}$  までであるとすれば、 $E_i = k \int_{h_i}^{h_{i-1}} E dh$ 、 $\eta_i = k \int_{h_i}^{h_{i-1}} \eta dh$  であらわされる。但し、 $k$  は雪洞の形や大きさによつてきまる常数である。

a) 実験 A これは最初の実験で、雪洞を掘つて梁を設置するまでにかかなり手間どつた。それで模型の上では  $W$  が吊り下げられてから充分時間が経つて、 $W$  は粘性的に降下を続ける定常状態に達してははずである。したがつて  $W$  の重さ  $w_0$  は3つの Maxwell 模型にそれぞれ  $\eta_1 w_0 / Y$ 、 $\eta_2 w_0 / Y$ 、 $\eta_3 w_0 / Y$  の割合で分担されている。但し  $Y = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$  である。ここで梁を雪の天井にあて、ジャッキで押しあげたわけであるが、これを模型についていえば、 $w_1$  の圧力で  $W$  を押しあげ、そのまま  $W$  を固定したことになる。押しあげた瞬間には、模型のダッシュポット  $\eta_1$ 、 $\eta_2$ 、 $\eta_3$  は動かない。ただスプリング  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $E_3$  が同じ量だけ縮む。したがつて  $Z = E_1 + E_2 + E_3$  とすると、圧力  $-w_1$  は  $-E_1 w_1 / Z$ 、 $-E_2 w_1 / Z$ 、 $-E_3 w_1 / Z$  の割合で3つの模型のあいだに分配され、歪力  $\sigma$  に関する初期条件として

$$t = 0 \text{ で } \sigma_{i_0} = (\eta_i / Y) w_0 - (E_i / Z) w_1, \quad i = 1, 2, 3 \tag{10}$$

がえられる。このあと各 Maxwell 模型は変形しないまま、すなわち歪の変化を止められたままそれぞれの緩和時間に従つて歪力を緩和し、無限大時間後には零になる。よく知られているように、Maxwell 模型の歪力  $\sigma$  の緩和は

$$\sigma_i = \sigma_{i_0} \exp(-t / \tau_i) \quad \text{但し } \tau_i = \eta_i / E_i \tag{11}$$

によつてあらわされる。故に梁にかかる力  $F$  は

$$\begin{aligned} F &= w_0 - \sum_i \sigma_i \\ &= w_0 - \sum_i \{ (\eta_i / Y) w_0 - (E_i / Z) w_1 \} \exp(-t / \tau_i) \end{aligned} \tag{12}$$

によつてあらわされる。この式はたしかに、 $t=0$  で  $F=w_1$ 、 $t=\infty$  で  $F=w_0$  を与える。いま、先に述べた理由によつて

$$\eta_1:\eta_2:\eta_3 = 1:20:300$$

$$E_1:E_2:E_3 = 1:2:3$$

と仮定し、実験 A の事実とあうように

$$w:w_0 = 6:5$$

とすると、

$$\tau_1:\tau_2:\tau_3 = 1:10:100$$

$$F = w_0 \{1 + 0.20 \exp(-t/\tau_1) + 0.34 \exp(-t/\tau_2) - 0.34 \exp(-t/\tau_3)\} \quad (13)$$

が得られる。この式で、右辺最後の第 4 項が負であることに注意を要する。 $t$  の値が  $\tau_2$  より小さいときには、右辺第 4 項はほとんど常数と考えられ、曲線の形は主として第 2 項、第 3 項によつて支配され、 $F$  は減少函数である。しかし、 $t$  が大きくなるにつれて、第 2 項、第 3 項は零に近づき、曲線の形は第 4 項に支配されてきて、減少函数から次第に増加函数へと変化し終りに  $w_0$  に漸近的に近づく。実験 A での梁にかかる力  $F$  については、急激に減少したあとしばらくたつて増加に転じたのが特徴であつたが、そのことがここに説明されたわけである。

b) 実験 B 実験 B は、実験 A のあと梁は雪の天井に押しつけて固定したまま長い時間たつてから行なつたものである。したがつて、(11) 式の  $t=\infty$  の状態、すなわち、 $F=w_0$  の状態に於いて、突然梁を押し上げて  $F$  を  $w_0$  から  $w_0+w_1$  に増加して  $W$  を固定したことにあたる。したがつて、歪力  $\sigma$  に関する初期条件は

$$t=0 \text{ で } \sigma_i = (-E_i/Z) w_1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

となり、任意の時刻  $t$  に対しては

$$\sigma_i = -(E_i/Z) w_1 \exp(-t/\tau_i) \quad (14)$$

$$F = w_0 + \sum_i \frac{E_i}{Z} w_1 \exp(-t/\tau_i) \quad (16)$$

となる。

(16) 式の各項の係数は、まえに仮定した  $E_i$  の値を入れて計算するまでもなく、すべて正の値であることがわかる。各項の大きさも同程度の大きさである。したがつて、3 つの緩和機構は同程度に働く。これはまさに曲線 B の性質を表わしている。尚ここで、係数  $a_i$  の大きさについて立入つて考えてみよう。

第 V 節で説明したように第 1 表には実験 B における  $a_i$  の値が示されているが、これは  $E_i$  に比例していると考えられる。いま、緩和時間の短い雪層は上層にあり、緩和時間の長い雪層はど下層にあるものと仮定し、又雪の弾性係数  $E$  と密度  $\rho$  との関係が  $E \propto -d + \rho$  であると仮定すれば、

$$E_i \propto \int_{h_i}^{h_i-1} (-d + \rho) dh \propto a_i$$

である。雪の密度は全層に亘つて測定してあるから、 $a_i$  間の比率に従つて P 点の高さ 100 cm から Q 点の高さ 217 cm までの積分値  $\int_{100}^{217} (-d+\rho) dh$  を配分すれば、上式を用い PQ 間の層を緩和時間別に分けることができる。第 1 表には 2 月 20 日に断面測定をしたときの密度を用い、 $d=0$  とし得られたものを示してある。尚 ( ) の中には  $d=0.07$  としたときの値を示してある。

c) 実験 C これは実験 B のあとで梁をさげ、梁にかかる力を  $w_0$  から零にした実験である。したがつて第 9 図の模型について考えるかぎり、実験 C は、ただ力を逆にとり、 $w_1 = -w_0$  とした点を除けば実験 B の場合と全く同じである。それ故

$$F = w_0 - \sum_i (E_i/Z) w_0 \exp(-t/\tau_i) \quad (17)$$

となり、本質的に (16) 式と同じものが得られる。しかし、実験 C の場合には緩和時間  $\tau_i$  の機構だけが働いたのであつて、 $\tau_1$ 、 $\tau_2$  の機構はほとんど作用しなかつた。この事実は (17) 式と矛盾する。しかし、このことは次のようにして説明できる。

実験 C では梁を下げ、梁にかかる力  $F$  を零にしたのであるが、梁が雪の天井からしばらく離れていた。模型でも梁を下げすぎて  $W$  は梁と離れ、 $W$  が長時間 3 つの Maxwell 模型だけによつて吊り下げられて降下した後、梁に接触してそこで固定されたと考えよう。すると、 $\sigma$  に関する初期条件は実験 A の場合にも考えた極に、 $W$  が固定された時を  $t=0$  とすれば、

$$t = 0 \text{ で } \sigma_i = (\eta_i/Y) w_0$$

任意の時間  $t$  に於いて

$$F = w_0 \{1 - \sum (\eta_i/Y) \exp(-t/\tau_i)\} \quad (18)$$

となる。(18) 式の各項の係数は  $\eta_i$  に比例する。 $\eta$  は前にも述べたように、上層で  $16^6$  dyne min/cm<sup>2</sup>、下層で  $10^9$  dyne min cm<sup>2</sup> とゆう具合に桁が違つているので (18) 式の右辺に含まれる項のうち最も大きな粘性係数  $\eta_3$  を含む項だけが大きく支配し、(18) 式はかなりよい近似で

$$F = w_0 \{1 - (\eta_3/Y) \exp(-t/\tau_3)\}$$

とすることができる。すなわち、唯 1 つの緩和時間  $\tau_3$  の現象だけが観察されることになる。

(17) 式のような結果が得られるか (18) 式のような結果が得られるかは  $\sigma$  に関する初期条件でできる。(17) 式のときの初期条件は梁が雪の天井をはなれた瞬間のものであつて、力は  $E_i$  に比例して 3 つの模型に分担されていた。しかし、(18) 式では雪の天井がしばらく宙に浮いていたため、力は  $\eta_i$  に比例して 3 つの模型に分担されるようになったとしたわけである。このように力の分担に変化がおこるためには時間が必要である。つぎにそれをしらべてみる。

梁が雪の天井を離れたあとでの  $W$  の下方への移動距離を  $\epsilon$  とすれば、

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_2}{\eta_2} = \frac{1}{E_3} \frac{d\sigma_3}{dt} + \frac{\sigma_3}{\eta_3}$$

である。この連立微分方程式を

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = w_0$$

$$t = 0 \text{ で } \sigma_i = (E_i/Z)w_0$$

として解くと、

$$\sigma_i = A_i \exp(-at) + B_i \exp(-\beta t) + (\eta_i/Y)w_0 \quad (20)$$

$$\text{但し, } A_i + B_i = \left( \frac{E_i}{Z} - \frac{\eta_i}{Y} \right) w_0$$

となり、 $-a$ 、 $-\beta$  は  $X$  の 2 次方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\sum E_i}{E_1 E_2 E_3} X^2 + \left[ \frac{1}{E_1} \left( \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3} \right) + \frac{1}{E_2} \left( \frac{1}{\eta_3} + \frac{1}{\eta_1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{E_3} \left( \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) \right] X + \frac{\sum \eta_i}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

の根として定められる。いま  $E_1 = E_2 = E_3 = 10^7$  dyne/cm<sup>2</sup>,  $\eta_1 = \eta_2/10 = \eta_3/100 = 10^7$  dyne min/cm<sup>2</sup> とすれば、(21) 式の根は

$$-a = -1/2.58 \quad -\beta = -1/1.45$$

となる。つまり 1.5 乃至 2.6 分程度の短い時間で  $W$  の重さ  $w_0$  が、 $E_i$  に比例して分担されていた状態から、 $\eta_i$  に比例して分担される状態へ移行することになる。

実際に実験 C では梁にかかる荷重を零にするため、ジャッキを緩めて梁を下げたが、下げすぎてしまったのである。そして雪の天井はすぐには降りて来なかつた。そのため環状力計にはしばらくの間力が現われなかつた。それで約 1 分の後に再びジャッキを締めて約 6 kg の荷重が現われるようにした。こうしたことのために曲線 C は (17) 式の形をとらずに (18) 式の形に近づき、最も大きな緩和時間の緩和機構だけが作用するようになったものと考えられる。

この実験に当つて終始あらゆる御指導を賜つた吉田順五教授に深く感謝する。又環状力計をお貸し下さつた工学部の真井耕象教授に厚くお礼を申し上げる。尚この研究の一部は文部省科学研究費によつた。

#### 文 献

- 1) 吉田順五・笹谷雅信・内海威彦 1948 積雪の弾性と匍匐. 低温科学, 4, 11.  
小島賢治 1954 積雪の粘弾性. 低温科学, 物理篇, 12, 1.

#### Résumé

From the lower half of the vertical wall of a hole dug in a snow cover about 1 m 20 cm high the snow was taken away so as to make a rectangular cave which was 1 m wide, 1 m high and 2.7 m deep. A wooden beam was placed from below against the ceiling of the cave along its centre line; the weight with which the ceiling pressed upon the beam was observed. The beam was not of one piece; it was separated at its centre

and jointed there so as to be bent freely. Both the ends of the beam were supported by wooden pillars while the central joint was put on the top of a proving ring (an instrument for indicating force), half of the weight of the ceiling being indicated by it. The end pillars and the proving ring were each stood upon three screw jacks standing on a firm wooden bench (Fig. 3 in the text).

At first the beam was forced up by the screw jacks, until the force indicated by the proving ring rose to 250 kg. Immediately the force began to decline rapidly but after several hours its decreasing rate became gradually small finally to be reduced to nil. Then it changed its course to increase finally approaching to a value asymptotically (experiment A). At this state the beam was forced up again to increase the force on the force meter by 500 kg. In this case the force decreased monotonously towards the value which was almost the same as that it had had before the second lift of the beam (Experiment B). Thirdly, the beam was lowered until the force on it became zero. The force gradually increased with decreasing rate (Experiment C). The course of change in the force is graphed in Fig. 4. It was found that the mode of change in the force can be expressed by the equation

$$F = 221 + 279 \exp \{ -(t/60.7)^{0.443} \} \text{ kg} \quad (1)$$

for experiment B and by

$$F = 227 + 220 \exp (-t/176) \text{ kg}$$

for experiment C,  $t$  being the time counted by minutes from the beginning of each experiment.

As to the above briefly described three cases, it is assumed that the relaxation of force  $F$  is expressed by the equation

$$F = \sum_i a_i \exp (-t/\tau_i). \quad (3)$$

The relaxation time  $\tau_i$  and the coefficient  $a_i$  of its relaxation function are obtained by an approximation method. The graphs of the term  $\exp(-t)$  and its derivative by  $-\log t$ , that is,  $-f(t) = -d \exp(-t)/d(\log t)$  against  $\log t$  are shown in Fig. 6. Considering that the graph  $-f(t)$  against  $\log t$  has the maximum value 0.847 at  $t=1$  and completely coincides with  $-f(t/\tau_i)$  with the shift along the abscissa by  $\log \tau_i$  without changing its shape, the graphs  $F' = dF/d(\log t)$  shown in Fig. 7 (a), (b) and (c) are easily represented by the sum of the hills  $\sum b_i f(t/\tau_i)$  as shown by the dotted line and the broken lines in Fig. 7 (b). From the maximum value  $b_i$  and the abscissa  $t_i$  giving the maximum,  $a_i = -b_i/0.847$  and  $\tau_i = t_i$  can be obtained. Thus, the relaxation times 0.1 min, 1 min, 18min, 190 min and their coefficients are obtained. They are shown in Table 1. It is seen from this table that in experiment A, only the largest relaxation time has a negative coefficients; in experiment B, all relaxation times have positive coefficients; in experiment C, only the largest relaxation time has a large negative coefficient and other relaxation time have coefficients of practically zero.

These three cases can be explained by a model of the mechanical system. As



shown in Fig. 8, the system can be considered in which the snow cover above the ceiling denoted by  $W$  is not only supported by the beam, but also is suspended at the plane  $PQ$  by shearing stress of the surrounding snow cover  $S$ . The suspension at the plane  $PQ$  can be substituted by the model constructed of the parallel connection of many Maxwell bodies having different relaxation times. For the sake of convenience in order to grasp the characteristic feature of the curve representing the change of force, a model is considered as shown in Fig. 9; here  $PQ$  plane in Fig. 8 is substituted by three Maxwell bodies having relaxation times approximately 1 minute, 10 minutes and 100 minutes respectively.

Let us consider experiment A using the model of Fig. 9. At first, the weight  $W$  had been suspended for a long time by  $PQ$ , that is, by three bodies and each body had borne a part of the weight  $w_0$  (the weight of  $W$ ) proportional to its viscosity  $\eta_i$ . If  $W$  was pushed up with a force  $w_1$ , at this time each body would carry a part of the force  $w_1$  proportional to the elasticity  $E_i$ . The stress borne by each body relaxed with time and became zero. Thus the force  $F$  supporting  $W$  is represented by equation

$$F = w_0 - \sum_i \left\{ \frac{\eta_i}{Y} w_0 - \frac{E_i}{Z} w_1 \right\} \exp(-t/\tau_i)$$

where  $Y = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$ ,  $Z = E_1 + E_2 + E_3$ .

If it be taken  $w_1 = \frac{6}{5} w_0$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2/20 = \eta_3/300 = 10^7 \text{ dyne min/cm}^2, \\ E_1 &= E_2/2 = E_3/3 = 10^7 \text{ dyne/cm}^2, \end{aligned} \quad (5)$$

then  $\tau_1 = \tau_2/10 = \tau_3/100 = 1 \text{ min}$  and equation (4) becomes

$$F = w_0 \{1 + 0.20 \exp(-t/1) + 0.34 \exp(-t/10) - 0.34 \exp(-t/100)\}. \quad (5)$$

From this equation it is found that the coefficient of the function having the largest relaxation time is negative differing from the sign of other coefficients. This coincides with the fact of case A. After the experiment of case A, the weight has been supported by the force  $F = w_0$ . At this state, if the weight is pushed up by  $F = w_0 + w_1$ , the newly added force  $w_1$  will relax with time and the change of  $F$  will be shown by the equation

$$F = w_0 + \sum_i \frac{E_i}{Z} w_1 \exp(-t/\tau_i). \quad (7)$$

This equation shows that the force decreased monotonously from  $w_0 + w_1$  to  $w_1$ . In experiment B this is just what happened.

Case C is slightly complicated. In the above reasoning for case B, if the newly added force  $w_1$  is equal to  $-w_0$ , it will be found from equation (7) that the force  $F$  changes from zero to  $w_0$ , and the coefficient of the relaxation function for each relaxation time is proportional to the elastic constant of each body. That is to say, as the magnitudes of elastic constants of three bodies are similar, the change of force appears as a phenomenon containing all relaxation times in contradiction to the experimental results of case C. Thus, with this reasoning, the phenomenon of case C can not be

explained. If the beam supporting  $W$  be lowered and no longer used to support the ceiling for a long time, then the weight  $w_0$  will be borne by each Maxwell body in proportion to its respective viscosity. Then if the beam be elevated and set to support the ceiling again, the increase of force  $F$  will be shown by the equation

$$F = w_0 \left\{ 1 - \sum_i \frac{\eta_i}{Y} \exp(-t/\tau_i) \right\} \quad (8)$$

As the values of viscosity are different from each other in order of magnitude, only the term proportional to the largest viscosity remains practically, that is, only the phenomenon of the largest relaxation time is observed. This is the case of experiment C. The time while the weight  $W$  must have been suspended for the transition from the state in which the stresses are controlled by elasticity to the one controlled by viscosity is not very long. From the calculation with the constants  $\eta_i$  and  $E_i$  taken as in equation (5), it is found that it takes in actual practice only a few minutes for this transition. In experiment C, the beam had been removed as the ceiling support for about one minute. Therefore it is reasonable that the relaxation of the force should be represented by equation (8).