



Title	一様な斜面上の積雪の内部応力
Author(s)	吉田, 順五
Citation	低温科学. 物理篇, 21, 1-12
Issue Date	1963-03-10
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/17992">http://hdl.handle.net/2115/17992</a>
Type	bulletin (article)
File Information	21_p1-12.pdf



[Instructions for use](#)

## 一様な斜面上の積雪の内部応力\*

吉田 順五

(低温科学研究所 応用物理学部門)

(昭和37年10月受理)

### I. ま え が き

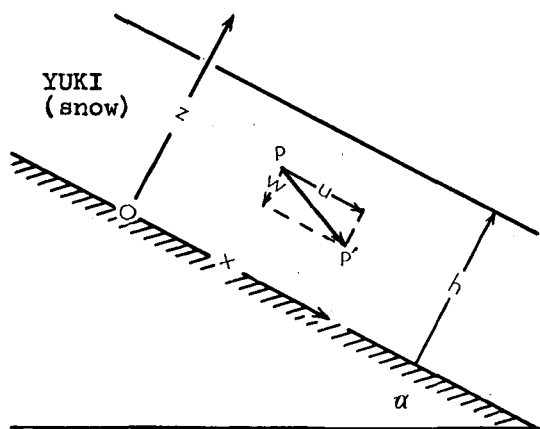
山の斜面の積雪は、たえず、下方にむかって緩慢に匍匐しつつ、ときには斜面にそって急激に落下して雪崩となる。この匍匐や雪崩の機構については、いまだ不明な点が多いが、斜面上の積雪の内部応力分布がわかれば、その機構を明らかにする点で役立つことが多いであろう。この論文では、斜面上の積雪内いろいろな深さで雪の匍匐速度が測定されたとき、その測定結果から積雪内部の応力分布をさだめる方法について述べる。ただし斜面は無限に広く傾斜角は一様で、雪も全斜面に一様につもった理想的なばあいにかぎる。もちろん、このような理想的斜面は実在しない。しかし、実際の斜面に傾斜が一様でさしわたしが雪の厚さにくらべて遙かに長い範囲があれば、その範囲は、近似的に、うえの理想的斜面とおなじであると考えてよい。

第1図は理想的斜面の縦断図である。

傾斜角は $\alpha$ で、雪は $h$ の厚さで一様につもっている。斜面上の一点 $O$ を坐標原点にえらび、斜面にそい下方に $x$ 軸、紙面に垂直に $y$ 軸、斜面に対し垂直上方に $z$ 軸をとる。雪の状態は一様なので、積雪内部の密度、応力、匍匐速度は $x, y$ には関係せず $z$ だけの函数である。

雪のなかの任意の一点 $P$ は、矢印 $PP'$ で表わされるような匍匐速度で変位するであろう。この匍匐速度の $x$ 成分 $u$ 、 $z$ 成分 $w$ は、うえにのべたことにより、 $z$ だけの函数である。

匍匐速度の $y$ 成分 $v$ は、 $y$ 軸に垂直な任意の鉛直面について雪の状態が左右対称なので、つねに0にひとしい。いろいろな $z$ の値について匍匐速度を測定すると、 $u$ と $w$ とが $z$ の函数として知られる。その函数から積雪内の応力分布を求めるのが目的である。



第1図 理想斜面の縦断図

\* 北海道大学低温科学研究所業績第632号

## II. 内部応力の釣合い

積雪内部の応力状態は6個の応力成分  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$  で表わされ、さきののべたことにより、これらの成分は、みな、 $z$  だけの函数である。その函数の形がわかれば、目的とする応力の分布状態が求められたことになる。

実は、これら6個の応力成分のうち匍匐速度成分  $u, w$  に関係するのは  $\sigma_x, \sigma_y$  だけであつて、 $\sigma_z$ 、以下の4個は、この問題に特有な対称性と応力釣合いの条件だけから定めることができる。つまり、この4個の成分は、匍匐速度の成分  $u, w$  が  $z$  のどんな形の函数であつても、それに関係なく、ひと通りにさだめられるのである。

まず、雪の応力状態が、 $y$  軸に垂直な任意の鉛直面について左右対称なことから

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \quad (1)$$

であることがわかる。

雪の密度を  $\rho(z)$ 、重力の加速度を  $g$  とすると、単位体積の雪にはたらく重力の  $x, y, z$  成分は  $\rho g \sin \alpha, 0, -\rho g \cos \alpha$  である。よつて、応力の釣合条件として

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho g \cos \alpha = 0 \quad (4)$$

の方程式がなりたつが、 $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$  であり、他の応力成分が、みな、 $z$  だけの函数であることから、この釣合条件は

$$\frac{d\tau_{zx}}{dz} + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d\sigma_z}{dz} - \rho g \cos \alpha = 0 \quad (6)$$

という簡単な方程式になる。積雪の表面は自由表面なので、そこには  $\tau_{zx}, \sigma_z$  は存在しえない。すなわち

$$z = h \text{ では } \tau_{zx} = \sigma_z = 0 \quad (7)$$

でなければならない。この境界条件(7)のもとに(5), (6)式を積分すると

$$\sigma_z = -m(z)g \cos \alpha \quad (8)$$

$$\tau_{zx} = m(z)g \sin \alpha \quad (9)$$

として、 $\sigma_z$  と  $\tau_{zx}$  とが定められる。ここに、 $m(z)$  は

$$m(z) = \int_z^h \rho(z) dz \quad (10)$$

で、積雪の表面から  $(h-z)$  の深さまでにある雪層の単位面積あたりの質量にひとしい。(8)式(9)式の関係は、厚さ  $(h-z)$  の表面雪層の釣合いを直接考えることによっても、容易にみちびくことができる。) )

以上示したように、 $\sigma_x$  と  $\sigma_y$  とが  $z$  のどんな関数であっても、(1)(8)(9)式であたえられる  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  と組合せれば、釣合い条件も境界条件も満足される。しかし、応力に関するものは釣合い条件や境界条件だけではない。匍匐によって積雪内に生ずる歪速度  $du/dz$ ,  $dw/dz$  と応力とのあいだには一定の関係が存在する。その関係により、次節にのべるようにして、 $\sigma_x$  と  $\sigma_y$  との函数形が決定される。

### III. 応力成分 $\sigma_x$ , $\sigma_y$ の決定

雪は圧縮性の塑性体である。等方質であるか異方質であるかについて問題があるが、「霜ざらめ」をのぞけば、ほとんど等方質であるとみなしてよいであろう。それで、等方質塑性体に関するつぎの(13)式が雪についても成立するものと仮定する。

塑性体の内部、任意の点の流動——いまの問題では匍匐——の速度の  $x, y, z$  成分を  $u, v, w$  とする。塑性理論によると、等方質塑性体の流動によって生ずる歪速度成分

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (11)$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (12)$$

と応力成分  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$  とのあいだには

$$\frac{\dot{\epsilon}_x}{s_x} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{s_y} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{s_z} = \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{\tau_{zx}} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{\tau_{xy}} \quad (13)$$

の比例関係がある。ここに、 $s_x, s_y, s_z, \dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z$  は、

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (14)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{3} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z) \quad (15)$$

とすると

$$s_x = \sigma_x - \sigma, \quad s_y = \sigma_y - \sigma, \quad s_z = \sigma_z - \sigma \quad (16)$$

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}, \quad \dot{\epsilon}_y = \dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}, \quad \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon} \quad (17)$$

によって与えられる。

(13) 式の比例関係を、いま考えている斜面上の雪について書いてみよう。匍匐速度成分の

$u, w$  は  $z$  だけの関数で,  $v$  は 0 なので,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_y = 0, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{dw}{dz} \\ \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{xy} = 0, \quad \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \frac{du}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

であり,  $\dot{\epsilon}$  は

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{3} \frac{dw}{dz} \quad (19)$$

となる。これから

$$\dot{\epsilon}_x = -\frac{1}{3} \frac{dw}{dz}, \quad \dot{\epsilon}_y = -\frac{1}{3} \frac{dw}{dz}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{2}{3} \frac{dw}{dz} \quad (20)$$

がえられる。一方, 応力成分のうちの  $\tau_{yz}, \tau_{xy}$  は 0 で,  $\sigma_z = -mg \cos \alpha$ ,  $\tau_{zx} = mg \sin \alpha$  である。よって, 0/0 の形になる  $\dot{\gamma}_{yz}/\tau_{yz}, \dot{\gamma}_{xy}/\tau_{xy}$  の項を除外して, (13) の比例関係は

$$\frac{\frac{1}{3} \frac{dw}{dz}}{\sigma_x - \sigma} = \frac{\frac{1}{3} \frac{dw}{dz}}{\sigma_y - \sigma} = \frac{\frac{2}{3} \frac{dw}{dz}}{-mg \cos \alpha - \sigma} = \frac{\frac{1}{2} \frac{du}{dz}}{mg \sin \alpha} \quad (21)$$

と書かれることになる。この (21) 式の左半分からは

$$\sigma_x = \sigma_y \quad (22)$$

の関係, また, 右半分からは

$$\sigma = -m(z)g \left[ \cos \alpha + \frac{4}{3} \sin \alpha \cdot \left( \frac{dw}{dz} / \frac{du}{dz} \right) \right] \quad (23)$$

の関係がみちびかれる。ところで, (22) 式と  $\sigma_z = -mg \cos \alpha$  とから  $\sigma$  は

$$\sigma = \frac{1}{3} (2\sigma_x - mg \cos \alpha) \quad (24)$$

とかかれるので, これと (23) 式とを組合せて, 目的とする  $\sigma_x, \sigma_y$  が

$$\sigma_x = \sigma_y = -m(z)g \left[ \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \left( \frac{dw}{dz} / \frac{du}{dz} \right) \right] \quad (25)$$

の形で, 匍匐速度  $u, w$  から導かれる歪速度  $\frac{du}{dz}, \frac{dw}{dz}$  をつかって表わされる。第 1 図に示したように, 匍匐速度の  $z$  成分  $w$  はつねに  $z$  の負の方向を指しているのので, その値は負である。一般に, 負の値は取扱い上不便なことが多い。それで,

$$w' = -w$$

として正の  $w'$  を用いると, (25) 式は

$$\sigma_x = \sigma_y = m(z)g \left[ 2 \sin \alpha \cdot \left( \frac{dw'}{dz} / \frac{du}{dz} \right) - \cos \alpha \right] \quad (26)$$

と書かれる。 $\left( \frac{dw'}{dz} / \frac{du}{dz} \right)$ の値の大小により、 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ は正にも負にもなりうる。 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ は、正のときには張力、負のときには圧力である。

つぎの第IV節でみられるように、実際に測定される $\left( \frac{dw'}{dz} / \frac{du}{dz} \right)$ は地面からの距離 $z$ によっていろいろに変化する。この変化は雪の流動性が $z$ によって変っているからにちがいない。それで、雪の流動性を表わす量として、小島にならって、<sup>1)</sup>

$$Y' = \sigma_z / \dot{\epsilon}_z = -\sigma_z / \frac{dw'}{dz} \quad (27)$$

$$\eta = \tau_{zx} / 2 \dot{\gamma}_{zx} = \tau_{zx} / \frac{du}{dz} \quad (28)$$

を考え、 $Y'$ を圧縮粘性係数、 $\eta$ を剪断粘性係数となづけよう。 $Y'$ と $\eta$ との比を $\kappa$ 、すなわち

$$\kappa = Y' / \eta \quad (29)$$

とすると、

$$\frac{dw'}{dz} / \frac{du}{dz} = \left( 1 / \kappa \right) \cot \alpha \quad (30)$$

なので、(26)式は

$$\sigma_x = \sigma_y = m(z)g \cos \alpha [2(\eta / Y') - 1] = -\sigma_z [(2 / \kappa) - 1] \quad (31)$$

と書きかえられる。かくして、 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ が圧力になるか張力になるかは、 $\kappa$ が2より大きいか小さいかできまることになる。

普通、圧縮粘性係数 $Y$ はつぎのように定義される。雪の柱を軸の方向に $\sigma_z$ の圧力でおして軸の方向に歪速度 $\dot{\epsilon}_{z0}$ が生じたとき、 $\sigma_z$ を $\dot{\epsilon}_{z0}$ でわったもの、すなわち $Y = \sigma_z / \dot{\epsilon}_{z0}$ が圧縮粘性係数である。このばあい、雪の柱は、軸に垂直な $xy$ 面内で自由に伸縮できる。しかし、(27)式で定義された圧縮粘性係数 $Y'$ は、雪が $\sigma_z$ によって圧縮されても、 $xy$ 面では伸縮しないときの歪速度 $\dot{\epsilon}_z$ で $\sigma_z$ を割ったものである。それで、(27)式で与えられるものを $Y$ と区別するために $Y'$ と書いた。雪の塑性ポアソン比を $\nu$ とすると

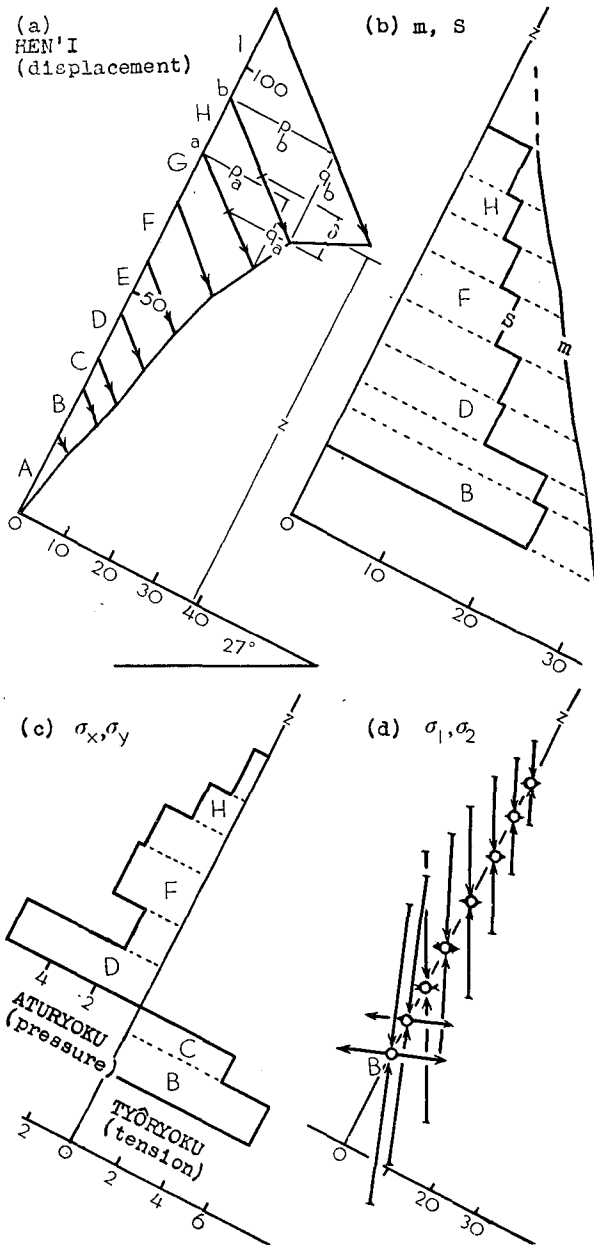
$$Y' = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} Y$$

の関係がある。また、 $Y$ と剪断粘性係数 $\eta$ とは $Y / \eta = 2(1 + \nu)$ の関係にあるので

$$\kappa = \frac{Y'}{\eta} = \frac{2(1 + \nu)}{1 - 2\nu} \quad (32)$$

がなりたつ。

## IV. 実 例



第2図 斜面上の積雪内の変位と応力。(a) 51日間におこった変位(cm)。(b) 積雪面と $z$ の高さとの間にある雪の質量( $\text{gr}/\text{cm}^2$ )と剪断応力強度 $S$ ( $\text{gr-wt}/\text{cm}^2$ )。(c) 斜面に平行な面内の垂直応力 $\sigma_x, \sigma_y$ ( $\text{gr-wt}/\text{cm}^2$ )。(d) 主応力 $\sigma_1, \sigma_2$ ( $\text{gr-wt}/\text{cm}^2$ )。

斜面上の積雪内、地面からいろいろな高さでの雪の流動速度測定の例としては、Haefeli<sup>2)</sup>、桜井<sup>3)</sup>、小島<sup>4)</sup>の仕事をおげることができる。Haefeli、桜井は、ピンポンの球をいくつか、積雪内に鉛直線にそって埋めこんだ。そして、ある日数ののち、積雪を切断してピンポンの球の位置を見つけ、はじめの位置からどれほど変位していたかを測った。ピンポンの球は雪とおなじ運動をされると考えられるので、ピンポンの球の変位を日数でわると、雪の流動速度がえられる。

小島は斜面上の雪に四角な穴をほり、穴のひとつの壁を、斜面の最大傾斜の方向に平行に鉛直にけずった。この雪の壁に直角に、そして鉛直に、大きな鋸で奥行き1m以上の切れ目をいれる。壁にインクをふきかけると、積雪を構成している雪層の境界がそまって、壁のうへに、斜面に平行なすじがなん本もあらわれる。このすじと、鋸の切れ目の線との交点を、小島は目印の点としてつけた。なん日かたって、この壁の雪を、奥の方1mほどまで取りのぞき、そこに新しい鉛直な壁をつくってインクを吹きかける。鋸の切れ目は深くいれてあったのでこの新しい壁にも切れ目の線がインクに染って現われ、目印とした雪層の境界と切れ目との交点がはっきりわかる。

しかし、このばあい、雪が匍匐したために、鋸の切れ目は、もはや、鉛直線ではなく曲って傾いている。まがった鋸の切れ目の線の最下端、切れ目の線が地面に達する点をとる鉛直線を雪の壁のうえにひく。この鉛直線と目印の点との距離をはかれば、雪の変位がわかり、それから匍匐速度が計算される。

第2図の(a)は、小島がおこなった測定結果の一例である。非常に広くて平らな傾斜27°の斜面上の雪が1月27日から3月18日までの51日間におこした変位を表わす。(この測定は1960年に、北海道虻田郡昆布町でおこなわれた。) 実際の変位は、鉛直線を規準としておこなわれたが、第2図(a)では、斜面に垂直なz軸との関連において変位が示されている。右下へ向く矢印をつけた太い直線が、目印の点が51日間におこした変位をあらわすベクトルである。目印の点は雪層の境にあるから、これらの変位ベクトルのあいだに、ひとつひとつの雪層がある。雪層には下から順にA, B, C, ……と記号をつけた。

図に示されているように、H層とG層との境界上の点aの変位ベクトルのx, z成分をそれぞれ $p_a, q_a$ ; H層とI層との境界上の点bの変位ベクトルのx, z成分をそれぞれ $p_b, q_b$

第1表 斜面上の積雪の変位と応力

斜面の傾斜角: 27°, 場所: 北海道昆布町, 測定期間: 1960年1月27日~3月18日(51日間)

測定者: 小島賢治<sup>1)</sup>

雪層	雪質	密度 gr·cm <sup>-3</sup>	$du/dz$ × 10 <sup>-2</sup> day <sup>-1</sup>	$dw'/dz$	$\eta$ gr·wt·day·cm <sup>-2</sup>	$Y'$	$\kappa$ = $Y'/\eta$
I	新 しまり	0.26	2.1	1.99	160	350	2.2
H	しまり	0.32	0.90	0.74	550	1300	2.4
G	"	0.33	0.92	0.63	690	1800	2.6
F	"	0.34	0.53	0.42	1500	3800	2.5
E	ざらめ	0.28	0.47	0.43	2000	4400	2.2
D	しまり	0.36	0.37	0.27	3000	8400	2.8
C	"	0.35	0.49	0.58	2500	4200	1.7
B	"	0.38	0.53	0.65	2500	4100	1.6
雪層	$\sigma_x, \sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{zx}$	$S$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\theta$
	gr·wt·cm <sup>-2</sup>						
I	-0.60	-6.7	3.5	4.9	-8.3	+0.94	-66.0°
H	-1.56	-9.4	4.9	6.6	-11.6	+0.70	-65.0
G	-2.83	-12.3	6.4	8.3	-15.4	+0.31	-63.5
F	-3.04	-15.2	7.9	10.5	-19.0	+0.76	-64.0
E	-1.65	-18.3	9.5	13.4	-22.5	+2.6	-66.0
D	-6.07	-21.3	11.1	14.0	-27.0	-0.43	-62.5
C	+4.30	-24.4	12.2	20.8	-29.0	+8.9	-69.5
B	+6.37	-25.5	13.3	22.6	-30.0	+11.1	-70.5



としよう。これらの変位を生じた 51 日の期間を  $t$  で表わすと、a 点 b 点の匍匐速度の  $x, z$  成分  $u_a, w_a; u_b, w_b$  は

$$\left. \begin{aligned} u_a &= p_a/t, & w_a &= q_a/t \\ u_b &= p_b/t, & w_b &= q_b/t \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

となる。この期間のうちに H 層は厚さを縮めた。それで、H 層の厚さとしてはその平均値、すなわち、a 点の変位ベクトルの中点と b 点の変位ベクトルの中点との  $z$  方向の距離、すなわち、図に  $\delta$  で表わした長さをとることにする。すると、H 層の歪速度は

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dz} &= \frac{u_b - u_a}{\delta} = \frac{p_b - p_a}{t\delta} \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{w_b - w_a}{\delta} = \frac{q_b - q_a}{t\delta} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

となる。また、H 層の位置をあらわす H 層の中心点の  $z$  の値は、この期間にかなり減少した。それで、H 層の位置も平均で示すことにすると第 2 図 (a) の  $z$  印をつけた長さが H 層の中心点の平均  $z$  坐標となる。 $z$  は、 $x$  軸から a 点 b 点の変位ベクトルの中点同志をむすぶ直線の中点までの距離である。かくして、この  $z$  の値に対応する歪速度として (34) 式の  $du/dz, dw/dz$  があたえられることになる。以上のことを各雪層についておこなえば、積雪全体にわたっての歪速度が  $z$  の函数として知られる。

小島<sup>1)</sup> は、うえのようにして、各雪層について  $du/dz, dw/dz$  をさだめ、(27)(28) 式であたえられる圧縮粘性係数  $Y'$  と剪断粘性係数  $\eta$  とを決定した。(小島の論文では、 $Y'$  を  $\eta'_c$ ,  $\eta$  を  $\eta_s$  とかいてある。) 第 I 表の左端から  $\kappa = Y'/\eta$  までの列と、 $\sigma_x$  と  $\tau_{zx}$  の列との数値は、第 2 図 (a) のばあいについて、小島が測定し計算して求めたものである。 $\sigma_x, \sigma_y$  の列および  $S$  の列から右の部分は、小島の数値をもとにして、筆者が計算した結果である。

あい等しい値の  $\sigma_x$  と  $\sigma_y$  とは (31) 式で計算したもので、第 I 表にみられるとおり、B 層と C 層とでは正の値をもち、張力である。D 層よりうえでは、すべて、圧力になっている。 $\sigma_x, \sigma_y$  が張力になるか圧力になるかは、さきにも述べたとおり、 $\kappa$  が 2 より小さいか大きいかできる。実際、 $\kappa$  が 2 より小さいのは、B 層と C 層とにおいてだけである。第 2 図 (c) に  $\sigma_x, \sigma_y$  と  $z$  との関係をグラフで示した。

応力成分がすべて知られたので、塑性体の流動を定めるうえで重要な量である剪断応力強度

$$S = \left[ \frac{1}{6} \{ (\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 \} + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

が計算できる。いまのばあい上式は簡単な

$$S = \left\{ \frac{1}{3} (\sigma_x - \sigma_z)^2 - \tau_{zx}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = |\sigma_x| \{ \tan^2 \alpha + (4/3)(1/\kappa^2) \}^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

に書きかえられる。第 2 図 (b) に、 $S$  と  $z$  との関係を、 $m$  ((10) 式) と  $z$  との関係とともに示

した。

応力状態は、主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  によって考えるのが、理解にとって最も便利であろう。いまのばあい  $\sigma_1, \sigma_2$  の方向は鉛直面内 ( $x, z$  面内) にあって

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x + \sigma_z + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2} \right\} \\ &= \sigma_z \left\{ \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) + \sqrt{\tan^2 \alpha + \frac{1}{\kappa^2}} \right\} \\ \sigma_2 &= \sigma_z \left\{ \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) - \sqrt{\tan^2 \alpha + \frac{1}{\kappa^2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

で表わされる。 $\sigma_3$  の方向は  $y$  方向と一致し、その値は  $\sigma_y$  にひとしい。すなわち

$$\sigma_3 = \sigma_y = \sigma_x \quad (37')$$

である。 $\sigma_1$  の方向と  $x$  軸の正の方向とのなす角を  $\theta$  とすれば

$$\tan \theta = - \frac{\sigma_z - \sigma_x - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2}}{2\tau_{zx}} = - \frac{(1/\kappa) + \sqrt{\tan^2 \alpha + (1/\kappa)^2}}{\tan \alpha} \quad (38)$$

である。 $\sigma_1, \sigma_2, \theta$  の数値を第 I 表にかかげるとともに第 2 図 (d) には、それが  $z$  によってどのように変化しているかを示した。矢印のついた線が主応力  $\sigma_1, \sigma_2$  の方向と大きさを表わす。鉛直にちかい線が  $\sigma_1$  である。矢印が中心の円にむいているものは圧力、反対をむいているものは張力である。

### V. $\sigma_x, \sigma_y$ の発生機構

第 II 節、第 III 節でみたように、いまの理想的な問題においては、6 個の応力成分のうち  $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$  は問題の対称性と応力の釣合い条件とできまってしまう。のこりの  $\sigma_x, \sigma_y$  は、このようにして定まった  $\sigma_z, \tau_{zx} (\tau_{yz}$  と  $\tau_{xy}$  とは 0) と積雪の性質とをつかうと求められた。このことから、 $\sigma_x$  と  $\tau_{zx}$  とは積雪に作用する重力の直接の結果として現われるものであり、 $\sigma_x$  と  $\sigma_y$  とは二次的に  $\sigma_z, \tau_{zx}$  によって誘導されるものであることがわかる。実際、つぎに示すように、 $\sigma_x, \sigma_y$  は、雪層が  $z$  方向に  $\sigma_z$  によって圧縮されるにも拘らず  $xy$  平面内では伸縮できないことの結果として現われるものなのである。

雪層の塑性ポアソン比を  $\nu$  とし、 $z$  方向に  $\sigma_z$  の垂直応力がはたらき、 $xy$  面内での雪層の伸縮がゆるめられないとすると、よく知られた一般関係により

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \quad (38)$$

の垂直応力が  $x, y$  方向に発生する。一方、(31) 式によって

$$\sigma_x = \sigma_y = -\sigma_z \left( \frac{2}{\kappa} - 1 \right) \quad (39)$$

と与えられたが、実際、(32) 式の関係により

$$\frac{\nu}{1-\nu} = -\left(\frac{2}{\kappa} - 1\right) \quad (39)$$

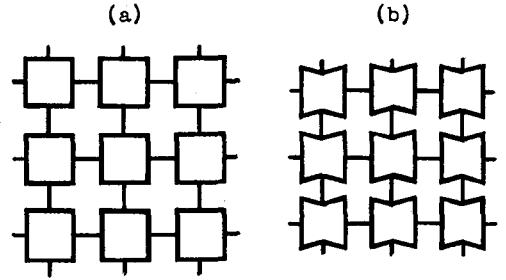
であることが容易にわかる。したがって  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  は、うえにのべた機構によって発生したものに相違ない。

雪の状態が  $z$  のみの函数である理想的なばあいには、いつも  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  が二次的に誘導されることになる。たとえば、Nye<sup>4)</sup> の導いた氷河の応力についても、このことがいえる。Nye は、氷河の運動を論ずるにあたって、一様な氷河を想像し、かなり複雑な考察をおこなって氷河のなかの応力成分をもとめた (Nye の論文の (8) 式)。その際、氷に対しては非圧縮性と完全塑性とを仮定した。完全塑性は (34) 式であた

えられる剪断応力強度  $S$  が一定値であるという条件であたえられる。しかし、この氷河のばあいにも、 $\sigma_x$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{xx}$  は対称性と応力の釣合い条件とから (1)(8)(9) 式の形に、簡単にきめられる。そして、この既知の  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xx}$  と氷の非圧縮性の条件 (Nye の論文の (4) 式) および完全塑性の仮定 (Nye の論文の (3) 式) とを組み合わせれば、Nye のだした  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  を表わす式がただちにえられる。

もとの問題にかえて、前節の斜面上積雪の B 層、C 層について考察をくわえよう。これらの層では  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  が張力であったが、この張力がうへの機構で発生したとすれば、B 層、C 層の雪は、 $z$  方向に圧縮されると  $xy$  面内では収縮しようとする性質をもっていたことになる。すなわち、塑性ポアソン比  $\nu$  が負であったわけである。張力は  $\kappa$  が 2 より小さいときに発生するが、実際、(32) 式によってみても (39) 式によってみても、 $\kappa < 2$  ならば  $\nu < 0$  である。理論的に  $\nu$  は  $+(1/2)$  と  $-1$  とのあいだの値をとりうるが、 $\nu$  が負になるのは非常にまれである。しかし、B 層、C 層の雪のばあい、氷の粒子が細長い棒の形をして、第 3 図 (a) のように連絡していたとすれば、 $\nu$  は負になる。この組織を上下方向に圧縮すれば、水平な氷の棒は同図 (b) のように曲り、組織全体は左右方向に縮むであろう。B 層 C 層は積雪の最下部にあったが、北海道の積雪の最下部にはしばしば霜ざらめが発生し、しかも霜ざらめの組織は第 3 図のものに似ている。

それにしても、うへの取扱いは、雪の状態が  $x$ ,  $y$  には全く無関係であるという理想的仮定のうえに立っていた。実際には、たとえ斜面が広く一様な傾斜であるとしても、局部的には凹凸もあり、地面と雪との摩擦にも変動がある。このため  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  は理想的なばあいの値から外れるであろう。B 層 C 層の張力もこのためであって、負の値のポアソン比によるのではないかも知れないが、それを検討するには、もう少し問題の取扱いを一般化しなければならない。



第 3 図 ポアソン比  $\nu$  が負の組織。鉛直および水平な太い線分が、ひとつひとつの氷の粒子である。

文 献

- 1) 小島賢治 1960 斜面積雪の粘性流動, I. 低温科学, 物理篇, **19**, 147-164.
- 2) Haefeli, R. 1939 Schneemechanik. Beiträge zur Geologie der Schweiz, Geotechnische Serie-Hydrologie, Lieferung **3**.
- 3) 桜井俊輔 1941 傾斜面に積った積雪層の移動測定. 雪氷, 3, 429-438.
- 4) Nye, J. F. 1951 The flow of glaciers and ice-sheets as a problem in plasticity. Proc. Royal Society, London, **A, 207**, 554-572.

Résumé

Internal stress within a snow cover lying on a slope must be in a close relationship with the problem whether the snow cover afterwards would or would not start to slide down the slope as an avalanche. Haefeli made measurements on creeping velocities of a snow cover on a uniformly sloping surface. Those velocities were found to decrease with depth and be directed almost parallel to one another at different depths. Under the assumption that the creeping velocity increased in proportion to the height above the ground keeping its direction strictly parallel, he calculated the principal stresses of the snow in the vertical plane standing in the steepest direction of the slope (Ref. 2). The present author finds the stresses without making any assumption such as Haefeli's leaving the creeping velocities of snow as they are actually observed.

Fig. 1 in the text represents the profile of an infinitely wide ground with sloping angle  $\alpha$  upon which lies a snow cover of uniform thickness  $h$ . Let coordinates  $x$  and  $z$  be taken as shown in the figure; coordinate  $y$  extends perpendicular to the plane of the paper. Arrow  $PP'$  is the creeping velocity of any point  $P$  within the snow cover,  $u$  and  $w$  being respectively the  $x$ - and  $z$ -components of the velocity. The symmetry of circumstances with respect to any vertical plane perpendicular to  $y$ -axis requires that  $v$ ,  $y$ -component of creeping velocity, as well as  $\tau_{yz}$  and  $\tau_{xy}$ , tangential components of stress in  $y$ -direction, vanish. The remaining components  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  and  $\tau_{zx}$  of stress depend only on  $z$ , because the snow cover shows no change in its nature either in  $x$ - or in  $y$ -directions. Then the equilibrium and boundary conditions for stress are found to be satisfied with

$$\sigma_z = -m(z) g \cos \alpha, \quad \tau_{zx} = m(z) g \sin \alpha,$$

and any functions of  $z$  for  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$ . Here  $m(z)$  is given by

$$m(z) = \int_z^h \rho(z) dz,$$

if the density of snow is denoted by  $\rho(z)$ .

The condition by which  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  should be determined is the relationship connecting the stress with the rate of change in strain. The components of the rate of change in strain are

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \dots,$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \dots, \dots,$$

and their deviations are given by

$$\dot{e}_x = \dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}, \dots, \dots$$

with  $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z)$ . Stress deviations

are

$$s_x = \sigma_x - \sigma, \dots, \dots,$$

where  $\sigma$  is equal to  $\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ . Then the above mentioned relation between the stress and the rate of change in strain is given by

$$\frac{\dot{e}_x}{s_x} = \frac{\dot{e}_y}{s_y} = \frac{\dot{e}_z}{s_z} = \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{\tau_{zx}} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{\tau_{xy}} \quad (1)$$

in its general form. When applied to the present case of the snow cover lying on a uniform slope, equations (1) are written as

$$\frac{-\frac{1}{3} \frac{dw}{dz}}{\sigma_x - \sigma} = \frac{-\frac{1}{3} \frac{dw}{dz}}{\sigma_y - \sigma} = \frac{\frac{2}{3} \frac{dw}{dz}}{-mg \cos \alpha - \sigma} = \frac{1}{2} \frac{du}{dz} \quad (2)$$

which yield

$$\sigma_x = \sigma_y = -m(z)g \left[ \cos \alpha - 2 \sin \alpha \left( \frac{dw}{dz} / \frac{du}{dz} \right) \right]. \quad (3)$$

The arrows in Fig 2.(a) show the displacements which occurred at points of different depths within a snow cover lying on a wide sloping ground of  $27^\circ$  inclination in Hokkaido (Ref. 1). The values of  $dw/dz$  and  $du/dz$  determined from those displacements give, when substituted in equation (3),  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  as graphed in Fig. 2(c). Within snow layers B and C located near the ground  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  are positive, that is, they represent tension, while they mean pressure in all other layers lying above. The graph marked  $S$  in Fig. 2(b) is that for the intensity of shear stress

$$S = \left[ \frac{1}{6} \left\{ (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 \right\} + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

and the principal stresses  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  are shown by arrows in Fig. 2(d). The third member  $\sigma_3$  of the principal stresses coincides with  $\sigma_y$  both in magnitude and direction. (Different quantities appearing in Fig. 2 are to be counted in reference to the following units:  $z$  and displacement in cm;  $m$  in  $\text{gr/cm}^2$ ;  $S$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  in  $\text{gr-wt/cm}^2$ .)