Zyungo YOSIDA 1973 Infiltration of Thaw Water into a Dry Snow Cover. *Low Temperature Science, Ser. A, 31.* (With English Summary p. 132)

乾き雪のなかへの融雪水の滲透*

吉 田 順 五
(北海道大学名誉教授)

(昭和 48 年 8 月受理)

I. まえがき

融雪期の積雪は，融雪水が積雪表面から絶えず下降滲透するため，全層が水を含んで湿っている。したがって，この不断の融雪水下降滲透は，湿り雪のなかでおこる「湿り雪内滲透」である。湿り雪内滲透は積雪の組織による流動抵抗によって妨害されるが，流動抵抗は下降融雪水に速度があるからこそ発生する。それで融雪水は，流動抵抗をうけながらも，最後には，地面まで下降する。しかし融雪期でもその初期には，夜間，冷気のために融雪が停止するだけでなく，積雪上層部に含まれた水が全部凍結してしまうことが珍しくない。すると，積雪上層部は，温度が 0°C 以下数度の水を含まない乾き雪の層にかわる。翌日，気温がのぼり日が照ると表面の融解が再開し，融雪水がこの乾き雪の層のなかへ下降滲透しようとする。この「乾き雪内滲透」は，さきに述べた湿り雪内滲透ほどにも自由でない。積雪組織による流動抵抗のほかに，乾き雪の低温による融雪水凍結の妨害が加わるからである。下降滲透するにつれて，0°C 以下の冷い乾き雪に触れるため，融雪水の一部または全部が凍結させられるからである。それで，融雪水の下降滲透が積雪上層部の乾き雪のなかで停止してしまうばかりか，凍結があまり強いため滲透の前面が上昇後退することさえ起りうる。

この論文は，以上のような乾き雪のなかへの融雪水の滲透に関する二三の理論的考察である。乾き雪内滲透の起りうるための条件や滲透速度およびその変化などを取扱う。

融雪水の乾き雪内滲透は融雪期の初期だけにみられる現象ではない。いろいろな場合におこりうる。たとえば，気温が 0°C 以下の日がつづく厳冬期でも，日射の強い日には，積雪本体は 0°C 以下の温度にたもたれつつも，積雪の表面は日射を吸収して融解する。そして，この融解した水は乾いた積雪本体のなかへ下降滲透する。

II. 滲透前面の移動速度

考察の対象とするのは，平らな地面につもった，水平方向には均質な乾いた積雪である。この積雪の表面から融雪水が下降滲透しはじめると，表面ちかくの乾き雪は水をふくんで，湿り雪の層にかわる。滲透が続くにつれ，湿り雪の層は次第に厚くなる。滲透が積雪表面のあらゆる場所から均等におこるとすれば，湿り雪の層の下面，すなわち湿り雪と未だ乾いたままの雪との境界面は水平である。この水平な境界面を「滲透前面」となづけよう。

* 北海道大学低温科学研究所業績 第 1264 号

積雪表面での融雪は長時間継続するのが普通である。それゆえ，滲透前面には，あとからあとからと絶え間なく融雪水が到着する。ただ，滲透前面に達するまでの融雪水の滲透は湿り雪内滲透である。滲透前面に到着して初めて，融雪水は温度の低い乾き雪に接し，その一部または全部が凍結する。したがって，乾き雪内滲透を湿り雪内滲透から差別するのは，滲透前面でおこる融雪水凍結に関係するいろいろな現象だけだといえる。この論文で考察するのは，融雪水の凍結と滲透前面の移動との関係である。

雪の性質も融雪水の滲透状態も水平方向には均一であると仮定したから，考察する滲透現象は鉛直方向におこる一次元問題として扱える。坐標 x を鉛直下向きにとると，滲透現象に関係するいろいろな量は，坐標 x と時間 t との関数として表わされる。次の表は，これらの量を示す記号である。

V 滲透前面の移動速度。V は滲透前面が下降前進するとき正に，上昇後退するとき負にとる。

L 水の凍結潜熱

θ 0°C を原点とした乾き雪の温度

G 乾き雪内の温度勾配 $\partial\theta/\partial x$ の滲透前面における値

μ 乾き雪の熱伝導度

k 乾き雪の温度伝導度

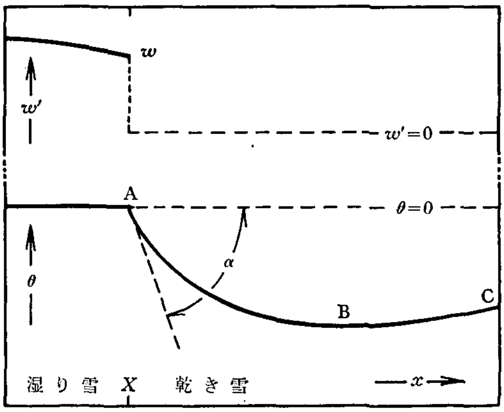
w 湿り雪の含水量(滲透前面より上にある湿り雪の単位体積に含まれる融雪水の質量)の滲透前面における値

v 融雪水の湿り雪内滲透速度の滲透前面における値

φ 滲透前面の単位面積に単位時間に上方から到達する融雪水の質量。$\varphi=vw$ である。湿り雪のなかの任意の場所での融雪水の滲透速度を v'，含水量を w'，融雪水の流量を φ' とすれば，$\varphi'=v'w'$ の関係がなりたつ。それゆえ，φ は φ' の滲透前面における値ということもできる。

湿り雪の温度は常に 0°C である。乾き雪の温度も滲透前面では 0°C と一致する。すなわち，滲透前面では $\theta=0$ である。しかし，滲透前面から離れたところでは，乾き雪の温度は 0°C より低く，θ は負の値をとる。それで，θ の分布は第1図の実線 ABC のような形で示される。よって G の値は常に負である。

これから先，水平断面が単位面積の鉛直柱の内部にある雪について考える。考察する融雪水の滲透は一次元現象だから，このようにしても一般性は失われない。



第1図 湿り雪の含水量 w' と乾き雪の温度 θ との分布図。坐標 X が滲透前面の位置を示す。湿り雪は坐標 X より左側の範囲に，乾き雪は右側の範囲にある。G は $-\tan\alpha$ にひとしい

(a) 滲透前面が停帯するための条件。すなわち $V=0$ であるための条件

まえがきで述べたように，乾き雪内滲透では，下降する融雪水の一部または全部が凍結する。それは，滲透前面を通して，滲透前面の下にある 0°C 以下の乾き雪によって，融雪水が熱を奪われるからである。

滲透前面が積雪表面下のある位置にあるとき，滲透前面に上から到達する融解水が全部凍結して 0°C の氷となるなら，滲透前面はその位置に停滞して移動しない。微小時間 $\mathrm{d}t$ の間に滲透前面に到達する融解水の質量は $\varphi\,\mathrm{d}t$ である。これが 0°C の氷に凍結するためには，$L\varphi\mathrm{d}t$ の熱が奪われる必要がある。乾き雪が，滲透前面を通して融雪水から $\mathrm{d}t$ の間に奪う熱量は $-\mu G\,\mathrm{d}t$ とひとしい。よって

$$L\varphi = -\mu G$$

が滲透前面が停滞するための条件となる。この式を満す φ の値を φ_0 と書けば

$$\varphi_0 = -\mu G/L \tag{1}$$

である。G の値は常に負だから，(1) 式の右辺の値は正である。

温度勾配 G の値が与えられているとき，融雪水が φ_0 より大きい流量で下降してくれば，凍結をまぬがれた融雪水が更に下降するため，滲透前面は下降前進する。流量が φ_0 より小さいばあいには，融雪水の全部が 0°C 以下の氷に凍結して，滲透前面は上昇後退する。

融雪水凍結潜熱の流入のため，また，乾き雪内の温度勾配による熱の移動のため，滲透前面附近にある乾き雪の温度は変化する。したがって，G は一定値を保ちえない。それで，流量 φ_0 が変化しないなら，(1) 式の条件が成立するとしても，それは一時的のことにすぎない。忽ち G の値が変って (1) 式の条件は破られ，滲透前面は前進あるいは後退をはじめる。しかし流量 φ_0 が G と歩調をあわせて変化し，(1) 式の条件が長時間持続することもありうる。このようなばあいには，滲透前面が停滞した位置に氷板が形成される。

ただし，上に述べたことにも例外がある。積雪の底の温度が 0°C 以下の一定温度に保持されることがあるなら，一定流量の融雪水で滲透前面が停滞することも不可能でない。停滞した滲透前面と地面との間にある乾き雪のなかの温度分布が定常になり，G が不変になりうるからである。日本の積雪の底は，地面と接して一定温度に保たれる。ただ，その一定温度が 0°C だから，このようなことは起りえない。しかし極地方では，積雪が 0°C 以下の温度の岩盤や氷盤の上にあることが稀ではない。岩や氷は熱容量と熱伝導度とが積雪よりも大きいから，岩盤や氷盤は，その表面に接する積雪の底を，長時間，0°C 以下の一定温度に保ちうるだろう。

このような例外はあるとしても，G は変化するのが普通である。変化には増大と減少とがある。それで，G が増大するばあいと減少するばあいとを区別するための判定条件を求めたい。あとの第 **IV** 節で，この判定条件を考える。

(b) 滲透前面の移動速度 V

$\varphi>\varphi_0$ であるために，時刻 t で坐標 x の位置にあった滲透前面が時刻 $t+\mathrm{d}t$ には坐標 $x+\mathrm{d}x$ の位置に前進したとしよう。$\mathrm{d}x>0$ である。この滲透前面の前進により，$\mathrm{d}x$ にあった乾き雪は湿り雪にかわる。時刻 t での滲透前面における湿り雪の含水量を w とすれば，$\mathrm{d}x$ にある

新たに湿った雪の含水量 w_1' は

$$w_1' = w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial w'}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right)$$

で表される。湿り雪内任意の場所の含水量 w' は，第1図に示したように，滲透前面でこそ不連続的に変化するが，滲透前面の背後では到るところ連続だからである。

一方，微小時間 $\mathrm{d}t$ のあいだに微小区間 $\mathrm{d}x$ には $\varphi\,\mathrm{d}t$ の融雪水が流入し，そのうち $-\mu G\,\mathrm{d}t/L$ だけの水が凍結する。よって，微小区間 $\mathrm{d}x$ に凍結しないで残る融雪水の量を $w_2'\,\mathrm{d}x$ で表すと，

$$w_2'\,\mathrm{d}x = \varphi\,\mathrm{d}t - (-\mu G\,\mathrm{d}t/L)$$

の関係がなりたつ。微小区間 $\mathrm{d}x$ 内で新たに湿った雪の含水量は，この残留融雪水の量を $\mathrm{d}x$ で割った

$$w_2' = [\varphi + (\mu G/L)]\,(\mathrm{d}t/\mathrm{d}x)$$

となる筈である。w_1' も w_2' も微小区間 $\mathrm{d}x$ にある同じ湿り雪の含水量だから，両者は等しくなければならない。このことと，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ が滲透前面の前進速度 V にほかならないこととから

$$V = \frac{1}{w}\left(\varphi + \frac{\mu G}{L}\right) \qquad (2)$$

$$= v + \frac{\mu}{wL}\,G \qquad (3)$$

の関係を導くことができる。その過程で，w_1' を表す式の右辺にあった無限小の第2項は消滅してしまい，結果である (2) 式および (3) 式には現れない。

$\varphi < \varphi_0$ で，滲透前面が上昇後退するときにも，V を負として (2) 式 (3) 式がなりたつ。坐標 x' を，坐標 x とは反対に，鉛直上方にとる。時刻 t に坐標 x' の位置にあった滲透前面が時刻 $t+\mathrm{d}t$ には坐標 $x'+\mathrm{d}x'$ の位置に後退したとしよう。$\mathrm{d}x'>0$ である。時刻 t には $w\,\mathrm{d}x'$ だけの融雪水が $\mathrm{d}x'$ にあった。微小時間 $\mathrm{d}t$ のあいだに $\varphi\,\mathrm{d}t$ の融雪水がそれに加わる。よって，

$$w\,\mathrm{d}x' + \varphi\,\mathrm{d}t = -\mu G\,\mathrm{d}t/L$$

の関係がなりたてば，$\mathrm{d}x'$ にあった湿り雪は乾き雪にかわり，滲透前面は $\mathrm{d}x'$ だけ後退する。$\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -V$ の関係を用いれば，上の式から (2) 式が導かれる。

$G<0$ だから $V<v$ である。$v-V = -(\mu/wL)\,G$ が，まえがきで述べた凍結による妨害にあたる。

次のように考えると，滲透前面の前進と後退とを区別せずに (3) 式に達することができる。仮に融雪水が下降しないで静止しているとしよう。つまり $v=0$ と仮定しよう。すると，滲透前面の下にある乾き雪が融雪水から熱を奪うから，滲透前面は上昇後退せざるをえない。微小時間 dt のあいだにおこる滲透前面上昇の距離が δ であるとすれば

$$Lw\delta = -\mu G\,\mathrm{d}t$$

の関係が成立する。これから滲透前面の上昇速度として

$$V' = \delta/\mathrm{d}t = -\mu G/wL$$

がえられる。ところで，実際の融雪水は速度 v で下降している。それゆえ，実際の滲透前面は

$$V = v - V'$$

なる速度で下降するはずである。この式の V' をその上の式の右辺でおきかえれば (3) 式となる。

(c) 滲透前面の移動速度 V と流量 φ との関係

さきに求めた滲透前面停滞の条件を与える (1) 式を使うと，(2) 式は

$$V = (\varphi - \varphi_0)/w \tag{4}$$

と書きかえられる。

融雪水の流量 φ が φ_0 より大きいか小さいかによって，滲透前面が前進あるいは後退することを (a) 項でのべた。このことを端的に (4) 式が表わしている。正の値の V は滲透前面の下降前進を，負の値の V は上昇後退を表わすが，(4) 式は正に，V の正負は φ が φ_0 より大きいか小さいかで定まることを示している。しかし，V の値そのものは，流量 φ からだけではきまらない。湿り雪の滲透前面における含水量 w が (4) 式に含まれているからである。つまり，V の値そのものを知るには，流量 φ をその構成因子である v と w とに分解して考える必要がある。

しかし，実は，V の値そのものも，結局は流量 φ によって定められると言えるのである。それは，湿り雪内の任意の場所での融雪水滲透速度，含水量，融雪水流量を v', w', φ' とすると，v' と w' とが互に独立ではないために，w' が φ' の関数となること，したがって w が φ の関数となることによる。含水量 w' の増大には滲透速度 v' の増大がともなう。それで，w' を v' の関数 $w'=f(v')$ として表わせば，$w'=f(\varphi'/w')$ の関係がなりたち，w' が φ' の値によって定められることになる。この関係が w と φ とについてもなりたつことは言うまでもない。しかし，今までのところ，関数 $w'=f(v')$ の形は実験的にも理論的にも求められていない。

(d) 土の凍結と乾き雪内滲透との類似

冬季，土地が表面から凍結するとき，凍結面の下にある未凍土のなかの水分は上昇して凍結面で凍結する。凍結面に滲透前面を，上昇する水分に下降滲透する融雪水を対応させると，土の凍結と融雪水の乾き雪内滲透とのあいだには多くの類似点がみいだされる。荒川は土の凍結現象を理論的に考察し，氷が土中に氷板として析出するための条件を「析出効率」(segregation efficiency) なる量を用いて規定した[1)]。析出効率 E は，凍結面に到達する水が凍結の際に排出する熱量と，凍土内伝導によって凍結面から上方に奪われる熱量との比である。融雪水の乾き雪内滲透現象で析出効率に対応する量を書くと

$$E = L\varphi/(-\mu G) = \varphi/\varphi_0$$

となる。たしがって，滲透前面の移動速度 V は

$$V = (\varphi_0/w)(E-1)$$

によって表わされる。滲透前面は $E=1$ のときに停滞し，$E>1$ のときは下降前進し，$E<1$ の

ときは上昇後退する。

(e) **融雪水の凍結による雪の密度の増大**

滲透前面は融雪水の一部を凍結させながら進むから，滲透前面が通過したあとにある湿り雪の乾き密度 ρ_d は，滲透前面通過以前にあった乾き雪の密度 ρ より大きい。微小時間 dt のあいだに滲透前面は $dx=V\,dt$ だけ進む。そのあいだに dx の微小区間に $-\mu G\,dt/L$ だけの氷が生ずる。よって

$$(\rho_d-\rho)\,dx = -\mu G\,dt/L$$

の関係がなりたち，これから

$$\rho_d-\rho = -\mu G/VL \tag{5}$$

がえられる。この密度増加は，(1) 式および (4) 式をつかって，さらに

$$\rho_d-\rho = \varphi_0/V = w\varphi_0/(\varphi-\varphi_0)$$

としても表わすことができる。滲透前面が停滞すれば，すなわち $V=0$ のときには，その位置に氷板が形成されると前にのべた。このことが (5) 式では，ρ_d が無限大になることで表現されている。

融雪水は滲透前面を追って，滲透前面の通過によって乾き密度が増大した湿り雪のなかを下降滲透する。それゆえ，滲透速度 v には，密度が ρ の初めの乾き雪についてのものではなく，乾き密度が ρ_d になった湿り雪についての値を用いなければならない。

III. 乾き雪内等速度滲透

前節の (**a**) 項でのべたのと同じ理由で，乾き雪内温度勾配の滲透前面における値 G は，滲透前面が停滞していなくても，時間とともに変るのが普通である。それで，滲透前面の移動速度 V は，(3) 式からわかるように，v と w とが一定であっても，滲透前面の進行につれて，一般に，増大したり減少したりする。しかし，長時間にわたって V が一定値に保たれる特別なばあいがある。この節では，このような乾き雪内等速度滲透の実例を考察する。

(**a**) **等速度滲透の実例**

融雪水が滲透する乾き雪は無限に深く，$x=\infty$ のところまで，均一に続いているとする。実際のばあいでも，はじめの乾き雪の層が厚く，滲透前面があまり深く浸入していないうちは，その乾き雪の層を無限に厚いとみなすことができる。

この乾き雪の温度 θ が，無限に深いところでは $\theta_\infty(<0)$ に近ずくとしよう。すると，V を常数として

$$\theta = \theta_\infty\left[1-\exp\left\{-\frac{V}{k}(x-Vt)\right\}\right] \tag{6}$$

なる温度分布が可能である。実際，(6) 式の θ は，乾き雪のなかで成りたつべき熱伝導微分方程式

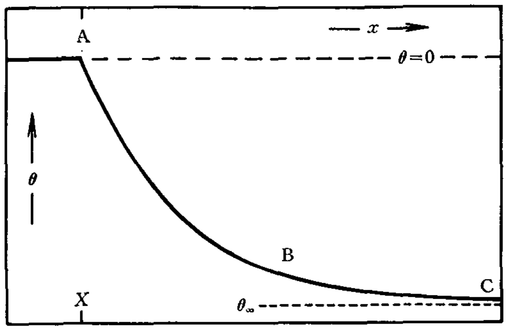
$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{7}$$

を満足する。ところで，この θ は速度 V で進行する温度の波を表している。さらに，$X=Vt$ とおくと，$x=X$ では $\theta=0$ である。したがって，$x=X$ での $\partial\theta/\partial x$ の値を前に求めた (3) 式の G に代入したばあい，その (3) 式を満足するような常数値の v と w とが見出されれば，$X=Vt$ は一定速度 V で前進する滲透前面の坐標を与えることになる。なぜならば，滲透前面で θ が満たすべき境界条件としては，$\theta=0$ の条件のほかに，(3) 式があるだけだからである。

$x=X$ での $\partial\theta/\partial x$ の値は $\theta_\infty V/k$ なる常数値である。これを (3) 式の G として用いると

$$V = v\Big/\left(1-\frac{\mu}{kwL}\theta_\infty\right) \tag{8}$$

の関係がえられる。ところで，この (8) 式を満たすような常数値の v と w とは，たしかに，存在しうる。かくして，無限に深い均一な乾き雪のなかへ滲透前面が不変な速度 V で前進するような融雪水の滲透のありうることが示された。ここで，v が融雪水の浸透速度であり，w が滲透前面の背後にある湿り雪の含水量であることは言うまでもない。



第2図 無限に深い均一な乾き雪のなかに等速度滲透がおこった場合の温度 θ の分布

以上のことは，また逆に，常数値の v と w とが始めに与えられていても，等速度滲透がおこりうること，そして，その場合の滲透前面の移動速度が (8) 式で定められることを示している。

無限遠点での θ の値 θ_∞ は負だから，(8) 式から判るように，V は必ず正である。よって，ある時刻の θ と x との関係を示す曲線は第2図の曲線 ABC の形になる。この曲線を形を変えずに一定速度 V で右の方へ動かせば θ と x, t との関係が表わされる。

(b) 滲透前面移動速度 V が一定に保たれるための条件

前項 (a) の等速度滲透では，v と w とが一定で，しかも V は正でいつまでも変らなかった。これは滲透前面での θ の勾配 G が一定値 $\theta_\infty V/k$ に保たれたからによる。さらに，G が一定値に保たれたのは，θ が (6) 式で表されるような特殊な分布をしていた為である。このことをもとにして，G が変化しない為に θ が満たすべき条件を探索してみよう。

それにしても，長時間にわたって G が不変に保たれる条件を見いだすことは困難である。つまり，θ は x と t との関数であるが，その関数形が G が不変であるために満たすべき条件は定めにくい。それで微小時間 dt のあいだに，つまり滲透前面が微小距離 $dx=V\,dt$ を進むあいだに，G に変化がおこらない為の条件を探すことにしよう。G が変化するとしても，その変化量は小さい。よって，それを dG で表わすと，$dG=0$ になるための条件を探すことになる。ところで，微小時間 dt のあいだには，滲透前面から距った場所の θ は G の変化に影響しない。影響するのは，滲透前面に極めて近い範囲内の θ の分布にかぎられる。いいかえれば，θ の x に関する低次微分係数の滲透前面での値によって dG の値はきめられる。一方，θ が (6) 式で表わされるばあいには，G が一定だから，あらゆる時刻において $dG=0$ である。それゆえ，

(6) 式の θ の滲透前面における低次微分係数のあいだに何か関係を見出すことができれば，その関係が $dG=0$ になるための条件になる可能性が強い。

乾き雪の温度 θ の滲透前面における x についての第一次偏微分係数は G である。おなじく滲透前面における x についての第二次偏微分係数を K で表わそう。すると，(6) 式の θ については

$$G=(\partial\theta/\partial x)_{x=Vt}=\theta_\infty(V/k),\qquad K=(\partial^2\theta/\partial x^2)_{x=Vt}=-\theta_\infty(V/k)^2$$

となる。それゆえ

$$B=K+(V/k)G \tag{9}$$

とおくと，前項 (**a**) の等速度滲透では，(6) 式で表される乾き雪内の温度 θ の分布について，$B=0$ の関係がなりたっていることになる。このことから，$V>0$ のばあいには，$B=0$ が $\mathrm{d}G=0$ であるための一般条件になっているのではないかと推測される。

次の第 **IV** 節で，$V>0$ の一般の乾き雪内滲透について，$B>0$ ならば $\mathrm{d}G>0$ となること，$B<0$ ならば $\mathrm{d}G<0$ となることが証明される。したがって，$V>0$ のばあい，一般に $B=0$ ならば $\mathrm{d}G=0$ になるという考えは推測に止まるわけではない。それは事実なのである。ただし，ある時刻に $B=0$ であることをもって，等速度滲透のための条件であるとすることはできない。ある時刻に $B=0$ であることは，その後の微小時間 $\mathrm{d}t$ のあいだに G が変わらないことを保証するだけである。有限な時間については保証しない。それゆえ，等速度滲透がおこるには，$B=0$ の条件が，ある時刻においてだけではなく，長時間にわたって継続的に成立することが必要である。それには，滲透前面から遠くはなれた場所の θ の分布も，たとえば (6) 式の θ のように，特別な形のものでなければならない。

(c) 滲透速度の実際の値

いままで，湿り雪のなかの任意の場所での融雪水の滲透速度を v' で，含水量を w' で表わしてきた。乾き雪のなかへ滲透する融雪水の滲透前面の移動速度 V に直接関係するのは，v' と w' との滲透前面での値 v と w とである。しかし，v' と v とのあいだ，また w' と w との間に大きな差異はないものと考えられる。

滲透前面が乾き雪のなかを一度通過すれば乾き雪は湿り雪にかわる。その湿り雪のなかを，あとからあとから，融雪水が流下滲透する。このように乾き雪内滲透は一過性であるにすぎないのに対し，湿り雪内滲透は継続的である。したがって滲透現象全体にとっては，湿り雪内滲透の方が乾き雪内滲透より遙かに重要である。それにも拘らず，今までのところ，湿り雪内浸透すらよくは研究されていない。ただ，若浜その他が，いろいろな方法を使って，特に積雪内部の含水率分布の時間的変化を克明に追跡して[3]，乾き雪内浸透も含む浸透現象を詳しく調べた例がある。第1表の v' の値は，若浜[2),3),4)]と藤野[5)]とによる実測値である。

融雪量が気温の高低や日射量の多寡などによって大幅にかわるから，v' の変化範囲は非常に広い。第1表に示したのは，ある場合における v' の値である。平均値とも代表値ともいえないが，それぞれの滲透形式および雪質のばあいについて，大きさの程度を示すものとは見てよいであろう。第1表の滲透形式の欄にある水路流下は，融雪水が積雪内の隙間をみたして流

第1表　融雪水の湿り雪内滲透速度 v' の値

滲透形式	水路流下		被膜流下	
雪質	しまり	ざらめ	しまり	ざらめ
v'	1.5 cm/sec	3 cm/sec	0.2 cm/min	1 cm/min

第2表　等速度滲透における θ_∞ と V/v との関係。乾き雪の密度が 0.45 g/cm^3，湿り雪の含水率が 15% のばあい

θ_∞, °C	0	-5	-10	-15	-20
V/v	1.00	0.83	0.71	0.62	0.55

下する滲透形式である。被膜流下では，積雪を構成する氷の粒子の表面をおおう薄い膜として融雪水が流下する[6)]。

一般に，融雪水が滲透しようとする乾き雪の温度が低いほど，滲透前面での融雪水の凍結は強い。したがって，滲透前面の移動速度 V は小さくなる。第2表は，(**a**) 項でのべた等速度滲透での θ_∞ と，V と v との比

$$V/v = 1\Big/\left(1-\frac{\mu}{kwL}\,\theta_\infty\right)$$

との関係を示す数値表である。比 V/v の数値の計算にあたり，含水量 w には 0.07 g/cm^3 の値を用いた。これは，例えば，密度 0.45 g/cm^3，含水率 15% の湿り雪の含水量である。乾き雪の熱伝導度 μ には，μ と乾き雪の密度 ρ との関係をあたえる $\log_{10}\mu=-4+2\rho$ の式[7)]で，ρ を 0.45 g/cm^3 とおいてえられる値 8×10^{-4} cal/cm·sec·deg を使った。乾き雪の温度伝導度 k は，この μ と ρ との値から 35×10^{-4} cm^2/sec と計算される。等速度ではない一般の乾き雪内滲透でも，乾き雪内の最低温度を θ_∞ とすれば，第2表に示されたのに近い関係がなりたっているであろう。

IV.　滲透前面移動の加速および減速

第 **III** 節の (**b**) 項でのべたこと，すなわち，$V>0$ のばあいには (9) 式の $B=K+(V/k)G$ の正負によって $\mathrm{d}G$ の正負がきまることを示すのが，この第 **IV** 節の目的である。K は $\partial^2\theta/\partial x^2$ の滲透前面での値である。この B と $\mathrm{d}G$ との関係から，B が正ならば滲透前面の移動は加速され，B が負ならば減速されると言えることになる。

(a)　仮定および利用する定理

ある時刻の滲透前面の位置を座標 x の原点にとり，時間 t の原点にはその時刻をあてる。時刻 0 から時刻 $\mathrm{d}t$ までに生ずる G の微小変化 $\mathrm{d}G$ に影響するのは $x=0$ の近傍の θ の分布だけである。それで，$t=0$ における θ の分布として，$x=0$ では $\theta=0$ だから，

$$\left.\begin{aligned}\theta(x,0) &= \theta_1(x,0)+\theta_2(x,0) = G_0x+(K_0/2)\,x^2\\ \theta_1(x,0) &= G_0x\,,\qquad \theta_2(x,0)=(K_0/2)\,x^2\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

を用いる。G_0 および K_0 は，$t=0$ での G および K の値を表わす。微小時間 $\mathrm{d}t$ のあいだに θ の

分布は (10) 式とは異なる分布に変る。dG はこの θ の分布の変化の結果として現われるものだから，dG と G_0, K_0 との間にはある関係が存在する。その関係が，この節のはじめに述べた B と dG との関係にほかならない。

数学的取扱いの便宜のため，乾き雪は $x=\infty$ まで続いていて，(10) 式が $x=\infty$ まで成立していると仮定する。原点 $x=0$ から距つた場所の温度は dG に影響しないから，乾き雪の限界をどこに置いても，原点から遠い所の温度分布をどのように設定しても差しつかえないわけである。上の仮定をおいたのは，固体熱伝導論の次のふたつの定理を利用するためである。

定理 A　$x>0$ の範囲にひろがる温度伝導度 k の半無限固体で，温度 θ に

境界条件として　　$x=0$　　では　　$\theta=0$

初期条件として　　$t=0$　　では　　$\theta=f(x)$

が課せられているならば，熱伝導微分方程式 $\partial\theta/\partial t=k(\partial^2\theta/\partial x^2)$ の解 $\theta(x,t)$ は

$$\sqrt{\pi}\ \theta(x,t)=\int_{-x/z}^{\infty}e^{-s^2}f(x+zs)\,ds-\int_{x/z}^{\infty}e^{-s^2}f(-x+zs)\,ds \tag{12}$$

で与えられる。ここに $z=2\sqrt{kt}$ である。

定理 B　おなじ半無限固体に

境界条件として　　$x=0$　　では　　$\theta=F(t)$

初期条件として　　$t=0$　　では　　$\theta=0$

が課せられているときの熱伝導微分方程式の解 $\theta(x,t)$ は

$$\sqrt{\pi}\ \theta(x,t)=\frac{x}{2k}\int_0^t F(s)(t-s)^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4k(t-s)}\right\}ds \tag{13}$$

で与えられる。

G に微小変化 dG をもたらす原因はふたつある。第一は，定常化傾向ともいうべき温度に固有な性質である。すなわち，境界条件が固定されていると，定常でない温度分布はその境界条件に適合した定常分布に近づこうとする。乾き雪内滲透についていえば，滲透前面が停止していても現われる θ の変化傾向である。この結果として生ずる dG を dG_a と書くことにしよう。第二の原因は境界移動である。ある境界条件で定常分布をとっている温度も，境界が移動すれば変化する。乾き雪内滲透での境界移動は滲透前面の移動である。この第二の原因で生ずる dG を dG_b とする。

(b)　温度の定常化傾向による G の変化 dG_a

滲透前面が停止しているとしたばあい G に生ずる変化が dG_a である。dG_a を求めるために，まず (12) 式の $f(x)$ に (10) 式の $\theta(x,0)$ を代入して，解 $\theta(x,t)$ を計算する。滲透前面では，すなわち $x=0$ では，常に $\theta=0$ だから，定理 A により，解 $\theta(x,t)$ は $t=0$ 以後の乾き雪内の温度を表すわけである。よって，この解を x について偏微分してえられる導関数の x を 0 とし t を dt としたものを $\partial\theta(0,dt)/\partial x$ と書くと，これが時刻 dt での G の値となる。時刻 0 での G の値は G_0 である。よって $dG_a=\partial\theta(0,dt)/dx-G_0$ として，dG_a が定められる。

しかし，以下の手続きをとつた方が dG_a を求めるのには簡潔である。式 (12) の $f(x)$ に (10) 式の $\theta_1(x,0)$ および $\theta_2(x,0)$ を用いたばあいの解を $\theta_1(x,t)$ および $\theta_2(x,t)$ とすれば

$\theta(x,t)=\theta_1(x,t)+\theta_2(x,t)$ である。ところで，実際に計算をおこなうと，$\theta_1(x,t)$ が $\theta_1(x,0)$ とおなじ G_0x であることが判る。つまり，$t=0$ での温度分布 $\theta_1(x,0)$ は時間がたっても変らない。したがって，$\theta(x,0)$ のうちの $\theta_1(x,0)$ は G に変化をもたらさない。これは $\theta_1(x,0)$ が定常温度分布だからである。$x=\infty$ に $\theta=-\infty$ の冷熱源があると，それに向って $\theta=0$ に保たれている原点 $x=0$ から定常的に熱が流れる。$\theta_1(x,0)=G_0x$ は，この定常な熱流にともなう定常温度分布である。

それゆえ $\mathrm{d}G_a$ の原因となるのは，$\theta_2(x,0)$ で与えられる初期温度分布だけである。$\partial^2\theta_2(x,0)/\partial x^2=K_0$ だから，熱伝導微分方程式 (7) によって $\partial\theta_2(x,0)/\partial t=kK_0\neq 0$ となる。つまり $\theta_2(x,0)$ は定常な温度分布ではない。かくして，時刻 $\mathrm{d}t$ での原点 $x=0$ における $\theta_2(x,t)$ の x についての第一次偏微分係数 $\partial\theta_2(0,\mathrm{d}t)/\partial x$ を $G_2(\mathrm{d}t)$ で，$\theta_2(x,0)$ の $x=0$ における x についての第一次微分係数 $\partial\theta_2(0,0)/\partial x$ を $G_2(0)$ で表わせば，$\mathrm{d}G_a$ は

$$\mathrm{d}G_a = G_2(\mathrm{d}t)-G_2(0)$$

で与えられることになる。

$f(x)$ を $\theta_2(x,0)=(K_0/2)\,x^2$ として (12) 式の積分をおこなうと

$$\theta_2(x,t) = (K_0/2\sqrt{\pi})\,g(x,t) \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} g(x,t) &= (x^2+2kt)\sqrt{\pi}\;\Phi(x/z)+xz\exp\{-(x/z)^2\} \\ z &= 2\sqrt{kt}\,, \qquad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2}\mathrm{d}s \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

がえられる。$g(x,t)$ は熱伝導微分方程式 (7) を満足する関数である。時刻 $\mathrm{d}t$ での $x=0$ における $g(x,t)$ の x についての第一次偏微分係数を

$$h(\mathrm{d}t) = \partial g(0,\mathrm{d}t)/\partial x \tag{16}$$

で表せば，$G_2(\mathrm{d}t)=(K_0/2\sqrt{\pi})\,h(\mathrm{d}t)$ と書ける。

一方，$G_2(0)$ は 0 である。よって

$$\mathrm{d}G_a = (K_0/2\sqrt{\pi})h(\mathrm{d}t) \tag{17}$$

なる関係がえられる。

$g(x,t)$ は，$z^2=4kt$ で割ると (x/z) だけの関数

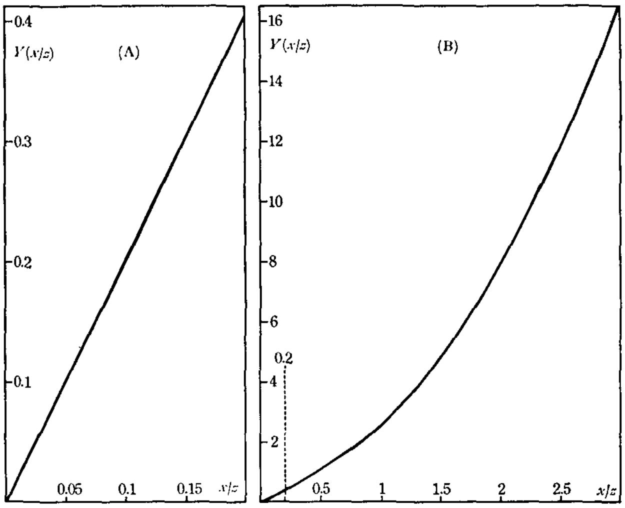
$$Y(x/z) = g(x,t)/z^2 = \sqrt{\pi}\;\{(1/2)+(x/z)^2\}\,\Phi(x/z)+(x/z)\exp\{-(x/z)^2\} \tag{18}$$

となる。$x/z\ll 1$ のばあいには

$$Y(x/z) = 2(x/z)+(2/3)(x/z)^3-(1/15)(x/z)^5 \tag{19}$$

とすることができる。$Y(x/z)$ と x/z との関係は第3図の曲線で表わされる。これから $\partial Y(x/z)/\partial x$ の $x=0$ における値が，0 でない t のすべての値に対して正であることが判る。$g(x,t)$ は $Y(x/z)$ に $4kt$ を乗じたものだから，$g(x,t)$ についても同じことが言える。つまり，$\partial g(x,t)/\partial x$ の $x=0$ および $t=\mathrm{d}t$ における値である $h(\mathrm{d}t)$ も正である。

式 (19) を利用すると，$x\ll 2\sqrt{k\mathrm{d}t}$ をみたす x について



第3図 $Y(x/z)=g(x,t)/z^2$ と x/z との関係。$z=2\sqrt{kt}$ である。k は乾き雪の温度伝導度

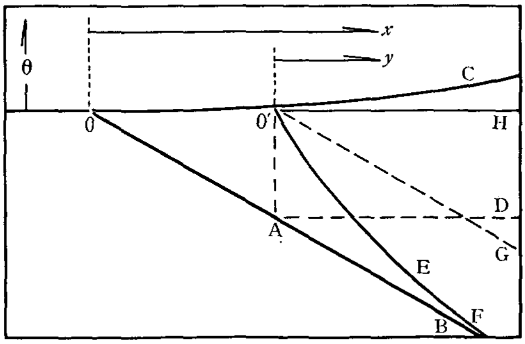
$$g(x, \mathrm{d}t) = 4\sqrt{k\mathrm{d}t}\cdot x \tag{20}$$

の関係が求められる。この関係式は，$h(\mathrm{d}t)$ が正であることのみならず，$h(\mathrm{d}t)$ が $\mathrm{d}t$ の増大にともなって増大することも示している。

(c) 停止滲透前面の前進後退開始条件

第 **II** 節の (**a**) 項で，融雪水の流量 φ が $\varphi_0=-\mu G/L$ に等しければ滲透前面が停止すること，また，一般にこの条件は一時的にしか成り立たず，滲透前面は停止したとしても直ちに下降前進または上昇後退をはじめることを述べた。それは，滲透前面が停止していても G が変るからであった。この G の変化は正に上にもとめた $\mathrm{d}G_a$ で与えられる。したがって，$\mathrm{d}t$ だけ時間がたてば G は $G'=G+\mathrm{d}G_a$ に変る。

ここで，$\varphi_0'=-\mu G'/L$ とし，流量 φ は一定値 $\varphi_0=-\mu G/L$ に保たれるとしよう。G は常に負だから，$\mathrm{d}G_a$ が正ならば $(-G)>(-G')$ である。よって $\varphi_0>\varphi_0'$ となり，$\mathrm{d}t$ だけ時間がたてば滲透前面は前進することになる。一方，(17) 式により，$h(\mathrm{d}t)$ は正だから，$\mathrm{d}G_a$ が正なのは K_0 が正のばあいであることが判る。つまり，滲透前面直前の乾き雪内の温度分布曲線が，第1図の曲線 ABC のように，上方に凹のばあいである。かくして，融雪水の流量 φ が一定のばあい，$K_0>0$ ならば，滲透前面は一時停止したとしても直ちに前進しはじめると言うこ



第4図 乾き雪の温度 θ の滲透前面近傍における分布。坐標 x と y との原点は O 点と O′ とにあり，その軸は共に水平直線 OO′H である。鉛直上方にとった θ の原点はこの水平直線上にある。O 点は滲透前面の時刻 0 での位置，O′ 点は時刻 $\mathrm{d}t$ での位置を示す。直線 OAB が $\theta_1(x,0)=G_0x$ を，曲線 OC が $\theta_2(x,0)=(K/2)x^2$ を，曲線 O′EF が $\theta_1(x,\mathrm{d}t)$ を表わす。

とができる。$K_0<0$ で滲透前面直前の温度分布曲線が上方に凸ならば，滲透前面は後退しはじめる。

(d) 滲透前面の移動による G の変化 dG_b

第4図の直線 OAB および曲線 OC は，$t=0$ での乾き雪内温度分布 $\theta(x, 0)$ のうちの $\theta_1(x, 0)=G_0x$ および $\theta_2(x, 0)=(K_0/2)x^2$ を表わす。$V>0$ とすると，$t=0$ で O 点にあった滲透前面は，微小時間 dt のあいだに $dx=V\,dt$ だけ進んで O′ 点にうつる。その結果 O′ 点は 0°C になる。すなわち O′ 点の θ は 0 になる。この滲透前面の微小な前進が原因となって生ずる G の変化が dG_b である。

曲線 OC は OO′ 間ではほとんど水平だから，滲透前面の前進で O′ 点が 0°C になることは，$\theta_2(x, 0)$ に影響をあたえない。それゆえ，$\theta_2(x, 0)$ が，滲透前面の移動を通じて dG_b を生ぜしめることはないと言える。その代り，$\theta_2(x, 0)$ は，定常温度分布ではないために，dG_a をもたらす原因となった。

これに反し，定常温度分布である $\theta_1(x, 0)$ は滲透前面の前進によって強く影響される。もし乾き雪の熱伝導度 μ が 0 であったなら，時刻 dt での θ の分布は第4図の屈曲線 O′AB になるだろう。θ は O′ 点で急激に変り，そこに無限大の温度勾配が現われる。しかし，実際の熱伝導度は有限だから，微小時間 dt の間にも熱の移動がおこり，時刻 dt での実際の温度分布 $\theta_1(x, dt)$ は連続曲線 O′EF で表わされるようになる。この $\theta_1(x, dt)$ の O′ 点での勾配，すなわち x についての微分係数 $G_1(dt)$ から，$\theta_1(x, 0)=G_0x$ の O 点での x についての微分係数 $G_1(0)=G_0$ を差引けば，dG_b がえられる。

滲透前面は乾き雪の，$\theta=0$ に保たれた境界である。この境界が速度 V で移動するとして熱伝導微分方程式をとき，その解 $\theta_1(x, t)$ で $t=dt$ とおけば $\theta_1(x, dt)$ がえられる。しかし，移動する境界についての解を求めることは一般にむづかしい。今のばあいもその例にもれない。それで，次のようにして，移動境界の条件を固定境界の条件におきかえる便法を用いる。

滲透前面が O 点から O′ 点に速度 V で進むあいだに，O′ 点の θ は A 点で示される値 $G_0V\,dt$ から上昇して，時刻 dt では 0 になる。この O′ 点での θ の変化が $F(t)$ で表わされるとしよう。一方，$t=0$ で，O′ 点を通る平面にそつて乾き雪を切断し，上方にある雪を除去したと想像する。そして，乾き雪の固定境界となったこの平面上の θ が $F(t)$ にしたがって変化するという境界条件を設定する。初期条件には，θ が第4図の直線 AB で表わされることを当てる。すると，この境界条件と初期条件とを満たす熱伝導微分方程式の解は $\theta_1(x, t)$ と一致する。こうして移動境界条件を固定境界条件に変更して解をうる方法を得たことになるが，ただ $F(t)$ の関数形が不明である。しかし，$F(t)$ は微小時間 dt 内での θ の変化を表わす関数だから

$$F(t) = G_0V\,dt - G_0Vt \tag{21}$$

とおいて差しつかえない。つまり，O′ 点の温度は一定速度 $-G_0V$ で上昇すると考えるわけである。式 (21) の $F(t)$ は，たしかに，$t=0$ では A 点で示される温度 $G_0V\,dt$ であり，$t=dt$ では 0 である。

この便法を使うために，O′ 点を原点とする坐標

$$y = x - V\,\mathrm{d}t$$

を用いる。第4図の直線ABで表わされる $t=0$ での温度分布 $\theta_1(y, 0)$ は

$$\theta_1(y, 0) = \theta_{11}(y, 0) + \theta_{12}(y, 0) + \theta_{13}(y, 0) \tag{22}$$

$$\theta_{11}(y, 0) = G_0 y, \qquad \theta_{12}(y, 0) = G_0 V\,\mathrm{d}t, \qquad \theta_{13}(y, 0) = 0 \tag{23}$$

とすることができる。式 (23) の3個の関数はいずれも定常温度分布で，それぞれ，第4図のABに平行な直線O′G，水平直線AD，水平直線O′Hで表わされる。この3個の関数のうちのどれかひとつを初期条件とし，θ が速度 $-G_0V$ で上昇することを $y=0$ での境界条件とするような熱伝導微分方程式の解をもとめる。この解に (23) 式の残りふたつの関数を加えれば，目的とした解，すなわち，初期条件としては (22) 式を，$y=0$ での境界条件としては (21) 式を満足する解 $\theta_1(y, t)$ がえられる。

初期条件として $\theta=0$ を前提とする (**a**) 項であげた定理Bを利用するために，(23) 式の3個の関数から $\theta_{13}(y, 0)=0$ を選ぶ。$F(t)=-G_0Vt$ とすれば，$y=0$ で θ が0から出発して速度 $-G_0V$ で上昇することが表わされる。それで，式 (13) の x を y に変え，$F(s)$ を $-G_0Vs$ として $\theta(y, t)$ を計算すれば，これが $\theta_{13}(y, 0)=0$ を初期条件とする解を与える。その解を $\theta_{13}(y, t)$ で表わすと

$$\theta_{13}(y, t) = (G_0V/2k)\,[\{g(y, t)/\sqrt{\pi}\} - (y^2 + 2kt)]$$

の結果となる。この式の $g(y, t)$ は (15) 式の $g(x, t)$ と同じ関数である。すなわち $g(x, t)$ の x を y におきかえた関数にほかならない。かくして，求めようとしていた解 $\theta_1(y, t)$ が $\theta_{11}(y, 0) + \theta_{12}(y, 0) + \theta_{13}(y, t)$ として与えられた。これから，第4図の曲線O′EFで表わされる温度のO′点での勾配 $G_1(\mathrm{d}t)$，すなわち $\partial\theta_1(y, t)/\partial y$ の $y=0$，$t=\mathrm{d}t$ における値が

$$G_1(\mathrm{d}t) = G_0 + (G_0V/2k\sqrt{\pi})\,h(\mathrm{d}t)$$

の形でえられる。$h(\mathrm{d}t)$ は (16) 式の $h(\mathrm{d}t)$ と同じで，$\partial g(y, t)/\partial y$ の $y=0$，$t=\mathrm{d}t$ における値である。一方，先に述べたとおり，$G_1(0)=G_0$ である。よって

$$\mathrm{d}G_b = G_1(\mathrm{d}t) - G_1(0) = (G_0V/2k\sqrt{\pi})\,h(\mathrm{d}t) \tag{24}$$

とすることができる。

(e) 滲透前面移動の加速および減速

ある時刻 t における滲透前面近傍での θ の分布は

$$\theta(x, t) = G(x - X) + (K/2)(x - X)^2 \tag{25}$$

で与えられる。X は滲透前面の坐標で，G および K は $\partial\theta(x, t)/\partial x$ および $\partial^2\theta(x, t)/\partial x^2$ の $x=X$ における値である。この節の (**b**) 項でえた (17) 式から，(25) 式の右辺第2項の温度分布が，微小時間 $\mathrm{d}t$ のあいだに，G に $\mathrm{d}G_a=(K/2\sqrt{\pi})\,h(\mathrm{d}t)$ の変化をもたらすことが知られる。また (**d**) 項でえた (24) 式は，(25) 式の右辺第1項の温度分布が滲透前面の移動によって変形するため，G が $\mathrm{d}G_b=(GV/2k\sqrt{\pi})\,h(\mathrm{d}t)$ だけ変化することを教える。したがって，(25) 式が表わす滲透前

面近傍の θ の分布全体によっては，$\mathrm{d}t$ のあいだに，G に

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}G_a + \mathrm{d}G_b = [K + (V/k)\,G]\,[h\,(\mathrm{d}t)/2\sqrt{\pi}\,] \tag{26}$$

の変化が生ずることになる。この (26) 式の右辺の第一の大括弧のなかの式は，第 **III** 節の (**b**) 項とこの節の冒頭とに書いた

$$B = K + (V/k)\,G \tag{9}$$

にほかならない。一方，この節の (**b**) 項の終りでのべたように，$h(\mathrm{d}t)$ は正である。よって，第 **III** 節の (**b**) 項で述べた通り，$V>0$ の乾き雪内滲透では，B が正ならば $\mathrm{d}G$ が正であり，B が負ならば $\mathrm{d}G$ が負であると言うことができる。

いま v と w とを一定とし，滲透前面移動速度の時刻 t での値を V で，時刻 $t+\mathrm{d}t$ での値を V' で表わす。また，時刻 $t+\mathrm{d}t$ における G の値 $G+\mathrm{d}G$ を G' としよう。すると (3) 式により

$$V = v - (-G)\,(\mu/wL)$$

$$V' = v - (-G')\,(\mu/wL)$$

と書くことができる。G は常に負だから，$\mathrm{d}G$ が正ならば $(-G')<(-G)$ である。したがって $V'>V$ となる。つまり $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=(V'-V)/\mathrm{d}t>0$ となる。逆に $\mathrm{d}G$ が負ならば $V'<V$ で $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t<0$ である。さらに，うえに証明したように $\mathrm{d}G$ の正負は B の正負と一致する。よって結論として「v と w とが一定でかつ $V>0$ のばあい，B が正ならば滲透前面の移動は加速され，B が負ならば減速される」ということができる。

停止した滲透前面，すなわち $V=0$ の滲透前面が，K の正負にしたがって前進後退しだすことを (**c**) 項で証明した。ところで $V=0$ ならば $B=K$ である。また停止した滲透前面の前進開始および後退開始は，それぞれ，滲透前面の加速および減速にほかならない。したがって，(**c**) 項の結果は上にえた結論のなかに含まれることになる。それで，上の結論の前提となっている「$V>$ のばあい」は「$V\geqq 0$ のばあい」と訂正される。

v と w とが一定でなく変化するばあいについては，明確な結論をだすことができない。ただ，v と w とが急速に変化することは稀であろう。それで，多くのばあい，v と w とは一定であると見なしても構わないことになろう。

V. まとめ

水平方向に均一な乾き雪のなかへ融雪水が均等に下降滲透するばあいについて，滲透前面の移動を理論的に考察した。坐標 x を鉛直下方にとる。滲透前面の下降速度を V で，滲透前面の下にある乾き雪の温度を θ で表わす。θ の原点は 0°C にとる。水の凍結潜熱を L，乾き雪の熱伝導度と温度伝導度とをそれぞれ μ と k とする。以下の記号は，すべて，記号につづいて説明されている量の滲透前面での値である。w：滲透前面の上にある湿り雪の含水量，v および φ：湿り雪のなかを流下滲透する融雪水の速度と流量。$\varphi=vw$ である。G：$\partial\theta/\partial x$。常に負である。$K$：$\partial^2\theta/\partial x^2$。

次にあげる結果がえられた。

(1) $V=[\varphi+(\mu G/L)]/w=v+(\mu/wL)G$ である。$G<0$ だから $V<v$ である。この式は, $V<0$ のばあい，すなわち滲透前面が上昇後退するばあいにもなりたつ。

(2) $B=K+(V/k)G$ とおく。B の次元は [温度/長さの二乗] である。一定の v と w とのもとで滲透前面が前進または停止している滲透では，つまり，v と w とが一定で $V\geqq 0$ の滲透では，$B>0$ ならば $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t>0$ で，$B<0$ ならば $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t<0$ である。すなわち，滲透前面の移動は，$B>0$ ならば加速され $B<0$ ならば減速される。

(3) $V=0$ とおくと $v=-(\mu/wL)G$ となる。これが滲透前面が停止するための条件である。停止が長びけば氷板が形成される。しかし，停止の継続には，さらに $K=0$ であることが必要である。$V=0$ のときは $B=K$ で，$K>0$ ならば停止した滲透前面も下降前進しはじめ，$K<0$ ならば上昇後退しはじめることになるからである。

(4) $x>0$ の範囲にひろがる半無限の均一な乾き雪のなかには，常に $B=0$ で，V が変化しない等速度滲透がおこりうる。そのばあいの V と θ とは $V=v/[1-(\mu\theta_\infty/kwL)]$ と $\theta=\theta_\infty[1-\exp\{-(x-Vt)V/k\}]$ とで与えられる。θ_∞ は $x=\infty$ における θ を表わす。$\theta_\infty<0$ だから V は必ず正である。v と w とは一定値を保つものとする。

文　献

1) Arakawa K. 1966 Theoretical studies of ice segregation in soil. *J. Glaciol.* **6**, 255–260.
2) 若浜五郎 1963 積雪内に於ける融雪水の移動 I. 低温科学, 物理篇, **21**, 45–74.
3) 若浜五郎・中村 勉・遠藤八十一 1968 積雪内における融雪水の移動 II. 低温科学, 物理篇, **26**, 53–76.
4) 若浜五郎 1968 積雪内における融雪水の移動 III. 低温科学, 物理篇, **26**, 77–86.
5) 藤野和夫 1968 積雪内部での融雪水の流下速度の測定 (I). 低温科学, 物理篇, **26**, 87–100.
6) 吉田順五 1965 融雪水の積雪内滲透. 低温科学, 物理篇, **23**, 1–16.
7) 吉田順五・岩井 裕 1950 積雪塊の熱伝導率の測定. 低温科学, **3**, 79–87.

Summary

When thaw water infiltrates into a dry snow cover with a temperature below 0°C, the snow cover turns out to be composed of two distinct layers: upper layer of wet snow and lower layer of dry snow. The thaw water flowing down within the wet snow layer pushes downwards the infiltration front, the surface separating the two layers, but the speed of its movement is less than that of the thaw water itself, because it freezes partly or completely when it comes into contact with the dry snow on reaching the infiltration front. The purpose of the present paper is to find theoretical formulae relating downward velocity V of the infiltration front with such quantities as listed below which must be closely connected to freezing of the thaw water. Coordinate x is taken vertically downwards.

L: latent heat of freezing of water.

θ: temperature of the dry snow with the origin at 0°C. $\theta<0$ except at the infiltration front where $\theta=0$.

μ and k: thermal conductivity and thermal diffusivity of the dry snow respectively.

G and K: respective values of $\partial\theta/\partial x$ and $\partial^2\theta/\partial x^2$ at the infiltration front, where $G<0$.

w: free water content of the wet snow, amount of the thaw water contained in a unit volume of the wet snow, at the infiltration front.

v: velocity of the thaw water arriving at the infiltration front.

φ: amount of the thaw water arriving in a unit time at a unit area of the infiltration front, where $\varphi = vw$.

Following results are obtained:

(1) If the thaw water reaching the infiltration front is completely frozen into ice of 0°C, the front stands still, that is, $V=0$. Let the value of φ for $V=0$ be denoted by φ_0. Then φ_0 is given by

$$\varphi_0 = -\mu G/L. \tag{1}$$

(2) If φ_0 is kept constant, relation (1) does not hold good for a long time with the result that the infiltration front starts to move, because the value of G changes due to heat conduction taking place within the dry snow. It is shown that the infiltration front starts proceeding downwards when $K>0$, while it starts receding upwards when $K<0$. Only when $K=0$, the infiltration front stands still for a long time.

(3) When $\varphi > \varphi_0$ and $\varphi < \varphi_0$, the infiltration front is advancing downwards and receding upwards respectively. In both cases the velocity of the infiltration front is given by

$$V = (\varphi - \varphi_0)/w = v + (\mu/wL)\,G, \tag{2}$$

V being counted negative for the receding front.

(4) In a homogeneous dry snow cover extending from $x=0$ to $x=\infty$, an infiltration of constant velocity is possible if v and w are kept constant. In this infiltration, θ and V are respectively given by

$$\theta = \theta_\infty [1 - \exp\{-(x-Vt)\,V/k\}] \text{ and } V = v/[1-(\mu\theta_\infty/kwL)]. \tag{3}$$

As θ_∞, the value of θ at $x=\infty$, is negative, V is always positive. Let a quantity B of the dimensions [temperature/square of length] as defined by

$$B = K + (V/k)\,G \tag{4}$$

be introduced. Then it is found that $B=0$ for this infiltration of $dV/dt=0$.

(5) For any infiltration of $V>0$ maintained by the thaw water of constant v and w, the following rules are found to be valid:

if $B>0$, $dV/dt>0$, that is, movement of the infiltration front is accelerated,

if $B<0$, $dV/dt<0$, that is, movement of the infiltration front is retarded.

The infiltration front modifies, as it proceeds, the temperature distribution within the dry snow. A change in G due to this modification is the cause of the above acceleration and retardation.

(6) As B becomes K when V vanshes, the statement of article (2) is included in the rules of the above article (5). Therefore, these rules hold true for infiltrations of $V \geqq 0$.