HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	凍上力についての理論的考察
Author(s)	吉田, 順五
Citation	低温科學. 物理篇, 31, 231-244
Issue Date	1973-03-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/18232
Type	bulletin (article)
File Information	31_p231-244.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Zyungo YOSIDA 1973 A Theoretical Study on the Heaving Force of Freezing Soil. *Low Temperature Science, Ser. A, 31.* (With English Summary p. 242)

凍上力についての理論的考察*

吉田順五
(北海道大学名誉教授)

(昭和48年9月受理)

I. まえがき

粘土分またシルト分の多い土は，凍結するとき，凍結の進行方向に膨脹しやすい。そのため，この種の土からなる土地は，しばしば凍上をおこす。しかし，この凍結膨脹も，強さが kg/cm^2 の単位で表される程度の力で土を圧縮しておけば，数%あるいは数十%も抑制される。木下と大野とは，凍結膨脹を100%抑止するのに必要な圧縮力を「凍上力」と名づけた[1]。いいかえれば，全然膨脹できないように完全に拘束されたまま凍結したばあい，その拘束を破ろうとして土が現わす応力が凍上力である。

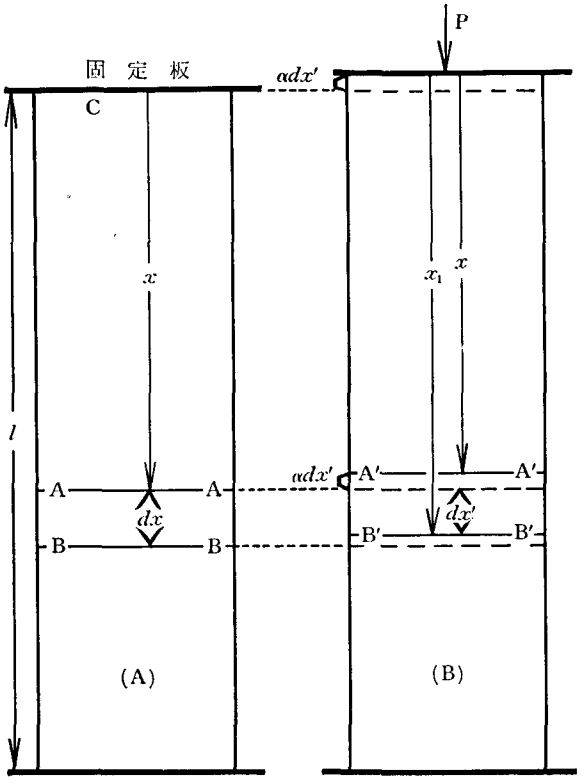
凍上力は，凍結が進行して凍結層の厚さが増大するにしたがって増大する。木下は，完全に拘束された，厚さ10 cmのいろいろな種類の土の層を低温実験室内におき，一方の面から凍結させて凍上力の増大経過をしらべた[2]。全層が凍結しおわったときの凍上力の強さは1～6 kg/cm^{2}であった。さらに木下は，凍上力の原因，すなわち上記の応力の原因を土の弾性におき，かつ，土には Maxwell 機構による応力緩和現象がおこるとして，凍上力の増大経過をあらわす数式を理論的に導いた。以下に述べるのは，この木下の理論の拡張である。

II. 凍土未凍土の歪微分方程式

第1図の(A)は，堅固な台のうえに置かれ，固定された板Cで凍結膨脹を完全に抑えられた厚さ l の土層内にある，単位断面積の土の柱である。柱の上面が0°C以下の温度に保たれ，凍結は上から下にむかって進む。時刻 t に，凍結面が図のAAの位置まですすみ，AAより上は凍土，下は未凍土になっているとする。このときの凍上力を P としよう。

凍土も未凍土も，上下方向に膨脹しようとしているから，圧縮歪の状態にある。凍土の圧縮歪を e_1 で，未凍土の圧縮歪を e_2 で表す。凍結深，つまり凍土の厚さ x と e_1, e_2 とを結ぶ歪微分方程式を求めるのがこの節の目的である。凍上力 P と歪 e_1, e_2 との間には，それぞれの土に特有な関係が存在する。よって，歪微分方程式の e_1 と e_2 とを凍上力 P におきかえることができる。ただ，この特有な関係には一般に時間 t が含まれるため，歪微分方程式は，t を独立変数とし，P と x とを従属変数とする微分方程式にかわる。しかし，凍結深 x は，そのときどきの外部条件で定められる t の既知関数である。それで結局，歪微分方程式を求めておけば，凍上力 P と時間 t との関係を与える凍上力微分方程式がえられることになる。

* 北海道大学低温科学研究所業績 第1270号



第1図 (A) 凍結膨脹を完全に抑止された単位断面積の土の柱。時刻 t に AA の位置にあった凍結面は，微小時間 dt のあいだに，BBの位置にすすむ。(B) 固定板 C を除去し，代りに凍上力 P にひとしい圧縮力を土の柱にかけたまま，凍結を進行させたばあいの凍結面の位置。B′B′ が時刻 $t+$ dt での凍結面の位置である。時刻 t に凍結面があった場所は dt のあいだに上昇して A′A′ の位置にうつる

一般に，厚さ D の未凍土層の全体が凍結膨脹して厚さ D' の凍土層になったとき

$$\alpha(P)=(D'-D)/D=(D'/D)-1 \qquad (1)$$

を「凍上率」という。凍上率 $\alpha(P)$ は，土層に加えられている圧縮力 P の関数である。[3] まえがきに述べたことから $\alpha(P)$ が P の増大とともに減少する正の数であることが判る。

微小時間 dt たった時刻 $t+$dt には，凍土の厚さが dx だけ増し，凍結面が第1図 (A) の AA の位置から BB の位置へ下っているとしよう。微小区間 dx にある微小土層は既に凍っているが，凍るまえは厚さが dx よりは薄い dx' の未凍土層であった筈である。この未凍土層は，凍上力にひとしい圧縮力 P をうけたままで d$x''=\{1+\alpha(P)\}$ dx' の厚さになるまで膨脹し，土の柱の上端面を持ちあげようとした。しかし，固定板 C がそれを阻止した。そのため，微小土層が厚さを dx'' より小さい値に抑えられたばかりか，微小土層の上下にある凍土も未凍土も，それまでより更に強く圧縮をうける結果となった。これが時刻 $t+$dt での土の柱の状態である。

ところでこの状態には次のようにしても到達することができる。まず固定板 C をとり外

し，その時の凍上力 P に等しい強さの圧縮力を生ずるような錘りを，土の柱の上端面のうえに置く。微小時間 $\mathrm{d}t$ のあいだ凍結を進行させる。すると微小土層は圧縮力 P をうけたままで凍結膨脹して柱の上端面を持ちあげる。その持ちあげられた上端面を，圧縮力を P より大きい適当な値に強めて，はじめの位置まで押し上げる。このときの土の柱の状態が，時刻 $t+\mathrm{d}t$ における土の柱の実際の状態と一致するわけである。そして，以上の操作によって起る凍結面の変位をたどると，次に示すように，$\mathrm{d}t$ と $\mathrm{d}e_1$, $\mathrm{d}e_2$ とを結ぶ歪微分方程式を見いだすことができる。$\mathrm{d}e_1$ と $\mathrm{d}e_2$ とは，それぞれ，凍土の圧縮歪 e_1 と未凍土の圧縮歪 e_2 との増加分である。結局，実際には同時に働く微小土層の膨脹作用と固定板の膨脹抑止作用との結果が，両作用が相前後して働くときに生ずる結果と同等であることを利用するわけである。両作用は微小土層が非常にうすいから微弱である。そしてこの同等性は，両作用が微弱である限り正しく成りたつ。

第1図の右側にある (B) 図が，固定板 C をとりのぞき，圧縮力 P をかけたままで凍結膨脹させた土の柱の時刻 $t+\mathrm{d}t$ での有様である。時刻 t に (A) 図の AA とおなじ位置にあった凍結面は，$\mathrm{d}t$ のあいだに $\mathrm{d}x'$ だけ進んで B′B′ の位置まで下った。それゆえ，時刻 t に AA と同じ高さの平面と B′B′ との間にあった未凍土層が，$\mathrm{d}t$ のあいだに凍結した微小土層である。B′B′ 以下の未凍土層には，それにかかる圧縮力が時刻 t での値 P を保っているから，なんらの変化も起らない。微小土層は凍結して $\mathrm{d}x''=\{1+\alpha(P)\}\,\mathrm{d}x'$ の厚さに膨脹し，その上面は A′A′ の位置まで，微小距離 $\alpha(P)\,\mathrm{d}x'$ だけ上昇する。A′A′ の上にある凍土は，B′B′ 以下の未凍土と同様，なんの変化もうけない。したがって，その厚さは時刻 t での凍土の厚さ x と変らず，土の柱の上端面は $\alpha(P)\,\mathrm{d}x'$ だけ上昇する。凍土全体は，A′A′ の上にある凍土に凍結した微小凍土を加えたものである。よって，時刻 $t+\mathrm{d}t$ における凍土全体の厚さは

$$x_1 = x+\mathrm{d}x'' = x+\Big\{1+\alpha(P)\Big\}\,\mathrm{d}x'$$

で与えられる。

圧縮力を P より大きくして，(B) 図の柱の上端面を (A) 図の柱の上端面の高さまで押しさげると，凍結面 B′B′ は (A) 図の BB の高さまでさがる。この上端面押しさげの操作によって，土の柱は時刻 $t+\mathrm{d}t$ での実際の状態に到達する筈だからである。時刻 t での凍結面であった A′A′ もさがるが，止まる位置は (A) 図の AA と一般に一致しない。つまり，時刻 t での凍結面に何か印をつけておいたとすれば，その印は $\mathrm{d}t$ のあいだに上か下かに少し移動する。それゆえ，(A) 図の AA と BB との間にある厚さ $\mathrm{d}x$ の土の層は，$\mathrm{d}t$ のあいだに新たに凍った微小土層と小部分で一致しない。先ほど，この両方の土層が同じものであるとも受取られる言葉使いをしたが，それは正確でなかった。

上述のことは，第1図 (B) の B′B′ より上にある厚さ x_1 の凍土が，土の柱の上端面押しさげ操作により，(A) 図の BB より上にある厚さ $x+\mathrm{d}x$ の凍土に圧縮されることを意味する。よって，時刻 $t+\mathrm{d}t$ での凍土は，時刻 t での凍土より $\mathrm{d}x$ だけ厚いだけでなく，圧縮歪 e_1 が

$$\mathrm{d}e_1 = \frac{x_1-(x+\mathrm{d}x)}{x} = \frac{\{1+\alpha(P)\}\,\mathrm{d}x'-\mathrm{d}x}{x} \qquad (2)$$

だけ大きいことになる。B′B′ より下にある未凍土は，土の柱の上端面押しさげ操作で，$\mathrm{d}x-\mathrm{d}x'$

だけ圧縮される。それゆえ，時刻 $t+\mathrm{d}t$ での未凍土は，時刻 t での未凍土より $\mathrm{d}x$ だけうすく，圧縮歪 e_2 が

$$\mathrm{d}e_2 = \frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}x'}{l-x} \tag{3}$$

だけ大きい。ただし，ここに言う圧縮歪 e_1, e_2 は圧縮の対数歪である。

式(2)と式(3)とから $\mathrm{d}x'$ を消去すると

$$x\,\mathrm{d}e_1+\left\{1+\alpha(P)\right\}(l-x)\,\mathrm{d}e_2 = \alpha(P)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

がえられる。この(4)式が，求めようとしていた，凍結面の微小な前進 $\mathrm{d}x$ と，それに伴う凍土，未凍土の圧縮歪の変化 $\mathrm{d}e_1$, $\mathrm{d}e_2$ との関連を与える歪微分方程式である。

III. 凍土未凍土を共に完全弾性体とみなしたばあいの凍上力

凍土も未凍土も完全弾性体であるとして，それぞれの弾性係数を E_1, E_2 で表わすと

$$\mathrm{d}P = E_1\,\mathrm{d}e_1 = E_2\,\mathrm{d}e_2 \tag{5}$$

の関係がなりたつ。$\mathrm{d}P$, $\mathrm{d}e_1$, $\mathrm{d}e_2$ は，それぞれ，凍結深が $\mathrm{d}x$ だけ増大する間に生じた，凍上力すなわち土の柱のなかの応力の増分，凍土の圧縮対数歪の増分，未凍土の圧縮対数歪の増分である。式(5)によって(4)式は，x を独立変数とする凍上力微分方程式

$$\left[(x/E_1)+\left\{1+\alpha(P)\right\}\left\{(l-x)/E_2\right\}\right](\mathrm{d}P/\mathrm{d}x) = \alpha(P) \tag{6}$$

に変換される。元来，独立変数は時間 t であって，凍結深 x は t の関数である。しかし，(5)式には t が含まれていない。つまり，完全弾性体では，応力の増分は歪の増分の値だけで定まり，歪の増分が生ずるのに要した時間の長さ $\mathrm{d}t$ には関係がない。一方，歪の増分は(4)式によって直接 $\mathrm{d}x$ と結ばれている。それで，凍土未凍土が完全弾性体のばあいには，t ではなく，x が独立変数として働き，凍上力 P は x の値だけできまることになる。いいかえれば，ある値の x に対する P の値は，x がその値に達するまでに辿った時間的経過とは無関係に，同一である。

実際の凍土未凍土には応力緩和現象が現われる。応力緩和現象を考慮すれば，独立変数は t となり，x が t の既知関数として知られていなければ，問題が解けないことになる。応力緩和現象のある場合は，次の第 **IV** 節で考察する。

式(6)は，次の(7)式で定義される無次元量

$$z = x/l, \qquad p = P/E_2, \qquad M = E_1/E_2 \tag{7}$$

を導入し，簡単のため $\alpha(E_2p)$ を単に α で表わすと

$$\left\{(1+\alpha)(1-z)+(z/M)\right\}(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z) = \alpha, \qquad \alpha = \alpha(E_2p) \tag{8}$$

と書きかえられる。

凍土および未凍土の機械的性質は，弾性成分と塑性成分とからなる。凍土未凍土を完全弾

性体とみなすのは，仮に塑性成分を無視することに他ならない。それゆえ E_1, E_2 は凍土未凍土の弾性成分の弾性係数と見るべきである。実測によると，E_1 は E_2 の 100 倍あるいはそれ以上にも大きく，M は 100 以上の値の大きい数となる。それで，z が 1 に近いばあいを除外すれば，(8) 式は，M を無限大にとって

$$(1+\alpha)(1-z)(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z)=\alpha \tag{9}$$

とすることができる。

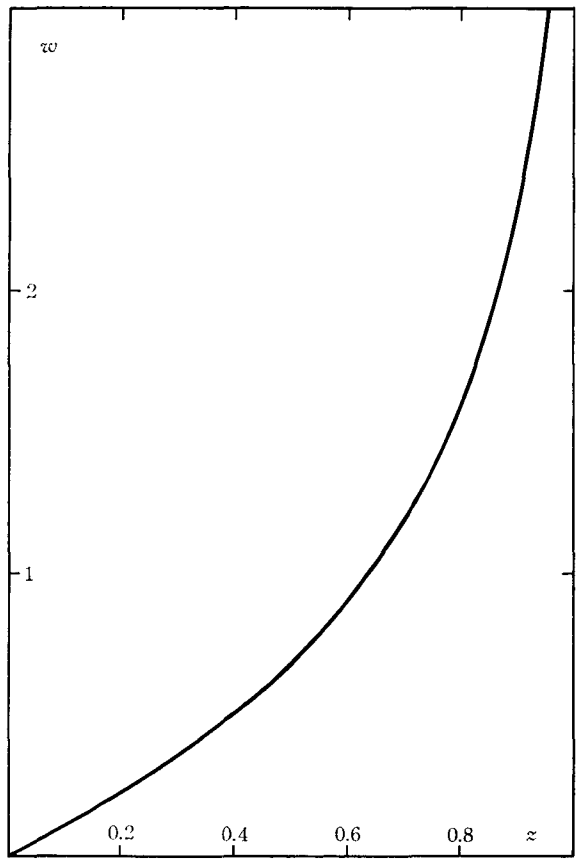
(a) 凍上率が常数のばあい

凍上率 $\alpha(P)$ は P によって変化するが，いま，その変化を無視し，凍上率が一定値 α_0 を保つとしよう。すると (8) 式は簡単に積分されて

$$p=-(\alpha_0 M/Q)\ln\left[1-\left\{Q/(Q+1)\right\}z\right],\qquad Q=(1+\alpha_0)M-1 \tag{10}$$

の解がえられる。初期条件としては，$z=0$ で $p=0$ であることを用いた。凍結開始のときは，x も p も共に 0 だからである。

先にのべたように，E_1 は E_2 の 100 倍あるいはそれ以上にも大きい。よって 1% 程度の誤



第 2 図　$w=-\ln(1-z)$ の曲線

差を許すことにすれば，E_2 に対して E_1 を無限に大きいと見なしてよいことになる。すなわち凍土は未凍土に比べたとき剛体と考えてよい。それで，1% の誤差は許すことにして $M=\infty$ とおくと，(10) 式は

$$p = -\left\{\alpha_0/(1+\alpha_0)\right\} \ln(1-z) \tag{11}$$

と書きなおされる。これは，また，α を α_0 とおいた (9) 式の解にほかならない。

実際の凍上率は凍上力の増大とともに減少する。多くのばあい，凍上力が小さいときは 0.1 ぐらいで，凍上力が大きくなると 0.01 あるいはそれ以下の値になる。よって，凍上率を常数 α_0 と考えるとしたら，α_0 の値は 0.02 か 0.03 あたりにとるのが適当であろう。すると，(11) 式の右辺の $\alpha_0/(1+\alpha_0)$ は，ただの α_0 で代用してよいことになる。

第 2 図は $w=-\ln(1-z)$ と z との関係を示す曲線である。これから，z が増大すると凍上力 P が増大し，その増大率が次第に高くなることがわかる。土の柱が全部凍結すると x は l と一致し，$z=x/l$ は 1 となる。ところが $z=1$ では $w=\infty$ である。よって，土の柱が凍結しおわったときの最終凍上力 P_f は無限大となることになり，物理的矛盾におちいる。しかしこれは，問題を簡単に考えるため，凍土を剛体とみなしたことの結果にすぎない。実際の最終凍上力 P_f は，(10) 式の z を 1 とおいてえられる有限値

$$P_f = \alpha_0 E_2 M \left\{\ln(Q+1)\right\}/Q \tag{12}$$

で与えられる。

(b) 熱応力と最終凍上力

熱膨張係数 β の物質で作った長さ l の柱の上下を膨張しないように抑えて温度をあげると，柱のなかに熱応力 P_t が発生する。P_t は，自由に熱膨張をおこなわせた柱を，拘束の長さ l に圧縮するのに要する圧力にひとしい。温度上昇量を T とすれば自由膨張量は βTl である。よって，自由膨張した柱を l の長さになるまで圧縮すると，柱は対数歪 $e=\ln(1+\beta T)$ をうけることになる。したがって，柱の弾性係数を E とすれば，熱応力は

$$P_t = Ee = E\ln(1+\beta T)$$

として表わされる。おなじ考えかたで完全拘束のもとに凍結する土の柱の最終凍上力を求めると

$$P'_f = E_1 \ln(1+\alpha_0)$$

となる。自由に凍結を完了させたときの膨張量は $\alpha_0 l$ だから βT には α_0 が対応するし，E には凍土の弾性係数 E_1 が対応するためである。E_1 は $E_2 M$ にひとしい。また，α_0 は 1 にくらべると非常に小さいから，$\ln(1+\alpha_0)$ の値は α_0 に近い。よって

$$P'_f = \alpha_0 E_2 M \tag{13}$$

とすることができる。

この (13) 式と (12) 式とから

$$P_f = q P'_f, \qquad q = \left\{\ln(Q+1)\right\}/Q$$

とおくことができる。Q は M とおなじ程度の大きな数だから，q は非常に小さい。Q を 100 とすれば q は 0.046 である。以上のことから，P'_f が実際の最終凍上力の値 P_f に比べて非常に大きいこと，したがって，最終凍上力を求めるのに熱応力を求める方法は利用できないことが判る。

完全拘束された実際の土の柱の凍結では，凍結が進むにつれて次第に大きくなる歪の大部分は未凍土が負担する。これは，未凍土が軟くて弾性係数が小さいからであるが，そのためにまた，凍上力の増大率は小さい値にとどまる。したがって最終凍上力は，あまり大きい値には達しない。これに反し，熱応力を求める方法を使うことは，最終歪の全部を硬い凍土に負担させることと同じである。そのため，最終凍上力が大きい値のものとして現われる。以上が，P_f と P'_f との間に大きい差異が生ずる理由である。

式(10)を z の冪級数

$$p = a_1 z + (a_2/2)\, z^2 + (a_3/6)\, z^3 + \cdots \tag{14}$$

に展開すると，z が 1 に比べて小さいばあいの近似式，すなわち凍結があまり進行していないうちの p を表わす近似式がえられる。係数 a_1, a_2, a_3, … は

$$A = \alpha_0/(1+\alpha_0), \qquad J = Q/(Q+1), \qquad Q = (1+\alpha_0)\, M - 1 \tag{15}$$

とおくと

$$a_1 = A, \qquad a_2 = AJ, \qquad a_3 = 2AJ^2, \qquad a_4 = 6AJ^3 \tag{16}$$

となる。A の値は α_0 に近く，J の値は 1 よりは小さいが殆ど 1 にひとしい。

(c) 凍上率が凍上力によって変るばあい (1)

前にのべたように，凍上率 $\alpha(P)$ は凍上力 P が増大すると減少する。それで $p_0 = P_0/E_2$ を常数として

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(P) = \alpha(E_2 p) = \alpha_0 \left\{1-(p/p_0)\right\} \\ &\alpha(P) = 0, \qquad P > P_0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

とおいてみよう。$\alpha(P)$ は $P=0$ のとき常数 α_0 にひとしく，P の増大にともなって直線的に減少し，P が P_0 をこえると 0 になる。

式(8)の α を $\alpha_0\{1-(p/p_0)\}$ としたものが，このばあいの凍上力微分方程式となるが，この微分方程式は線形でないために積分がむつかしい。それで p を(14)式の形の冪級数に展開して，1 にくらべて小さい値の z について成りたつ近似解を求めよう。それには，z が 1 にくらべて小さいのだから，凍上力微分方程式としては，(8)式ではなく，$M=\infty$ のときに使える(9)式

$$\left[1+\alpha_0\left\{1-(p/p_0)\right\}\right](1-z)\,(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z) = \alpha_0\left\{1-(p/p_0)\right\} \tag{18}$$

を用いればよい。

式(14)の形の p を(18)式に代入して係数を定めると，$A=\alpha_0/(1+\alpha_0)$ として

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = A, \qquad a_2 = A-(1/p_0)\, A^2(1-A) \\ &a_3 = 2A-3\,(1/p_0)\, A^2(1-A)+(1/p_0)^2\, A^2(1-A)(1-3A) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

がえられる。各係数の第1項は，$\alpha=\alpha_0$ とした (**a**) 項のばあいの係数，すなわち (16) 式とひとしい。$M=\infty$ とすれば $J=1$ となるからである。

第1係数の a_1 は (**a**) 項の a_1 とおなじだが，第2係数 a_2 は負の値の第2項があるため，(**a**) 項の a_2 よりは小さい。したがって，すくなくとも z が小さいうちは，いまのばあいの p は (**a**) 項のばあいの p よりも小さいと言える。しかし，このことは，z が小さいときに限らず，z が大きくなったときについても言えるにちがいない。それは，凍結の進行につれて凍上圧が高くなるとき，凍上率が減少すればするほど，凍上圧の上昇率が低下する筈だからである。

(d) 凍上率が凍上力によって変るばあい (2)

高志と益田とは，いろいろな大きさの力で圧縮しながら土の柱を凍結させて膨脹量をはかり，凍上率と凍上力との関係を表わす式

$$\alpha(P)=\alpha(E_2p)=\alpha_0+(p_0/p) \tag{20}$$

をえた[3]。α_0 および $p_0=P_0/E_2$ は常数である。凍上力 P の増大とともに凍上率 $\alpha(P)$ が減少することを示す式ではあるが，P が無限に大きくなっても，なお凍上率が有限値 α_0 であるという物理的矛盾を含んでいる。しかし，(20) 式は実験式だから，厳密な意味では，この式を定める実験で用いられた圧縮力の範囲内にある P の値についてのみ成立する。その範囲をこえる P については矛盾が生じても差つかえはない。また，無限に大きい凍上力が発生することも，事実としてはない。

式 (20) は，また P が0のときの $\alpha(P)$，すなわち $\alpha(0)$ が無限大になるという矛盾も含んでいる。実際の $\alpha(0)$ は0.2か0.3の値にとどまるが，この値でも凍上率としては非常に大きい値である。それで，(20) 式の $\alpha(0)$ が無限大であることは，P が0に近ずくと凍上率が非常に大きくなることの数学的表現と解釈される。ところで，この論文で進めている理論では，$\alpha(0)$ が実際に無限大であっても差つかえがおこらない。凍上力 P が0であるのは，凍結開始のとき，すなわち凍結深 x が0のときである。式 (4) で $x=0$，$\alpha(P)=\alpha(0)$ とおくと

$$l(\mathrm{d}e_2/\mathrm{d}x)=\alpha(0)/\left\{1+\alpha(0)\right\}$$

となる。よって，$\alpha(0)=\infty$ であっても，$\mathrm{d}e_2/\mathrm{d}x=1/l$ であり，$\mathrm{d}P/\mathrm{d}x=E_2(\mathrm{d}e_2/\mathrm{d}x)=E_2/l$ は有限値にとどまる。すなわち，凍上率が無限大である凍結開始のときにおいても，凍上力が無限に大きい速さで増大するという矛盾が生じない。

以上のことにより，(20) 式をそのまま (9) 式の α として用いると，今のばあいの凍上力微分方程式として

$$\left\{1+\alpha_0+(p_0/p)\right\}(1-z)(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z)=\alpha_0+(p_0/p) \tag{21}$$

をうる。この微分方程式の p を (14) 式の冪級数でおきかえ，係数を定めると

$$a_1=1,\ a_2=1-(1/p_0),\qquad a_3=2-(3/p_0)+\left\{(3+2\alpha_0)/p_0^2\right\} \tag{22}$$

がえられる。

IV. 凍土未凍土が共に Maxwell 型粘弾性体であるばあいの凍上力

凍結膨脹を抑止された土の柱のなかに凍上力として発生する応力は，時間がたつにつれ衰弱，すなわち，緩和してゆく。これは実験的に確かめられた事実である[1),2)]。土の柱全体にみられる応力緩和は，凍土と未凍土とのそれぞれに現われる応力緩和を合せたものにちがいない。一方，いろいろな種類の応力緩和のうちで，Maxwell 型粘弾性体が示す応力緩和が最も簡単で取扱いやすい。それで，凍土と未凍土とを，それぞれ，応力緩和に関係する物理常数の異る，ふたつの Maxwell 型粘弾性体と考えよう。すると，(4) 式の歪微分方程式は下の (24) 式の形に変えられる。

Maxwell 型粘弾性体は，弾性と粘性とを兼ねそなえた物体で，弾性係数 E のバネと粘性係数 Y の油緩衝器とを直列につないだ模型で代表することができる。この模型に圧縮力 P をかけたとき，バネに歪 e' が，油緩衝器に歪 e'' が生じたとすれば

$$P = Ee' = Y(\mathrm{d}e''/\mathrm{d}t)$$

の関係がなりたつ。模型全体の歪を e とすれば

$$e = e' + e''$$

である。この式を時間 t について微分したものと，すぐ上の式とを組合わせると

$$\mathrm{d}e/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}P/\mathrm{d}t)/E + (P/Y)$$

の関係がえられる。よって，凍土および未凍土の歪，弾性係数，粘性係数をそれぞれ e_1, E_1, Y_1 および e_2, E_2, Y_2 とすれば，凍上圧 P と歪 e_1, e_2 とは次の式

$$\mathrm{d}e_1/\mathrm{d}t = \left\{(\mathrm{d}P/\mathrm{d}t)/E_1\right\} + (P/Y_1), \qquad \mathrm{d}e_2/\mathrm{d}t = \left\{(\mathrm{d}P/\mathrm{d}t)/E_2\right\} + (P/Y_2) \tag{23}$$

によって結ばれることになる。

式 (4) に含まれている $\mathrm{d}e_1$, $\mathrm{d}e_2$, $\mathrm{d}x$ は，もともと $(\mathrm{d}e_1/\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t$, $(\mathrm{d}e_2/\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t$, $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t$ の意味である。それで，(4) 式は (23) 式を用いて

$$\left.\begin{aligned} x\left[\left\{(\mathrm{d}P/\mathrm{d}t)/E_1\right\} + (P/Y_1)\right] + \left\{1+\alpha(P)\right\}(l-x)\left[\left\{(\mathrm{d}P/\mathrm{d}t)/E_2\right\} + (P/Y_2)\right] \\ = \alpha(P)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

に書きかえられる。これが，凍土と未凍土とが共に Maxwell 型粘弾性体であるとき，凍土力 P と凍結深 x と時間 t とのあいだになりたつ凍上力微分方程式である。

凍上力 P と歪 e_1, e_2 との関係を表わす (23) 式には時間 t が含まれている。それで，第 **II** 節の初めにのべたように，(24) 式は時間 t を独立変数とし，P と x とを従属変数とする微分方程式となった。従属変数が 2 箇あるから，そのうちの一方が t の既知関数でなければ，(24) 式の解は求められない。そして，凍結深 x が，問題ごとに，t の既知関数として与えられる。

(a) 土の柱の上端面が 0°C 以下の一定温度に保たれるばあいの凍上力微分方程式

第 1 図の土の柱の上端面が 0°C 以下の一定温度 T_0°C に保持されて，凍結が進行するばあ

いを考えよう。ただし，凍結開始前の土の柱は，全体が 0°C すなわち $T=0$ の温度にあったとする。このときの凍結深 x は，凍結開始からはかり始める時刻 t の関数として

$$x = b\sqrt{t}, \qquad b = \sqrt{-2\mu T_0/L} \tag{25}$$

で与えられる。μ は凍土の熱伝導率であり，L は未凍土の単位体積が凍結するときに放出する潜熱である。

凍結深 x が (25) 式で与えられるばあいには，(24) 式を次の形に書きかえることができる。

$$\left.\begin{aligned} &R(y,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+S(y,p)\cdot p=\alpha \\ &R(y,p)=(1+\alpha)(1-y)+(y/M), \\ &S(y,p)=2y\left\{\frac{1+\alpha}{s_2}+\left(\frac{1}{Ms_1}+\frac{1+\alpha}{s_2}\right)y\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

この (26) 式で p, M は (7) 式で定義されたものと同じである。また，α は $\alpha(P)=\alpha(E_2p)$ の略号である。x/l を

$$y = x/l = b\sqrt{t}/l$$

で表わした。前の第 **III** 節のばあいには，x が時間的にどのような変りかたをしても，凍上力微分方程式 (8) はなりたった。これに反し，凍上力微分方程式 (26) がなりたつのは，x が $b\sqrt{t}$ にしたがって増大するときに限られる。このことを示すために，x/l を表わすのに前節で用いた z とは違う文字 y を使うわけである。

微分方程式 (26) では y が独立変数の役を受持ち，真の独立変数である時間 t は顕在していない。これもまた，x が $b\sqrt{t}$ で与えられることによって生じた特殊事情である。x が別の形の t の関数であったなら，凍上力微分方程式には t があらわに含まれることになるであろう。

凍土および未凍土の応力緩和時間は，それぞれ

$$\tau_1 = Y_1/E_1, \qquad \tau_2 = Y_2/E_2$$

で与えられる。また

$$\tau_0 = (l/b)^2$$

は，土の柱が全部凍結し終るのに要する時間にひとしい。式 (26) にある s_1 および s_2 は

$$s_1 = \tau_1/\tau_0, \qquad s_2 = \tau_2/\tau_0$$

を表わす。τ_1, τ_2 が τ_0 にくらべて非常に長ければ，すなわち応力の緩和が非常におそければ，s_1 と s_2 との値は非常に大きい。このようなばあいには，(26) 式の $S(y,p)$ は消失し，(26) 式は (8) 式とおなじ形になる。

(b) 前項 (a) のばあいの凍上力

凍土および未凍土の弾性係数の比 $M=E_1/E_2$ が 100 以上の大きい値であるところから，M を無限大とみなすと，(26) 式は

$$(1+\alpha)\left\{(1-y)(\mathrm{d}p/\mathrm{d}y)+(2y/s_2)(1+y)p\right\}=\alpha \tag{27}$$

と書かれる。p を y の冪級数

$$p = a_1 y + (a_2/2)\, y^2 + (a_3/6)\, y^3 + \cdots$$

として(27)式に代入し，係数 a_1, a_2, a_3 を定めると次のようになる。$A=\alpha_0/(1+\alpha_0)$ である。

(i) α が常数 α_0 であるばあい

$$a_1 = A, \qquad a_2 = A, \qquad a_3 = 2A\left\{1-(2/s_2)\right\}, \qquad a_4 = 6A\left\{1-(5/s_2)\right\} \tag{28}$$

(ii) $\alpha=\alpha_0\{1-(p/p_0)\}$ のばあい。α_0, p_0 は常数

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = A, \qquad a_2 = A-(1/p_0)\, A^2(1-A), \\ &a_3 = 2A-3(1/p_0)\, A^2(1-A)+(1/p_0)^2\, A^3(1-A)(1-3A)-4(A/s_2) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

(iii) $\alpha=\alpha_0+(p_0/p)$ のばあい。α_0, p_0 は常数

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1-(1/p_0), \qquad a_3 = 2-(3/p_0)+\left\{(3+2\alpha_0)/p_0^2\right\}-(4/s_2) \tag{30}$$

V. まとめ

凍結膨脹を完全に抑止した土の柱のなかに発生する凍上力の増大過程を理論的に考察した。まず，微小時間 $\mathrm{d}t$ のあいだに生ずる凍結深 x の微小な増加 $\mathrm{d}x$ と，それにともなって現われる凍土および未凍土の対数歪の変化 $\mathrm{d}e_1$ および $\mathrm{d}e_2$ との間になりたつ歪微分方程式(4)を導いた。それに利用したのは，微小時間 $\mathrm{d}t$ のあいだに新たに凍結する微小土層が凍上力 P の関数として与えられた凍上率 $\alpha(P)$ をもって膨脹することと，幾何学的関係とだけである。したがって，歪微分方程式(4)には一般性がある。特に土の性質が柱の方向に均一でないばあいにも用いることができる。凍土および未凍土の歪と，応力すなわち凍上力 P との間には，それぞれの土に特有な関係がある。また凍結深 x は，それぞれの場合について，時間 t の関数として与えられる。よって，歪と凍上力との間の関係と歪微分方程式とを組合わせれば，t を独立変数とし，P を従属変数とする凍上力微分方程式がえられる。

実際の凍土未凍土は弾塑性体である。しかし，簡単な例として，凍土未凍土を均一な完全弾性体とみなしたばあいと，均一な Maxwell 型粘弾性体とみなしたばあいとについて，凍上力微分方程式を解いた。ただし得た解は，凍結深 x が土の柱の高さに比べて小さい時にだけなりたつ近似解である。凍上率 $\alpha(P)$ には，α_0 と P_0 とを常数値として (1) $\alpha(P)=\alpha_0$, (2) $\alpha(P)=\alpha_0\{1-(P/P_0)\}$, (3) $\alpha(P)=\alpha_0+(P_0/P)$ の三種を用いた。

塑性ないし粘性によって凍上力が速く緩和するほど，また凍上率が凍上力の増大にともなって速かに減少するほど，凍上力の増大速度は小さい。実用上の多くの問題では，凍上力が小さいことが望ましい。凍上力の緩和現象は実験的に研究しやすいが，凍上率の測定には多大な手数と時間とがかかる。それに，凍結の進行につれ，未凍土が水を吸引するばかりか水を排出する場合もあることから見て[3),4)]，凍上率と凍上力との関係は簡単なものではないと考えられる。将来 $\alpha(P)$ の関数形が今あるより明かにされれば，実用問題での凍上力の理論的推定が一層確実に行われることになるであろう。

文 献

1) 木下誠一・大野武敏 1963 凍上力 I. 低温科学, 物理篇, **21**, 117-139.
2) 木下誠一 1972 凍上力実験. 低温科学, 物理篇, **30**, 191-201.
3) 高志 勤・益田 稔 1971 拘束圧下における土の凍上量と間隙水移動について. 雪氷, **33**, 109-119.
4) 福尾義昭・北岡豪一 1970 凍上量と温度分布・吸水量との関係について (第2報). 京都大学防災研究所年報, **13 A**, 557-564.

Summary

When a block of soil sandwiched between two solid plates firmly fixed at a distance is chilled at one of the plates, stress called 'heaving force' is generated within the block of soil, because soil has a nature to expand if frozen freely under no constraint. In this paper the author studies theoretically a mode of increases in a heaving force raised by gradual penetration of a freezing front into the block of soil.

The left figure (A) of Fig. 1 in the text shows a column with a unit sectional area cut out from the block of soil maintained at a constant thickness l. The column is frozen from the top surface downwards. At time t, the freezing front is positioned at AA at a distance x from the fixed solid plate C on the top; the soil lying above AA is frozen while the soil lying below AA is unforzen. The column tends to expand vertically with a heaving force P. In an infinitesimal time interval $\mathrm{d}t$ the freezing front advances by an infinitesimal distance $\mathrm{d}x$ to reach BB.

The right figure (B) of Fig. 1 is the same column from which the fixed plate C is imaginarily removed and which is instead laden with a weight weighing P. During $\mathrm{d}t$ the freezing front advances by an infinitesimal distance $\mathrm{d}x'$ from the level of AA to B′B′, that is, the thin layer of unfrozen soil which was between AA and B′B′ at time t is newly frozen during $\mathrm{d}t$. This newly frozen thin layer has a thickness equal to $\{1+\alpha(P)\}\,\mathrm{d}x'$, where $\alpha(P)$ is a function of P called 'coefficient of frost heave'. The value of $\alpha(P)$ decreases as P increases.

The expansion of the newly frozen layer lifts the freezing front at time t up to A′A′ positioned $\alpha(P)\,\mathrm{d}x'$ above the level of AA. At the same time the top of the imaginary column is also lifted by the same amount. Let a distance from the top to B′B′, the height of frozen soil at time $t+\mathrm{d}t$, be denoted by

$$x_1 = x+\left\{1+\alpha(P)\right\}\mathrm{d}x'.$$

Now the top of the imaginary column is pressed down to the original level, that is, the column is returned to the height which it had at time t. By this compression, B′B′ is lowered down to level BB in figure (A), because the lowered B′B′ must make the actual freezing front at time $t+\mathrm{d}t$. Plane A′A′ is also lowered, but its lowered position may or may not coincide with level AA. The height of frozen soil is decreased from x_1 to $x+\mathrm{d}x$. Therefore, if a logarithmic strain of the frozen soil is denoted by e_1, it is increased by

$$\mathrm{d}e_1 = \frac{x_1-(x+\mathrm{d}x)}{x} = \frac{\{1+\alpha(P)\}\,\mathrm{d}x'-\mathrm{d}x}{x}. \qquad [1]$$

It is seen from figure (B) that the unfrozen soil is compressed by the amount $dx-dx'$. Therefore, if a logarithmic strain of the unfrozen soil is denoted by e_2, it is increased by

$$de_2 = \frac{dx-dx'}{l-x}. \qquad [2]$$

Elimination of dx' from eqs. [1] and [2] gives the following 'strain differential equation':

$$x\,de_1+\left\{l+\alpha(P)\right\}(l-x)\,de_2 = \alpha(P)\,dx.$$

As e_1 and e_2 are connected to stress P by a relation particular to a given sort of soil and x is known as a function of time t particular to a given mode of freezing, the strain differential equation can be transformed into 'heaving force differential equation' relating heaving force P to time t. In the present paper the heaving force differential equation was solved for the following simple cases:

(I) Case in which both the frozen and unfrozen soils are perfectly elastic. If elastic constants of the frozen and unfrozen soils are denoted by E_1 and E_2 respectively, the heaving force differential equation can be written in the form

$$\left[\left\{1+\alpha(p)\right\}(1-z)+(z/M)\right](dp/dz) = \alpha(p),$$

with $z=x/l$, $p=P/E$ and $M=E_1/E_2$. In this case P is determined by the value of x independent of how x changes with time t. As M is greater than 100, term (z/M) may be omitted from the above equation when $z \ll 1$, that is, so far as the freezing front has not very far advanced into the block of soil. The solution was obtained in the form of

$$p = a_1 z+(a_2/2)\,z^2+(a_3/6)\,z^3$$

available for $z \ll 1$ and for the following three types of $\alpha(p)$:

$$\text{(A)}\quad \alpha(p) = \alpha_0 \qquad \text{(B)}\quad \alpha(p) = \alpha_0\left\{1-(p/p_0)\right\}$$
$$\text{(C)}\quad \alpha(p) = \alpha_0-(p_0/p),$$

α_0 and p_0 being constants. In the second line of the table below are shown the numbers of the formulae in the text which give the values of coefficients a_1, a_2 and a_3.

Type of $\alpha(p)$	(A)	(B)	(C)
a_1, a_2, a_3	(16)	(19)	(22)

(II) Case in which both the frozen and unfrozen soils are visco-elastic matters of the Maxwellian type. If constants of elasticity and viscosity are denoted by E_1, Y_1 and E_2, Y_2 for the frozen and unfrozen soils respectively, the strain differential equation is transformed into the heaving force differential equation as givin by eq. (24) in the text. As x needs to be known as a function of t for eq. (24) to be solved, x shall have the functional form

$$x = b\sqrt{t}. \qquad [3]$$

When the top surface of the block of soil is kept at a constant temperature below 0°C, the freezing front advances in accordance with relation [3]. By the use of this relation,

eq. (24) can be transformed into eq. (26) in the text. Letters appearing in eq. (26) represent the following dimensionless numbers:

$$\alpha = \alpha(p), \quad y = x/l = b\sqrt{t}/l, \quad p = P/E_2, \quad M = E_1/E_2,$$
$$(\tau_1 = Y_1/E_1, \quad \tau_2 = Y_2/E_2, \quad \tau_0 = l^2/b^2,) \quad s_1 = \tau_1/\tau_0, \quad s_2 = \tau_2/\tau_0.$$

Here τ_1 and τ_2 are the relaxation time of the frozen and unfrozen soils respectively, while τ_0 is the time needed for the block of soil to be completely frozen down to the bottom. Equation (26) from which the terms with M in denominator were omitted was solved in the form of

$$P = a_1 y + (a_2/2)\, y^2 + (a_3/6)\, y^3 .$$

The values of coefficients a_1, a_2 and a_3 are given in the table below after the same mode as used in the above case (I).

Type of $\alpha(p)$	(A)	(B)	(C)
a_1, a_2, a_3	(28)	(29)	(30)