Zyungo YOSIDA 1978 Theoretical Studies on Air Flow Within Snow, I. Equations of Motion. *Low Temperature Science, Ser. A, 36.* (With English Summary p. 24)

雪内空気の流動理論 I*

(雪内気流の運動方程式)

吉田順五
(北海道大学名誉教授)

(昭和53年9月受理)

I. まえがき

積雪の微視的構造は，さしわたしが 0.2 ないし 0.5 mm 程度の不定形の氷の粒が不規則に連結した，空隙の多い立体網目状の氷の骨組である。それゆえ，空隙をみたす雪内空気が流れて雪内気流が生ずるとすれば，その雪内気流は乱流とならざるをえない。空気は，氷の骨組の不規則な空隙をぬって，曲りくねりながら進むよりほかないからである。結局，この乱流は，流動の不安定に起因する自由空間での一般乱流とちがい，積雪を構成する氷の骨組の構造の不規則性のために生ずるといえる。それを表すため，筆者はこれに「構造乱流」の名をあたえた[1]。さらに筆者は，構造乱流である雪内気流の平均流速 u が x- 座標軸に平行で z- 座標軸の方向にのみ変化する二次元平行流では，z- 座標軸に直角な面に

$$\tau = \mu' u(\mathrm{d}u/\mathrm{d}z) \tag{1}$$

なる剪断レイノルズ応力 τ が生ずることを示した。μ' は氷の骨組の微視的構造と空気の性質とによって定まる常数である[1]。μ' を構造乱流粘性係数と名づける。

乱流の流速のうち，測定がたやすく実用価値があるのは，無秩序に変動する変動流速を差引いた残りの平均流速である。この論文の目的は，雪内気流の平均流速の分布が，上の二次元平行流のように特殊でなく，一般のばあいについて，平均流速で表された運動方程式を理論的に導くことである。つぎの第 II 節および第 III 節で理論構成に必要な仮定を設定し，第 IV 節と第 V 節とでは雪内気流の応力と平均流速との間の一般的関係をもとめる。式(1)は，それの特殊例にすぎない。ついで第 VI 節において，この一般的関係を利用して運動方程式に達する。

II. 雪内気流に関する仮定 (I)

1. 雪層の均一等方性

積雪は多くの雪層が積重なったものである。雪層のひとつひとつは，上部より下部の方が僅かながら密度が大きいけれども，ほぼ均一と見てよい。それで雪層は完全に均一であると仮定する。また雪層は，だいたい等方である。かなりな異方性を示すことも稀にはあるが[2),3)]，たいていのばあいその異方性は弱い。それで，雪層は完全に等方であると仮定する。もともと雪層を構成する氷の骨組は，微視的には均一でも等方でもない。それゆえ，雪層が均一等方で

* 北海道大学低温科学研究所業績　第 1945 号

あると仮定しても，それは巨視的・統計的意味においてである。

雪内気流の運動方程式は，雪層について，すなわち，均一等方な積雪について作る。それと並んで，雪層と雪層との境界において雪内気流がみたすべき層界条件を定めれば，運動方程式と層界条件とによって，積雪全体にわたる気流が決定される。しかし，層界条件の設定には困難が多い。それで，さしあたり，この論文につづく同名の論文IIとIIIとで，積雪表面での境界条件を考察する。積雪表面は，雪層境界の特殊なばあいと見ることができる。

積雪のなかに小さい面積δAの平面を考えると，その上に氷の骨組の断面が現われる。その断面の面積をδA_1とすれば，$\delta A_2=\delta A-\delta A_1$が氷の骨組の空隙の断面積となる。$\delta A_2/\delta A$を積雪の面空隙率という。雪層は等方だから，面空隙率の値は，平面δAの方向によって変らない。さらに，氷の骨組の形に規則性のないことから，面空隙率が体積空隙率に等しいことが証明される。小面積δAをふくむ小体積δVのなかにある積雪の空隙の体積をδV_2としたとき，$\delta V_2/\delta V$が体積空隙率をあたえる。普通，体積空隙率を単に空隙率という。この論文では空隙率をεで表わす。積雪でεが0.5を下まわることは余りない。新雪では0.9のあたりに，しまり雪では0.6～0.8の範囲内にある。

2. 構造乱流における平均操作

構造乱流でも，自由空間でおこる一般乱流でとおなじく，流速およびそれに関連する物理量を統計的に考える。ところで，自由空間の一般乱流の流速は，時間的にも空間的にも無秩序にかわる。それで，流速に関係する物理量のある点Pにおける平均値を求めるにあたって，時間的平均操作を用いても空間的平均操作を施しても，結果に差異が生じない。これに対し，構造乱流の流速の無秩序は空間的である。時間的無秩序は存在しない。特に，構造乱流を発生させる外力が時間的に変化しないと，流速は，空間的には無秩序に変りながらも，時間的に定常値をたもつ。

したがって，構造乱流の流速に関係する物理量の点Pにおける平均値としては，点Pの近傍についての空間的平均値をとらなければならない。近傍とは，点Pを中心とする物理的微小体積δVの内部を意味する。すなわち，この体積は微小ではあるけれども，氷の骨組を組立てる雪粒を多数ふくむ程度には大きい。前項のδA, δVも物理的微小面積，物理的微小体積であった。以下，用いる平均操作は，特にことわらない限り，すべて空間的とする。

3. 雪内空気の非圧縮性

よく知られているように，自由空間での気流についてなら，流速が音速にくらべ著しく小さいばあい，空気を非圧縮性とみてよい。すなわち，流動していても，空気の比容が変らないとみてよい。しかし，雪内空気については，そのように言えない。雪内気流に対する積雪の抵抗は大きい。そのため，流速が小さくても雪内空気に無視しえない程度の圧力勾配が現われ，雪内空気の比容にそれに応じた勾配が生じうるからである。

それにも拘らず，雪内空気を非圧縮性と仮定する。第一の理由は，この仮定をおかないと，理論が余りに煩瑣になり，数式が余りに複雑になることである。第二の理由は，この仮定をおいても，次の例が示すように，著しくは事実に反しないと予想されるからである。

高速なだれが通過したとき，付近の気圧が21 mbも瞬間的に降下した例がある[4)]。この断

熱気圧降下による空気の比容の増大は1.5% である。なだれの通路の両側の積雪内の空気も，積雪表面ちかくでは，比容がこの程度に増大したであろう。それにしても，このような異常な場合ですら，比容の変化は，上のように，さほど大きくない。よって，多くの場合，雪内空気を非圧縮性と仮定しても，実際と著しく食違うことはないと予想される。

4. 平 均 流

雪内気流の実際の流速，すなわち微視的流速をベクトル $\boldsymbol{v}$ で表す。任意の点Pの近傍で，氷の骨組の空隙の体積にわたって作った $\boldsymbol{v}$ の平均値を $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ とする。筆者は前に書いた論文で，$\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ を「空隙流速」と名づけた[5]。今の論文の第I節「まえがき」にある平均流速は，この空隙流速である。近傍の全体積にわたっての $\boldsymbol{v}$ の平均値 $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}'$ は，「濾過流速」あるいは「見かけの流速」と呼ばれる。$\boldsymbol{v}_\mathrm{a}'$ は $\varepsilon\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ にひとしい。

実際の流速と空隙流速との差

$$\delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_\mathrm{a} \quad (\text{存在領域は空隙}) \tag{2}$$

は，点Pの近傍のなかで無秩序に変動する流速である。これを「変動流速」と名づける。$\boldsymbol{v}$ が氷の骨組の空隙にしか存在しないから，$\delta\boldsymbol{v}$ の存在領域は空隙内に限られる。これに反し，$\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ は，氷の骨組の空隙のなかだけでなく，積雪が占める全空間のすべての点に存在する。点Pを氷の骨組の占める空間のなかにとっても，点Pの近傍に，平均操作を施すに足るべき充分に大きい空隙が存在するからである。それで，積雪が占める全空間のすべての点で流速 $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ をもつ気流を仮想し，これに平均流の名をつけよう。つまり，平均流は，積雪の占める空間から氷の骨組を消滅させた自由空間のなかを流れる仮想気流である。

しかし，上のように定義されたままの平均流では，氷の骨組の表面があった場所で，$\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ は連続であっても，$\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ の勾配，すなわち $\partial u/\partial x$ や $\partial v/\partial z$ などが不連続である。(u, v, w) は $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ の (x, y, z) 成分を表す。それで，すべての点で

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_\mathrm{a} = \partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z = 0 \tag{3}$$

が成立するように $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ の分布を平滑化して $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ の勾配の不連続を解消し，この平滑化された $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ で流れる気流を「平均流」とする。式(3)は，平均流として流れる空気が非圧縮性であることを示す連続方程式にほかならない。

5. 付随乱流と基本仮定

前項で定義した平均流に，その速度が(2)式の $\delta\boldsymbol{v}$ で与えられる変動流を重畳してえられる自由空間中の乱流を仮想する。構造乱流である実際の雪内気流に付随する自由空間の乱流という意味で，これに「付随乱流」の名をつけよう。$\delta\boldsymbol{v}$ は，氷の骨組が占める空間内では定義されていない。それで，上の重畳にあたっては，氷の骨組の占める空間内での $\delta\boldsymbol{v}$ の値は0とする。

自由空間での流体運動に関する流体力学ならびに乱流理論の結果を利用する目的で，自由空間の流動である付随乱流を仮想するわけである。その利用を有効にするため，付随乱流について得られる応力と空隙流速 $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ との関係が，そのままで，実際の雪内気流の応力と空隙流速 $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ との間の関係になるとの仮定をおく。これが，この論文の理論の基本仮定である。しかし，付随乱流の概念を使うのは，応力と $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ との関係を求める第IV節に限り，そのほかでは用いない。

III. 雪内気流に関する仮定 (II)

1. ストークス近似の利用

濾過流速が小さければ，多孔質内の流れはダルシー則にしたがい，その微視的流動は層流である。そして，濾過流速がダルシー則成立の限界をこえて増大しても尚，層流状態を保持し，濾過流速がこの限界での値の数十倍に達して初めて乱流にかわる[5)]。文献5のIの第III節第3項および第IV節第2, 3項にあげた事柄から，新雪のばあい，限界での濾過流速は5〜6 cm/sより小さくないと推定される。また，雪内気流の濾過流速が1 m/sを大幅にこえることはあるまい。よって，積雪内に実際に生じうる微視的流動は，常に層流状態にあると考えてよい。

したがって，雪内気流の実際の流速 $\boldsymbol{v}$ は，非圧縮粘性流体に関するナビエ・ストークスの運動方程式

$$\rho\partial\boldsymbol{v}/\partial t+\rho(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{v} = -\mathrm{grad}\,p+\mu\Delta\boldsymbol{v} \tag{4}$$

を満足する。p, ρ, μ はそれぞれ，積雪内空気の圧力，密度，粘性係数である。Δ は，ラプラス演算子を表す。ところで，ダルシー則が成立する程度に $\boldsymbol{v}$ が小さい場合には，(4)式を，慣性力を示すその左辺の第2項を無視し，ストークス近似の運動方程式

$$\rho\partial\boldsymbol{v}/\partial t = -\mathrm{grad}\,p+\mu\Delta\boldsymbol{v} \tag{4'}$$

に簡単化して取扱うことができる。

ストークス近似の方程式は線形である。そのことから，この近似式を使うと，第III節の終りまでに述べる，理論の組立てに用いると便利な，いくつかの簡単な結果が導かれる。もとより，その結果が成立つのは，$\boldsymbol{v}$ が非常に小さい場合に限られる。しかし，$\boldsymbol{v}$ が大きくなったとしても，かけ離れて大きくない時は，結果の内容がかなりの程度まで保存されるであろう。それで，この論文では，理論を簡潔にするため，$\boldsymbol{v}$ が大きくなって慣性流動が現れても，上記の簡単な結果がそのままの形で成立つと仮定する。

2. 比例規制

以下，前項で述べた仮定にあわせて，雪内空気の微視的流速 $\boldsymbol{v}$ に関してはストークス近似の運動方程式(4′)がなりたつとする。$\boldsymbol{v}$ は，また，非圧縮性流体の連続方程式

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \tag{5}$$

を満さなければならない。さらに $\boldsymbol{v}$ には，積雪を構成する氷の骨組の表面で

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{氷の骨組の表面上}) \tag{6}$$

の条件が課される。よって氷の骨組の表面上では $\delta\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ である。このことから，変動流速が平均流速にくらべて必ずしも小さくはなく，構造乱流が激しい乱流であることが知られる。

雪内気流をおこすには外力が必要である。いま，その外力がある様式にしたがって変化したときに，(6)式の境界条件をみたす(4′)式(5)式の解がえられたとしよう。その解を，p と(2)式を書きかえた

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\mathrm{a}+\delta\boldsymbol{v} \tag{2'}$$

とで表す。この場合をAの場合とよぶ。それに対して，外力が常にAの場合の外力の b 倍であるように変化する場合を，つまり外力がAの場合と相似に変化する場合を，Bの場合と名づける。すると，p および(2′)式を b 倍した

$$bp,\ b\boldsymbol{v} = b\boldsymbol{v}_{\rm a}+b\cdot\delta\boldsymbol{v} \tag{7}$$

がBの場合の圧力と流速とを与えることになる。それは，(4′)式も(5)式も共に斉一次微分方程式であること，また，氷の骨組の表面では $\boldsymbol{v}=0$ であるために，$b\boldsymbol{v}$ もまた(6)式の境界条件を満すことによる。

以上のことは，変動流速 $\delta\boldsymbol{v}$ が，その絶対値を平均流速 $\boldsymbol{v}_{\rm a}$ の絶対値 q に比例して変えるが，その方向は，$\boldsymbol{v}_{\rm a}$ の方向が定まっている限りは変えないことを示す。つまり，$\delta\boldsymbol{v}$ の (x,y,z) 成分の各々は，それぞれ $\boldsymbol{v}_{\rm a}$ の (x,y,z) 成分の斉一次式であり，$\boldsymbol{A}$ をテンソルとすると $\delta\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_{\rm a}$ によって表される。ただし，斉一次式の係数は，すなわち $\boldsymbol{A}$ の成分は，q をふくまない，(x,y,z,t) だけの関数で，その関数形は氷の骨組の形によって定められる。このことを簡単に，$\delta\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_{\rm a}$ に比例する，または，$\delta\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_{\rm a}$ によって「比例規制」されると言うことにしよう。

外力の働きかた，またその変化様式が変ると，$\boldsymbol{v}_{\rm a}$ が変り $\boldsymbol{A}$ にも差異が現われるであろう。しかし，その差異は小さいと予想される。それで $\boldsymbol{A}$ は，外力の働きかた，またその変化様式の如何に拘らず，氷の骨組が同一である限り，統計的には同一であると仮定する。

自由空間のなかの一般乱流では，変動流のない平滑な流れをそれに重畳すると，変動流はそのままで，平均流だけが変る。それゆえ，自由空間中の一般乱流の平均流と変動流とは互に独立に変化することができる。これに反し，構造乱流である雪内気流では，平滑な流れを重畳すると，氷の骨組が，重畳された平滑流を乱して，新たな変動流を発生させる。これが，構造乱流の $\boldsymbol{v}_{\rm a}$ と $\delta\boldsymbol{v}$ とが強い比例関係で結ばれる理由である。

3. 流線の形

雪層内の任意の一点Pの近傍の全体にわたって平均流の流速 $\boldsymbol{v}_{\rm a}$ は同一である。他方，変動流速 $\delta\boldsymbol{v}$ は近傍内で複雑にかわる。しかし，前項でのべたことにより，$\boldsymbol{v}_{\rm a}$ の方向さえ一定に保たれれば，近傍内の各点における $\delta\boldsymbol{v}$ の方向は，氷の骨組の形が同一である限り変らない。それ故，近傍内の気流の流線は，q が変っても，氷の骨組の形だけによって定められる同一の形に保持される。

さらに，流線の形についてのこの関係は，積雪内を流れる流体が空気でない場合についてまでも，拡張することができる。つまり，流線の形は，流体の種類とは無関係に，ただ氷の骨組の形によってのみ定まることになる。それを証明するには，前項で述べた $\boldsymbol{A}$ が，流体の種類によっては変らない，氷の骨組の形だけできまるテンソルであることを言えばよい。

流体を空気に限定しないで，その密度および粘性係数を ρ および μ とし，点Pの近傍でのこの流体の流動を相似則の立場からみることにしよう。平均流の流速 $\boldsymbol{v}_{\rm a}$ は近傍内で一定だから，その絶対値 q を流速の基準値に，また，氷の骨組を構成する雪粒の平均半径 r を長さの規準値にとる。すると，流体の流速 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{\rm a}+\delta\boldsymbol{v}$ は

$$\left.\begin{aligned} &x' = x/r,\ \ y' = x/r,\ \ z' = z/r,\ \ t' = tq/l \\ &R = \rho rq/\mu \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

としたとき

$$\boldsymbol{v}/q = \boldsymbol{v}'(x', y', z', t'\,;\, R) \tag{9}$$

として，無次元流速 $\boldsymbol{v}'$ を用いて表される。R はレイノルズ数である。

無次元平均流速は，近傍についてとった $\boldsymbol{v}'$ の平均値だから，$\boldsymbol{v}'_{\rm a}(t'\,;\,R)$ の関数形をとる。そして，$\boldsymbol{v}_{\rm a} = q\boldsymbol{v}'_{\rm a}(t'\,;\,R)$ である。よって，$\delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_{\rm a}$ の関係は，$\delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\rm a}$ だから

$$\boldsymbol{v}'(x', y', z', t'\,;\, R) - \boldsymbol{v}'_{\rm a}(t'\,;\,R) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}'_{\rm a}(t'\,;\,R) \tag{10}$$

と書くことができる。この形の式にかなうテンソル $\boldsymbol{A}$ は必ず x', y', z' を含むが，t' と R とは含んでもよいし含まなくてもよい。そして今の場合は R をふくまない。もし R をふくむと $\boldsymbol{A}$ は q によってその値を変えることになる。ところが，流体が空気である前項のばあいに，$\boldsymbol{A}$ は q によって変らなかった。そして(10)式は，前項のばあいにも成立しなければならないからである。

流動に関係する流体の性質は密度 ρ と粘性係数 μ とである。そのどちらも，レイノルズ数 R の因数としてのみ(10)式のなかにふくまれる。よって，$\boldsymbol{A}$ に R がふくまれなければ，$\boldsymbol{A}$ は ρ にも μ にも依存しない。かくして，先に述べたことが証明された。

テンソル $\boldsymbol{A}$ は (x, y, z, t) の関数である。しかし時間 t による変化は小さいと予想して無視しよう。すると，P 点の近傍内の流線の統形的形状は定常で，氷の骨組の構造が統計的に等方均一だから，$\boldsymbol{v}_{\rm a}$ の方向にもその絶対値 q にも，更に流体の種類にも関係しない。その形状を定めるのは氷の骨組の形だけである。点 P は雪層内のどこにとってもよいから，このことは雪層全体にわたって成立する。

4. 混 合 距 離

雪層内を流れる流体の流線は，氷の骨組の空隙を縫うから，不規則な波状曲線であるに違いない。その振幅の平均値を a_0 とすると，流速が小さい間は，前項でのべたことにより，q とは無関係に，a_0 はただ氷の骨組の形だけによって定まる。

しかし，$\boldsymbol{v}_{\rm a}$ が大きくなると，平均振幅は広くなるに違いない。$\boldsymbol{v}_{\rm a}$ の増大につれ，ストークス近似は破れ，空気の運動は慣性力を増して直進性に富むようになる。その結果，流線の曲率が減少するからである。これにともない，振幅が氷の骨組の形だけで定まるという事情は，次第に事実から外れる。しかし，第1項で述べた仮定により，$\boldsymbol{v}_{\rm a}$ の増大にも拘ず，この事情は保存されるとする。

自由空間における乱流の理論に導入された混合距離の概念が，構造乱流にも用いられると仮定しよう。混合距離 l は，空気の慣性運動によって，空気の平均運動量が運搬される距離である。よって l は，$\boldsymbol{v}_{\rm a}$ が大きい場合の流線の平均振幅にほぼひとしく，$\boldsymbol{v}_{\rm a}$ の増大とともに長さを増すであろう。しかし，理論の複雑化をさけるため，振幅の $\boldsymbol{v}_{\rm a}$ による変化を無視し，l は $\boldsymbol{v}_{\rm a}$ の大小に拘ず一定であるとする。したがって，l は，a_0 よりは長いにも拘ず，なお，氷の骨組の形だけで定る長さとなる。

5. 変動流速の等方性

積雪を構成する氷の骨組を，統計的に等方であると仮定した。よって，ある点 P の近傍に

おける，変動流速 $\delta\boldsymbol{v}$ の空間分布はもとより，それに関係する物理量の平均値も，点Pでの平均流速 $\boldsymbol{v}_a$ の方向を軸とする軸対称を示す筈である。たとえば $\delta\boldsymbol{v}$ の自乗平均については，$\boldsymbol{v}_a$ の方向を x 軸の方向とする坐標系をとり，$\delta\boldsymbol{v}$ の (x, y, z) 成分を δu, δv, δw で表せば

$$\overline{\delta u^2} \neq \overline{\delta v^2} = \overline{\delta w^2} \tag{11}$$

の関係がなりたつ。

しかし，ここで，$\delta\boldsymbol{v}$ の空間分布の対称性は更に高く，$\boldsymbol{v}_a$ の方向とは無関係な，P点を中心とする中心対称であると仮定する。これを変動流速の等方性の仮定と呼ぶ。この仮定をおくと，変動流速に関係する物理量はすべて等方性を示して $\boldsymbol{v}_a$ の方向には影響されず，(8)式は

$$\overline{\delta u^2} = \overline{\delta v^2} = \overline{\delta w^2}$$

に変る。したがって，$\delta\boldsymbol{v}$ の任意の方向の成分の自乗平均の平方根を $\sqrt{\overline{\delta u_1^2}}$ とすると，これは $\boldsymbol{v}_a$ の方向にもよらず，また自身の方向にも関係のない値をもつ。$\boldsymbol{v}_a$ が小さいなら，その値は，比例規制により，$\boldsymbol{v}_a$ の絶対値 q に比例する。よって

$$\sqrt{\overline{\delta u^2}} = \alpha q \tag{12}$$

とおくことができる。α は流体の性質には無縁な，氷の骨組の形だけで定まる数である。そして，第1項の仮定により，(12)式およびこの α の特性は，$\boldsymbol{v}_a$ が大きい場合にも，そのままに保たれる。

IV. 応力と平均流速との関係 (I)

1. 応力と歪速度とを表す記号

この節では，積雪の氷の骨組は存在しないものとし，もっぱら，第II節第5項で定義した付随乱流を考察の対象とする。付随乱流は自由空間内の乱流である。しかし，第II節で述べたように，一般乱流にはみられない，いろいろな特徴を示す。

よく知られているように，自由空間を運動する流体のなかの応力は，流体の歪の変化速度と一定の関係で結ばれる。その関係を付随乱流について定めるのが，この第IV節の目的である。歪の変化速度は流速の成分の座標微係数で表される。それゆえ，結局，応力と流速の成分との間の関係がえられることになる。用語簡潔のため，歪の変化速度は「歪速度」といわれる。

応力と歪速度とを表すのに，いろいろ異る記号が使われる。ここでは，直角座標 (x, y, z) に関する応力の成分を表す記号として，すなわち，対称2階テンソルである応力テンソルの成分を表す記号として

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{yz},\ \tau_{zx},\ \tau_{xy} \tag{13}$$

を用いる。

付随乱流のなかの任意の点Pで，x-軸に直角な物理的微小面 $\mathrm{d}S$ を仮想し，$\mathrm{d}S$ を通して，x の正の側にある空気が負の側にある空気に加える力を考える。この力は，付随乱流の変動流速 $\delta\boldsymbol{v}$ のため，$\mathrm{d}S$ 上の位置にしたがって複雑に変動する。それで，その平均 $\boldsymbol{f}_x$ を作る。$\boldsymbol{f}_x$ は，$\mathrm{d}S$ 上の各点に働く力の合力を $\mathrm{d}S$ で割ってえられる。このベクトル $\boldsymbol{f}_x$ の (x, y, z) 成分が(13)式

の σ_x, τ_{zx}, τ_{xy} である。式(13)の他の成分も，y-軸および z-軸に直角な微小面 dS に加わる平均力 $\boldsymbol{f}_y$, $\boldsymbol{f}_z$ を作って定めらられることができる。このように，(13)式で表される応力は付随乱流の微視的応力の平均である。それで，「平均応力」というべきではあるが，それを略して，単に「応力」と呼ぶ。

歪速度を表す対称2階テンソルの成分は

$$\dot{\varepsilon}_x,\ \dot{\varepsilon}_y,\ \dot{\varepsilon}_z,\ \dot{\gamma}_{yz},\ \dot{\gamma}_{zx},\ \dot{\gamma}_{xy} \tag{14}$$

で示す。これもまた，付随乱流の歪速度の成分のP点近傍での平均である。付随乱流の変動流速 $\delta\boldsymbol{v}$ が，P点近傍で平均すると0になることから

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{15}$$

になることがわかる。(u, v, w) は平均流の流速，すなわち空隙流速 $\boldsymbol{v}_a$ の (x, y, z) 成分である。結局，付随乱流の歪速度の平均は平均流の歪速度で表される。

平均流の非圧縮性連続方程式(3)から

$$\partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z = \dot{\varepsilon}_x+\dot{\varepsilon}_y+\dot{\varepsilon}_z = 0 \tag{3'}$$

の関係が導かれる。式(15)の歪速度成分は(3′)式の制約をうける。それ故(15)式は，物理的微小体積内の微小空気の，体積の変化を伴わない，純粋変形歪速度を表すことになる。

2. 応力の分解

応力の垂直成分 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は，第1項で述べた微小面 dS の正の側にある空気が負の側にある空気に加える平均力 $\boldsymbol{f}_x, \boldsymbol{f}_y, \boldsymbol{f}_z$ それぞれの x 成分，y 成分，z 成分である。よって $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は，プラスならば張力を，マイナスならば圧力を表す。しかるに空気中に張力は生じえない。それ故垂直応力成分は常にマイナスである。

応力の3個の垂直成分の和 $\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$ は，座標の変換には無関係な不変量である。いま

$$(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3 = -p \quad (p>0) \tag{16}$$

とおく。(x, y, z) 座標軸に平行な単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いて，各座標軸に直角な微小面 dS に働く平均力 $-p\mathbf{i}$, $-p\mathbf{j}$, $-p\mathbf{k}$ を考え，それを，付随乱流として動きつつある空気の「静水圧」と名づける。すると，教科書にあるとおり，第1項で述べた $\boldsymbol{f}_x, \boldsymbol{f}_y, \boldsymbol{f}_z$ のうち，この静水圧にあたる部分には，物理的微小体積中の微小空気を変形させる能力のないことが証明される。したがって，微小空気の変形の原因となる純粋変形応力は $\boldsymbol{f}_x, \boldsymbol{f}_y, \boldsymbol{f}_z$ から静水圧を引き去った

$$\boldsymbol{s}_x = \boldsymbol{f}_x+p\mathbf{i},\quad \boldsymbol{s}_y = \boldsymbol{f}_y+p\mathbf{j},\quad \boldsymbol{s}_z = \boldsymbol{f}_z+p\mathbf{k} \tag{17}$$

となる。$(\boldsymbol{s}_x, \boldsymbol{s}_y, \boldsymbol{s}_z)$ は対称2階テンソルで，「応力偏差」とよばれる。その (x, y, z) 成分は

$$\sigma_x+p,\ \sigma_y+p,\ \sigma_z+p,\ \tau_{yz},\ \tau_{zx},\ \tau_{xy} \tag{18}$$

である。

純粋変形応力である応力偏差が，更にふたつの部分にわけられる，座標軸に直角な微小面

dS に純粋変形応力が加えられる機構に，空気の分子の粘性による運動量の伝達と，付随乱流の変動流速 $\delta\boldsymbol{v}$ による運動量の運搬とのふたつがあるからである。第1の機構による粘性応力を $(\boldsymbol{s}_x', \boldsymbol{s}_y', \boldsymbol{s}_z')$ で，第2の機構によるレイノルズ応力を $(\boldsymbol{s}_x'', \boldsymbol{s}_y'', \boldsymbol{s}_z'')$ で表すと，応力偏差 $\boldsymbol{s}$ は

$$\boldsymbol{s}_x = \boldsymbol{s}_x' + \boldsymbol{s}_x'',\quad \boldsymbol{s}_y = \boldsymbol{s}_y' + \boldsymbol{s}_y'',\quad \boldsymbol{s}_z = \boldsymbol{s}_z' + \boldsymbol{s}_z'' \tag{19}$$

と書かれる。

式(15)の純粋変形歪速度とは，全応力のうちの純粋変形応力である粘性応力とレイノルズ応力とが関係をもつ。その関係を次の第V節で定める。

V. 応力と平均流速との関係 (II)

1. 応力の主値と歪速度の主値との関係 (1)

粘性流体力学の教科書では，応力を歪速度で表す式を導くのに，しばしば応力テンソルの主値と歪速度の主値との間に簡単な関係を設定して出発する。以下，この方法にならう。

付随乱流のなかの一点Pに或る応力が存在するとしよう。もしその応力の発生機構が，P点での平均流の流速 $\boldsymbol{v}_a$ の方向によって影響されると，その応力と歪速度との間に存在する関係は対称性が低い。影響されなければ対称性が高い。

いま，P点での応力をテンソル $\boldsymbol{H}$ で示し，この応力 $\boldsymbol{H}$ の発生機構が，$\boldsymbol{v}_a$ の絶対値 q には影響されるが方向には影響されないとしよう。すると，応力 $\boldsymbol{H}$ と歪速度との関係の高い対称性のため，両者の3個の主軸の方向は，それぞれ互に一致する。更にこの高い対称性は，応力 $\boldsymbol{H}$ の主値 (h_1, h_2, h_3) と歪速度の主値 $(\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3)$ との間に

$$h_1 = A\dot{\varepsilon}_1 + B(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2),\quad * * * \tag{20}$$

の関係を成立させる。1, 2, 3は応力と歪速度との共通主軸を示す指標である。3個の星印は，主軸2と3とについても同様な式が成立することを表す。係数 A, B は応力発生機構によって定められる。その機構が $\boldsymbol{v}_a$ の方向には影響されないから，A も B も q だけの関数である。

非圧縮性連続方程式(3′)の主軸表現は $\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0$ である。この関係により，(20)式は

$$h_1 = C\dot{\varepsilon}_1,\quad * * *;\quad C = A - B \tag{21}$$

に書きかえられる。

式(19)の右辺第1項を形成する粘性応力の主値を s_1', s_2', s_3' としよう。粘性応力は点Pにおける微小面 dS を通しての，空気分子の熱運動による運動量交換のために生ずる。したがって，粘性応力の発生機構は点Pにおける $\boldsymbol{v}_a$ の方向とも絶対値とも関係を持たない。よって，粘性応力を(21)式の応力 (h_1, h_2, h_3) として採ることができるし，(21)式の係数 C は空気の性質だけで定められる常数となる。そして，教科書にあるように，空気の粘性係数を μ とすると $C=2\mu$ であることが証明される。すなわち

$$s_1' = 2\mu\dot{\varepsilon}_1,\quad * * * \tag{22}$$

の関係がえられる。レイノルズ応力と歪速度との関係式は次の第2項で求める。

2. 応力の主値と歪速度の主値との関係 (2)

レイノルズ応力は，点Pにおける微小面 dS を通して，付随乱流の変動流速 $\delta \boldsymbol{v}$ が運搬する運動量によって発生する。ところで，第III節第5項で，$\delta \boldsymbol{v}$ の統計的分布は等方で付随流の平均流速 $\boldsymbol{v}_a$ の方向には依存しないと仮定した。よって，レイノルズ応力の発生機構は $\boldsymbol{v}_a$ の方向からは影響をこうむらない。すなわち，レイノルズ応力を (21) 式の応力 (h_1, h_2, h_3) と考えることができる。係数 C は $\boldsymbol{v}_a$ の絶対値 q の関数である。その関数を表す式は，次のように，一般乱流の混合距離理論を使って定めることができる。

レイノルズ応力の主軸1の方向の $\boldsymbol{v}_a$, $\delta \boldsymbol{v}$ の成分を u_1, δu_1 とする。また，主軸1の方向に座標 x_1 をとり，レイノルズ応力の主値を s_1'' としよう。すると s_1'' は，混合距離理論により，空気の密度を ρ，混合距離を l として

$$s_1'' = \rho l(\partial u_1/\partial x_1)\sqrt{\overline{\partial u_1^2}} \tag{23}$$

で与えられる。$\partial u_1/\partial x_1$ は $\dot{\varepsilon}_1$ にほかならない。よって，(12) 式を用いると (23) 式は

$$s_1'' = 2\mu' q\,\dot{\varepsilon}_1,\quad \mu' = \rho(\alpha l/2) \tag{24}$$

に書きなおされる。残りの主軸方向 2, 3 についても同形の式が得られる。すなわち $C=2\,\mu' q$ である。まえがきでも述べたように，μ' を「構造乱流粘性係数」と名づける。l も α も常数で，その値は，第III節第4項第5項で仮定した通り，流体の種類には関りなく，ただ氷の骨組の構造だけで定められる。よって μ' は流体の密度 ρ に比例する。

この節の第2項で述べたように，粘性応力とレイノルズ応力との和，すなわち (22) 式と (24) 式との和が応力偏差にひとしい。よって，付随乱流内の任意の点Pにおいて，雪内空気の応力の主値 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を雪内空気の歪速度の主値 $(\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3)$ で表す式として

$$\sigma_1 = -p+2(\mu+\mu' q)\,\dot{\varepsilon}_1,\quad \sigma_2 = -p+2(\mu+\mu' q)\,\dot{\varepsilon}_2,\quad \sigma_3 = -p+2(\mu+\mu' q)\,\dot{\varepsilon}_3 \tag{25}$$

を得る。

3. 空間坐標で表した応力と歪速度との関係

応力と歪速度との共通主軸 (1, 2, 3) はP点の位置によって方向が変るから，(25) 式は，積雪に固定された空間座標 (x, y, z) を用いた表現に書改める必要がある。それには，応力と歪速度との各成分をテンソル変換の規則にしたがって変換すればよい。平均流速 $\boldsymbol{v}_a$ の絶対値 q および静水圧 p は，この変換に対して不変である。

主軸 (1, 2, 3) に対する (x, y, z) 座標軸の方向余弦を (l_1, l_2, l_3) (m_1, m_2, m_3) (n_1, n_2, n_3) とすれば，変換の結果

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= l_1^2\sigma_1+l_2^2\sigma_2+l_3^2\sigma_3 = -p+2(\mu+\mu' q)(l_1^2\dot{\varepsilon}_1+l_2^2\dot{\varepsilon}_2+l_3^2\dot{\varepsilon}_3)\\
&= -p+2(\mu+\mu' q)\,\dot{\varepsilon}_x\\
\tau_{yz} &= m_1n_1\sigma_1+m_2n_2\sigma_2+m_3n_3\sigma_3 = 2(\mu+\mu' q)-(m_1n_1\dot{\varepsilon}_1+m_2n_2\dot{\varepsilon}_2+m_3n_3\dot{\varepsilon}_3)\\
&= 2(\mu+\mu' q)\,\dot{\varepsilon}_{yz}
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

となる。他の成分についても同様である。歪速度成分を (15) 式でおきかえると，応力を，付随乱流の平均流速，すなわち空隙流速 $\boldsymbol{v}_a$ の (x, y, z) 成分 (u, v, w) を用いて

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -p+2(\mu+\mu' q)\,\partial u/\partial x,\ \ \sigma_y \text{ と } \boldsymbol{\sigma}_z \text{ とについての同形の式} \\
\tau_{yz} &= (\mu+\mu' q)(\partial w/\partial y+\partial v/\partial z),\ \ \tau_{zx} \text{ と } \tau_{xy} \text{ とについての同形の式} \\
q &= \sqrt{u^2+v^2+w^2}
\end{aligned}\right\} \tag{27}
$$

の形に表すことができる。

簡単な例として「まえがき」で述べた二次元平行雪内気流の応力を考えよう。このばあい，u は z だけの関数で $v=w=0$ である。よって，q は u にひとしく，(27) 式から

$$
\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p,\ \ \tau_{zx} = (\mu+\mu' u)\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}z,\ \ \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \tag{28}
$$

なる応力が導かれる。u が大きくて，μ が $\mu' u$ に対して無視できるとしよう。すると (28) 式の τ_{zx} は「まえがき」にある (1) 式の τ と一致する。つまり，(1) 式の τ は，u が大きい場合の二次元平行雪内気流に現れる剪断応力である。

VI. 雪内気流の運動方程式

1. 応力成分で表した運動方程式

前節で考察した付随乱流から実際の雪内気流に戻って，その運動方程式をつくる。ただし，第 III 節第 1 項で述べたように，実際の雪内気流の応力と空隙流速 $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ との関係が，付随乱流について得た (27) 式によって与えられるという基本仮定をおく。

積雪は均一等方であると仮定した。そのなかの任意の点 P で，物理的微小体積 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ のなかに含まれる質量 $\varepsilon\rho\mathrm{d}V$ の微小空気の運動方程式を立てる。これが即ち雪内気流の運動方程式にほかならない。ε は雪層の空隙率，ρ は空気の密度である。空気の密度が小さいから重力の作用は非常に小さい。よって，それを無視すると，$\mathrm{d}V$ 内の空気に作用する力は，まわりの空気が $\mathrm{d}V$ の表面を通して加える応力と，$\mathrm{d}V$ の内部にある氷の骨組が加える抵抗力とのふたつだけとなる。抵抗力は，点 P での空隙流速 $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ と平行に，$\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ と反対の向きに働く，また，その大きさは $\mathrm{d}V$ の大きさに比例する。それで，積雪の単位体積あたりの抵抗力を

$$
-N\boldsymbol{v}_\mathrm{a} \tag{29}
$$

で表すことにする。N は $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ の絶対値 q の関数である。

微小体積 $\mathrm{d}V$ の表面のうち，氷の骨組の断面の現われている所では，まわりの空気の応力が作用しない。そのため，応力の作用する面積は，第 II 節第 1 項でのべたことにより，$\mathrm{d}V$ の全表面積に空隙率 ε を乗じたものとなる。このことを考慮して，$\mathrm{d}V$ 内の空気の運動方程式をつくると

$$
\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}-\frac{N}{\varepsilon}u \tag{30}
$$

がえられる。u は $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ の x- 成分である。$\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ の y- 成分，z- 成分である v, w についても同形の式がなりたつ。

2. 氷の骨組の抵抗

うえに得た (30) 式の応力成分 σ_x, τ_{xy}, … を (27) 式で置換えれば u, v, w で表した運動方程式になる。しかし，その置換のまえに，抵抗力の係数 N と積雪の通気度 B との関係を定めて

おこう。次のような実験を考える。積雪の板を直円筒に，その軸と直角にはめこむ。直円筒の軸にそって座標 x をとり，積雪の板の一方の面の座標を $x=0$，他方の面の座標を $x=D$ とする。D は板の厚さにほかならない。直円筒内，$x<0$ の空間にある空気の圧力を p_1 で，$x>D$ の空間を満す空気の圧力を p_2 で表す。$p_1>p_2$ とすると，積雪の板のなかに，x の正の方向に流れる雪内気流が生ずる。それの空隙流速 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ は板のなかの位置にはよらず一定である。すなわち，u_0 を常数として，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ は

$$u = u_0, \quad v = w = 0 \tag{31}$$

の成分を持つ。

圧力勾配 $-\partial p/\partial x=(p_1-p_2)/D$ が，この雪内気流の原因であることは明かである。また，円筒の軸に直角な平面内に圧力の変化はない。それで

$$u_0' = \varepsilon u_0 = B(-\partial p/\partial x), \quad \partial p/\partial y = \partial p/\partial z = 0 \tag{32}$$

と書いて，B を積雪の通気度とよぶ。u_0' は，第 II 節第 2 項で述べた濾過流速である。u_0' が 5 cm/s 以下の小さい値に止るようにして行われた実験によると，通気度 B は u_0' の大小によらず一定である。しかし，氷の骨組の構造によっては変る[6]。B の値を $\mathrm{cm^4/s\cdot dyne}$ の単位で表すと，新雪では 0.2～0.5，しまり雪では 0.03～0.22 となる[5]。u_0' がある値をこえると，B は u_0' の増大につれ減少すると予想される。ただ，B の減少が始るまでに積雪は破壊するかも知れない。実測がないため，これらの点は，今のところ不明である。

空隙流速 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ の成分が (31) で与えられるならば，(27) 式の応力の剪断成分は皆消失し，垂直成分は三つとも $-p$ にひとしい。すなわち $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-p$ である。すると，(30) 式および y, z に関する同形の運動方程式は

$$0 = -\partial p/\partial x - (N/\varepsilon)\, u_0, \quad 0 = \partial p/\partial y = \partial p/\partial z \tag{33}$$

の簡単な形になる。これと (32) 式とは，同じ事柄に関する式である。よって，両式は一致しなければならない。その結果 $N=\varepsilon^2/B$ の関係が成立し，(30) 式の右辺の最後の項は

$$-(\varepsilon/B)\, u \tag{34}$$

と書かれることになる。

3. 空隙流速で表した運動方程式

第 II 節第 5 項でのべた基本仮定により，(30) 式の応力成分を (27) 式でおきかえ，(u, v, w) で表した目的の運動方程式

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + (\mu+\mu' q)\,\varDelta u + \mu'\Big\{2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial q}{\partial y} \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial z}\Big\} - \frac{\varepsilon}{B}\,u, \\ v \text{ と } w \text{ とについての同形の式，}\quad q = \sqrt{u^2+v^2+w^2}\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

が得られる。$\varDelta$ はラプラス演算子である。この (35) 式と連続方程式 (3) との組合せにより，4 個の未知量 u, v, w, p が決定される。

4. 圧力勾配が優勢なばあいの運動方程式

運動方程式(35)の右辺にある，圧力勾配を表す最初の項をA項とし，抵抗を表す最後の項をC項と名づけ，A項とC項とにはさまれた数個の項をまとめてB項と呼ぶことにする。B項は純粋変形応力の勾配にもとづく並進力を表し，流速が空間的に激しく変化するところで大きい。

式(35)左辺の D/Dt を $\partial/\partial t$ でおきかえてもよいほど空隙流速 $\boldsymbol{v}_a$ が小さく，且，$\boldsymbol{v}_a$ の空間的変化が弱いため，B項がA項にくらべて著しく小さい場合がしばしば生ずる。そのような場合には，複雑なB項を無視して，次のような近似解法(**a**)および(**b**)を用いることができる。

(**a**) 式(35)の右辺からB項を除去した

$$\rho\, \partial \boldsymbol{v}_a/\partial t = -\operatorname{grad} p - (\varepsilon/B)\, \boldsymbol{v}_a \tag{36}$$

を運動方程式として用いる。$\boldsymbol{v}_a$ が小さいから通気度 B は常数である。それで，各項に演算子 div を作用させると，連続方程式 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_a=0$ のため，(36)式は

$$\Delta p = 0 \qquad (\Delta \text{ はラプラス演算子}) \tag{37}$$

に変る。

流動が定常ならば，運動方程式(36)の左辺は0である。よって，与えられた境界条件をみたす(37)式の解 p を見出せば，(36)式を用いて直ちに $\boldsymbol{v}_a$ が求められる。流動が定常でない場合でも，境界条件が適当なら，(36)式そのままの形の運動方程式を使って，(37)式の解 p から $\boldsymbol{v}_a$ を定めることも可能である。

(**b**) 流体が気体で流動が定常でない場合は

$$(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}p)_0\, \partial p/\partial t + \rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v}_a = 0 \tag{38}$$

を連続方程式として用いる。気体については，この式の方が，非圧縮性連続方程式 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_a=0$ より近似度が高い。添字0は，流動が関係する空間範囲時間範囲にわたってとった，それぞれの量の平均値を示す。気体の密度 ρ は小さいから，(36)式の左辺を0とおいたものを運動方程式として用いる。この運動方程式を(38)式に代入すると

$$\partial p/\partial t = k\Delta p, \quad k = \rho_0 B (\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho)_0/\varepsilon \tag{39}$$

が導かれる。この微分方程式の解 p がえられれば，それを運動方程式にある p として用いることにより，$\boldsymbol{v}_a$ が定められる。

筆者は，気圧が急速に降下するとき積雪内に発生する気流を(**b**)の方法でとりあつかい，積雪から流出する空気が積雪表面の雪粒を拉致し飛散させる現象を理論的に考察した[5]。その場合，座標 z を鉛直上にとると，$u=v=0$ で w は z だけの関数となる。よって，(35)式のうちの w に関する運動方程式だけが意味をもつことになり，そのB項は

$$(\mu+\mu' w)\, \partial^2 w/\partial z^2 + 2\,\mu'(\partial w/\partial z)^2 \tag{40}$$

で与えられる。したがって，筆者が求めた結果[5]の近似度が高いのは，(40)式が $\partial p/\partial z$ あるいは $(B/\varepsilon)\, w$ にくらべて充分小さい場合に限られる。

VII. まとめ

積雪内に生ずる気流は，積雪を構成する氷の骨組の不規則な形の空隙を縫って進む乱流である。この乱流を，氷の骨組の構造の不規則のために生ずるという意味で，「構造乱流」と名づけた。構造乱流の流速の空間平均 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ は，空隙内に位置する点についてはもとより，氷の骨組が占める空間内に位置する点についても定義できる。それで，積雪が占める空間から氷の骨組を取除いた自由空間を $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ の流速で流れる気流を仮想し，それを「平均流」と呼んだ。さらに，平均流に構造乱流の変動流速 $\delta\boldsymbol{v}$ を重畳したものを「付随乱流」と名づけた。

付随乱流も自由空間内の流動である。これに，自由空間中の流体に関する粘性流体理論，乱流理論を応用することにより，付随乱流内の応力成分を平均流 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ の成分 (u, v, w) で表す式を求めた。それが本文中の(27)式である。μ は空気の粘性係数，μ' は空気の密度 ρ と氷の骨組の形とで定まる定数で「構造乱流粘性係数」と名づける。実際の雪内気流の応力が，付随乱流の応力である(27)式に等しいとの基本仮定をおき，(35)式で表される雪内気流の運動方程式に達した。ε および B は，それぞれ，積雪の空隙率および通気度である。連続方程式には，非圧縮性流体の連続方程式(3)を用いる。

構造乱流粘性係数 μ' は，(24)式が示すように $\rho(\alpha l/2)$ にひとしい。α と l とは，積雪内を流れる流体が空気以外の流体であっても，その種類には関係なく，ただ氷の骨組の形だけによって定められる定数である。

この論文を書くにあたっては，北海道大学低温科学研究所の石田完教授をはじめとする気象学部門の研究員にいろいろ検討してもらった。ここに記して感謝の意を表す。

文献

1) 吉田順五 1977 風が誘起する雪内気流．低温科学，物理篇，**35**, 47-65.
2) Kojima, K. 1960 Thin section of snow cut by a heated wire. *Contr. Inst. Low. Temp. Sci.*, **16**, 47-59.
3) 小島賢治，秋田谷英次，M. de Quervain 1968 積雪の変態に関するシンポジウム．雪氷，**30**, 141-161.
4) 清水弘他 1973 黒部峡谷高速なだれの研究 III. 低温科学，物理篇，**32**, 111-125.
5) 吉田順五 1976 気圧の局所急速降下による積雪の飛散 I, II, III. 低温科学，物理篇，**34**, 1-15, 17-33, 35-48.
6) Shimizu, H. 1970 Air permeability of deposited snow. *Contr. Inst. Low Temp. Sci.*, **A 22**, 1-32.

Summary

1. Equations of motion are derived for the air flowing through interstices of the irregular three-dimensional network of ice which composes a homogeneous and isotropic snow. The equations are given by

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{Du}{Dt} = &-\frac{\partial p}{\partial x}+(\mu+\mu' q)\,\Delta u+\mu'\left\{2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial q}{\partial y}\right.\\ &\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial z}\right\}-\frac{\varepsilon}{B}u\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

and others likewise for coordinates y and z, where u, v, w are respectively the x-, y-, z-components of the interstitial velocity of air while q represents its absolute value, that is $q=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$. In the equations, ρ and μ are respectively density of air and its coefficient of viscosity while ε and B give respectively porosity of the snow and permeability of air through it. Constant μ' is named 'coefficient of viscosity due to structural turbulence' which will be described in the next Article 2.

2. The air flows through the snow in a turbulent fashion because it has no other way than to meander through the complicated matrix of the three-dimensional network of ice. This turbulence may be called 'structural turbulence'. As will be shown later, the formulae

$$\sigma_x = -p+2(\mu+\mu'q)\,\partial w/\partial x, \quad \tau_{yz} = (\mu+\mu'q)(\partial w/\partial y+\partial v/\partial z) \tag{2}$$

are obtained for the mean values of normal and shear stresses which are given rise to in the air by a structurally turbulent flow. Equations (1) and (2) are derived on the basis of propositions and assumptions which will be outlined in the following Articles from 3 to 8.

3. Turbulent flow of free air is irregular with respect to time and space both, but the irregularity consists only in space for the air flow of structural turbulence. Therefore, mean velocity $\boldsymbol{v}_a$ of air in the snow should be made by averaging with respect to space microscopically irregular velocity $\boldsymbol{v}$. If ε and δV are respectively pososity of the snow and a small volume surrounding a point $P(x,y,z)$ arbitrarily chosen in it, $\varepsilon\delta V$ gives the total volume of the interstices which are left unoccupied by the matrix of ice enclosed in δV. The intersticial velocity (u, v, w) mentioned in Article 1 is $\boldsymbol{v}_a$ at point P, that is $\boldsymbol{v}$ averaged over $\varepsilon\delta V$, whereas filter velocity $\boldsymbol{v}'_a$ is defined as $\boldsymbol{v}$ averaged over δV. The two kinds of mean velocities $\boldsymbol{v}_a$ and $\boldsymbol{v}'_a$ are connected by the relation $\boldsymbol{v}'_a=\varepsilon\boldsymbol{v}_a$.

4. The actual velocity of air at point P, that is, the microscopically irregular velocity $\boldsymbol{v}$ at point P can be expressed as

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a+\delta\boldsymbol{v}, \tag{3}$$

provided that point P lies in the interstices. But $\boldsymbol{v}_a$ is such a kind of mean velocity that can be defined not only at a point in the interstices but also at a point in the space $V_i=(1-\varepsilon)V$ occupied by the matrix of ice; namely, $\boldsymbol{v}_a$ exists at every point in space V throughout which the snow extends. In view of this fact, an air flow of velocity $\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}$ is imagined in free space V deprived of the matrix of ice, where V_{M} is given by

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}+\delta\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}, \tag{4}$$

$\delta\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}$ being equal to 0 in space V_{i} and equal to $\delta\boldsymbol{v}$ of equation (3) in space $(V-V_{\mathrm{i}})$. This imaginary air flow of velocity $\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}$ shall be called 'free turbulent flow adjoined' to the actual air flow through the snow, and it is assumed that the stress arising in the former gives with no alteration that arising in the latter. Compressbility of the air is ignored, which results in

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = 0. \tag{5}$$

5. Microscopic flow of a fluid through a porous media is known to remain laminar if its filter velocity becomes much greater than the limiting value at which Darcy's law breaks. (cf. p. 48 of 'Ground Water Hydrology' by D. K. Todd, 1959, John Wiley & Sons, Inc.) Therefore actual velocity $\boldsymbol{v}$ of the air in snow can well be considered to satisfy Navier-Stokes' equations of motion.

6. When $\boldsymbol{v}$ is exceedingly small, Navier-Stockes' equations are reduced to those linear in components of $\boldsymbol{v}$. It can be proved, using these reduced equations, that $\delta\boldsymbol{v}$ of equation (3) around point P is connected with $\boldsymbol{v}_a$ at that point by the relation

$$\delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_a, \tag{6}$$

where $\boldsymbol{A}$ is a tensor of which the components are functions of position in the neighbourhood of point P. Tensor $\boldsymbol{A}$ is independent of density and viscosity of the fluid flowing through the snow, namely, tensor $\boldsymbol{A}$ does not change if the air in the snow is replaced by other kinds of fluids. Relation (6) gradually loses its validity as $\boldsymbol{v}_a$ increases. Nevertheless, it is assumed that the relation is available without regard to whether $\boldsymbol{v}_a$ is small or great.

7. It results from equation (6) that streamlines of the air do not change in shape in the neighbourhood of point P so long as the direction of $\boldsymbol{v}_a$ is fixed, because $\delta\boldsymbol{v}$ keeps its direction unchanged if $\boldsymbol{v}_a$ changes in its magnitude. As the snow is homogeneous and isotropic, it follows from the above result that the streamlines are statistically the same in shape throughout the snow, independently of in whatever manner the air flows within it and of whatever kind of fluid is flowing. The streamlines wind irregularlly, but their statistical amplitude must have a difinite value which is determined, free from the sort of fluid, solely by the structure of the matrix of ice. This statistical amplitude must closely be related to mixing length l of the fluid flowing in the form of structural turbulence. Therefore, mixing length l of the structural turbulence can be said to be inherent to the microscopic structure of snow.

8. Statistical distribution of $\delta\boldsymbol{v}$ must show, in the neighbourhood of point P, at least a symmetry as high as axial with respect to the direction of $\boldsymbol{v}_a$ at the same point. For simplicity, this symmetry is raised to the highest degree so as to be centric with point P as the center. Then, if δu_1 denotes component of $\delta\boldsymbol{v}$ in an arbitrary direction, it follows that

$$\sqrt{\overline{\delta u_1^2}} = \alpha q, \tag{7}$$

where q and α are respectively the magnitude of $\boldsymbol{v}_a$ and a constant inherent to the microscopic structure of snow.

9. The adjoined air flow defined in Article 4 can be studied by the use of theories of the ordinary hydrodynamics and turbulence, since it is an air flow imagined to occur in a free space. Let point P be arbitrarily chosen in the adjoined air flow. In the following Articles, word 'stress' at point P is used for the mean value of the microscopic stresses irregularly acting on a small plane of which the center lies at point P. Word 'strain rate' at point P is also used in a similar manner: components $\dot{\varepsilon}_x$, $\dot{\gamma}_{yz}$ of the strain rate are given by

$$\dot{\varepsilon}_x = \partial u/\partial x, \quad \dot{\gamma}_{yz} = (\partial w/\partial y + \partial v/\partial z)/2, \tag{8}$$

where u, v, w are components of $\boldsymbol{v}_a$, a mean flow velocity averaged around point P in such a manner as described in Article 3.

10. If principal stresses are denoted by σ_1, σ_2, σ_3 at point P, the theory of hydrodynamics requires that principal values of deviatoric stress

$$s_1 = \sigma_1 + p, \quad s_2 = \sigma_2 + p, \quad s_3 = \sigma_3 + p \text{ with } -3p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{9}$$

are, in virtue of equation (5), related to principal values $\dot{\varepsilon}_1$, $\dot{\varepsilon}_2$, $\dot{\varepsilon}_3$ of stain rate at point P by the formulae

$$s_1 = C\dot{\varepsilon}_1, \quad s_2 = C\dot{\varepsilon}_2, \quad s_3 = C\dot{\varepsilon}_3, \tag{10}$$

where C is a constant.

11. To take s_1 for instance, it arises from transfer of momentum of the air through a plane perpendicular to the direction of σ_1. There are two causes for the transfer: molecular viscosity of the air and the structural turbulence. That part s_1' of s_1 arising from the molecular viscosity is well known to be

$$s_1' = 2\,\mu\,\dot{\varepsilon}_1, \tag{11}$$

while the remainder s_1'' due to the structural turbulence is given by

$$s_1'' = \rho l\,\dot{\varepsilon}_1 \sqrt{\overline{\delta u_1^2}}\ , \tag{12}$$

which can be rewritten as

$$s_1'' = 2\,\mu' q\,\dot{\varepsilon}_1 \qquad \text{with } \mu' = \rho(\alpha\, l/2). \tag{13}$$

In equation (12), δu_1 is component of $\boldsymbol{\delta v}$ in the direction of σ_1. As s_1 is equal to s_1+s_2, equations (11) and (13) give the following expression for constant C of equation (10)

$$C = 2(\mu+\mu' q). \tag{14}$$

Coefficient μ' of viscosity due to the structural turbulence depends not only upon the microscopic structure of the snow but also changes in magnitude in proportion to density ρ of the fluid with which the air might be replaced.

12. Although formulae (10) and (14) are obtained for the adjointed air flow which is imaginary, it is assumed that they hold true for the actual air flow through the snow. When coordinates are changed from those referred to principal stresses to (x, y, z), these formulae are transformed into formulae (2) shown in Article 2. The air is subject to the resistive force

$$-(\varepsilon^2/B)\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} \tag{15}$$

per unit volume of the snow when flowing through it with intersticial velocity $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$. Equations of motion (1) are derived from formulae (2) and (15), the effect of gravity being ignored because of a small density of the air.

低温科学　物理篇　第36輯　訂　正

頁	行	誤	正
16	上から16	統形的	統計的
23	下から 1	(B/ε)	(ε/B)
27	上から10	S_1+S_2	$S_1'+S_1''$
34	下から12	第 3 図	第 2 図
37	〃　12	(I, 33)	(I, 35)
39	上から18	Fig. 1	Fig. 2
〃	〃　21	$-(\varepsilon/B)=0$	$-(\varepsilon/B)u=0$
〃	〃　25	$(2/3)\mu'u/$	$(2/3)\mu'u^*/$
〃	下から 7	Fig. 1	Fig. 2
44	上から13	変ル	変る
47	〃　4	$\tau+\tau'\varepsilon'/$	$\tau+\tau''\varepsilon'/$
48	〃　15	あるうとい	あるという
50	下から 8	曲織	曲線