HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	雪内空気の流動理論　II：透過性壁面にそう層流の境界条件
Author(s)	吉田, 順五
Citation	低温科學. 物理篇, 36, 29-40
Issue Date	1979-03-10
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/18353
Type	bulletin (article)
File Information	36_p29-40.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Zyungo YOSIDA 1978 Theoretical Studies on Air Flow Within Snow, II. Boundary Conditions at a Porous Surface When Fluid Flows over It in the Form of Laminar Flow. *Low Temperature Science, Ser. A, 36.* (With English Summary p. 38)

雪内空気の流動理論 II*

(透過性壁面にそう層流の境界条件)

吉田順五
(北海道大学名誉教授)

(昭和53年9月受理)

I. まえがき

1. 透過性壁面付近の流動

積雪は一種の透過性多孔物質である。透過性多孔物質の表面にそって流体が流れると，内部流体，すなわち多孔物質の空隙をみたす流体が引づられて流動する。この内部流動は，多孔物質内の表面ちかくに限られる。また，外部流動が層流であるか乱流であるかによって様相を異にするであろう。

簡単のため，透過性多孔物質の表面を「透過性表面」あるいは「透過性壁面」と呼ぶ。むくの固体の非透過性壁面では，流体の流速が0であるという境界条件がなりたつ。しかし，透過性壁面では，内部流動がおこるから，境界条件がこのような簡単な形で与えられることはない。

2. Beaversの研究

ミネソタ大学のBeaversは，人工多孔物質の水平表面上に水を緩漫な層流として流す実験をおこなった。一方，表面における境界条件を

$$(\mathrm{d}U/\mathrm{d}z)_{z=0}=(\alpha/\sqrt{B_0})(U_0-u'_B) \qquad (1)$$

とおき，表面上を流れる外部水流の流速分布を粘性流体運動方程式によって理論的に定めた[1]。そして，実験の結果と理論の結果とが互に符合することを確めた。

式(1)でzは表面から鉛直上方にむかう座標，Uは外部水流の流速，U_0は表面でのUの値である。αは多孔物質の顕微鏡的構造できまる定数で，B_0は多孔物質の比透過係数を表す。多孔物質内の水も，外部水流と同じ方向に流れる。その濾過流速をu'とすると，u'は表面での値u'_0から，多孔物質内部にぐだるにつれて減少し，深部で一定値に漸近する。式(1)のu'_Bは，この一定値の深部濾過流速である。u'_Bが0でないのは，外部水流を生ぜしめるのに必要な圧力勾配と同じ圧力勾配を多孔物質内の水にもかけたことによる。

3. 一般境界条件

境界条件は，境界面上の流速あるいは応力の間の関係として与えられるべきである。しかるに，Beaversの条件式(1)は，境界面上の流速ではない深部濾過流速u'_Bをふくむ。それで，

* 北海道大学低温科学研究所業績 第1946号

(1) 式に代るものとして，透過性壁面では，外部流動の流速と剪断応力とが，それぞれ，内部流動の流速と剪断応力とに比例するということを一般境界条件として設定する。実験的に確められた (1) 式をそれから導き，この新しく設定した一般境界条件の正しさの裏付けとするのが，この論文の目的である。かくすることにより，一般境界条件の比例常数もきめられる。

Beavers の境界条件にせよ，この論文で設定する一般境界条件にせよ，外部流動が緩漫な層流で，内部流動が表面に平行な二次元平行流として起るばあいについてのものである。特殊な境界条件ではあるが，積雪の表面を乱流である風が吹くばあいの境界条件を組立てるための準備としての役に立つであろう。

II. 二次元平行定常雪内気流

1. 二次元平行定常雪内気流

「まえがき」でのべた目的を達するための用意として，この第 II 節で，透過性多孔物質内の二次元平行流の流速分布を，同名の論文 I[3] で求めた雪内空気の運動方程式の解として定める。一般性を失うことはないから，透過性多孔物質を積雪とする。水平な雪面を水平に吹く定常風を原因にとるから，二次元平行雪内気流は定常であり，その流速分布を表す運動方程式の解は，雪面から下るにつれ流速が減少する形でえられる。引用する論文 I の数式の番号には I をつけくわえる。例えば，論文 I の式 (3) は (I, 3) と書く。諸種の記号には，論文 I のものをそのまま使う。

2. 二次元平行定常雪内気流の運動方程式

直角座標 (x, y, z) の原点を水平な積雪表面上におき，座標 x を表面にそって吹く風の方向に，座標 z を鉛直上方に向けてとる。風は，平均風に無秩序な変動気流が重畳した乱流である。しかしこの論文では，変動気流の効果は考慮からはずし，もっぱら，風がその平均風速によって，雪内空気を引きずり，雪内気流を発生させる現象を取扱う。つまり，風をその平均風速で流れる層状気流とみなす。平均風速を定常で，x 方向に一様であるとすれば，発生する雪内気流は，圧力勾配および構造乱流の平均流速を与える空隙流速 $\boldsymbol{v}_a$ の成分 (u, v, w) が

$$\left.\begin{aligned} u = u(z) \geqq 0, \qquad & v = w = 0; \\ -\partial p/\partial x = G(\text{常数}) > 0, \qquad & -\partial p/\partial y = -\partial p/\partial z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

の条件をみたす二次元平行定常流となる。

野外にある積雪のばあいには，圧力勾配の方向が，一般には，x 方向と一致しない。しかし，その値が非常に小さいから，圧力勾配は無視できる。風洞の床に雪の板をおき，板の表面にそって風を流す実験がおこなわれる。このばあいの圧力勾配は，必ずしも無視できるほど小さくはないが，方向は風の方向と一致し，しかも一定値の下り勾配である。それで上のように $-\partial p/\partial x$ を正の一定値 G に等しいとおいた。

空隙流速 $\boldsymbol{v}_a$ の成分 (u, v, w) が (2) 式の条件を満すから，$q = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$ は u にひとしい。よって，x 方向についての運動方程式 (I, 35) は

$$0 = G + (\mu + \mu' u)\, \mathrm{d}^2 u/\mathrm{d}z^2 + \mu' (\mathrm{d}u/\mathrm{d}z)^2 - (\varepsilon/B)\, u \tag{3}$$

に簡単化される。式(2)の空隙流速成分と圧力勾配とは，y 方向および z 方向についての運動方程式，また(I, 3)式で表される連続方程式を満足する。よって，うえの二次元平行定常雪内気流の流速 u は，(3)式の解として z の関数で表わされる。

3. 運動方程式の積分 (1)

運動方程式(3)の最も簡単な解として，z には無関係な

$$u = u_B = BG/\varepsilon \tag{4}$$

が存在する。積雪の深部には風の影響が伝らない。よって，積雪深部の気流の流速は，μ や μ' をふくまない(4)式で与えられる。流速が u_B のこの気流を「深部気流」とよぶことにする。

Duvrovin は，南極の積雪内，表面から数 m の深さに，流速が 1 cm/s に満たない微弱な雪内気流を観測し，これを気圧の勾配によって生ずるものと考えた[4]。これから，自然積雪のなかにも，極めて弱いものながら，深部雪内気流の存在することが知られる。ただし，その流れの方向は，必ずしも風の吹く方向と一致しない。

流速 u が z によって変るとして(3)式を一回積分すると

$$u^* = u - u_B, \qquad \mu_B = \mu + \mu' u_B \tag{5}$$

を用いて

$$du/dz = du^*/dz = (\sqrt{\varepsilon/B})\ u^* \sqrt{\mu_B + (2/3)\,\mu' u^*}/(\mu + \mu' u) \tag{6}$$

が求められる。積雪深部では，$u = u_B$ だから，$du/dz = 0$ になる筈である。それで $z \to -\infty$ のとき $du/dz \to 0$ になるように積分常数を定めて(6)式をえた。

論文 I の (I, 27) 式が示すように，水平面内の剪断応力の x 成分は

$$\tau_{zx} = (\mu + \mu' q)(\partial u/\partial z + \partial w/\partial x) \tag{7}$$

である。よって，今のばあいの τ_{zx} は

$$\tau_{zx} = (\mu + \mu' u)\, du/dz = (\sqrt{\varepsilon/B})\ u^* \sqrt{\mu_B + (2/3)\,\mu' u^*} \tag{8}$$

で与えられる。他の応力成分については，$\tau_{yz} = \tau_{xy} = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p = Gx - p_0$ (常数) である。

4. 運動方程式の積分 (2)

前項の第一階微分方程式(6)の解として与えられる u と z との関係を，無次元量の間の関係で表示するために

$$s = (\mu'/\mu_B)\, u^* = (\mu'/\mu_B)(u - u_B), \qquad \zeta = z\sqrt{\varepsilon/(\mu_B B)} \tag{9}$$

とおく。いま

$$S = \sqrt{1 + (2/3)\, s} = \sqrt{1 + (2\mu'/3\mu_B)(u - u_B)} \tag{10}$$

を介して定義される s の関数

$$F(s) = F_1(S) = 3S - \ln\left\{(S+1)/(S-1)\right\} \tag{11}$$

を考える。するとζが

$$\zeta = F(s) - F(s_0) = F_1(S) - F_1(S_0) \tag{12}$$

で表されることが(6)式を積分することによって知られる。s_0 および S_0 は，(9)式および(10)式の u に $z=0$ での u の値

$$u_0=(u)_{z=0} \tag{13}$$

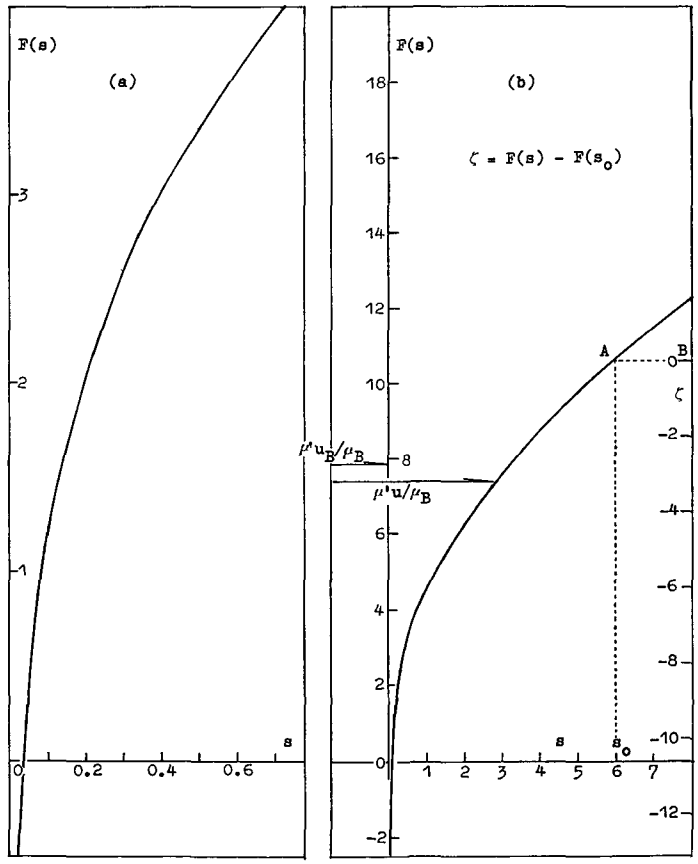
を用いたときの s および S の値である。積雪表面 $z=0$ では，風が雪内空気をひきずるから，u_0 は u_B より大きい。したがって，s_0 の値は正である。

筆者は，さきに文献(5)で，分子粘性係数 μ および圧力勾配 G が共に0であるという条件のもとに，u と z との関係として

$$\sqrt{u}=\sqrt{u_0}+z\sqrt{\varepsilon/6\mu' B} \qquad (z<0) \tag{14}$$

を導いた。同文献の(11)式である。ところが，この条件があると，μ_B が0となるから，(9)式の s および ζ が意味を失う。しかし，μ および G を0に近づけた極限としての(12)式は(14)式と一致する。

第1図に $F(s)$ と s との関係を曲線で示した。$F(s)$ は s の増大関数で $F(0)=-\infty$，$F(0.032)$



第1図 二次元平行雪内気流の空隙流速 u の分布を示す曲線。(a)図は(b)図の原点付近を拡大したもの。$s=(\mu'/\mu_B)(u-u_B)$，$\zeta=z\sqrt{\varepsilon/(\mu_B B)}$，$\mu_B=\mu+\mu' u_B$。$\mu$ は空気の粘性係数，μ' は空気の構造乱流粘性係数，ε は積雪の空隙率，B は積雪の通気度，u_B は深部流速

$=0$, $F(\infty)=\infty$ である。導関数 dF/ds は，$s=0$ で ∞, $s=\infty$ で 0 である。

無次元数 ζ と s との関係は，曲線 $F(s)$ 上の或る点から下につづく部分で表される。たとえば，u_0 に或る値が与えられて，$s=6$ になったとしよう。第 1 図 (b) で，横軸上の $s=6$ の点に鉛直線を立て，それと曲線 $F(s)$ との交点を A とする。この A 点での $F(s)$ の値が (12) 式の $F(s_0)$ である。よって，第 1 図 (b) の右を区切る鉛直線にそって上方に ζ を測ることにすると，この区切り線と A 点を通る水平線との交点 B が $\zeta=0$ の点となる。s と ζ との関係は，A 点から斜め左にくだる半曲線で表される。ただし，s の値は，同図の 0 点を通る鉛直線を基準にしてはかる。

この s–ζ 曲線が示すように，積雪表面下のある深さに達すると，事実上，s は 0 となる。つまり，u が深部流速 u_B と一致する。表面からこの深さまでの間を流れる雪内気流を「遷移層」となづける。

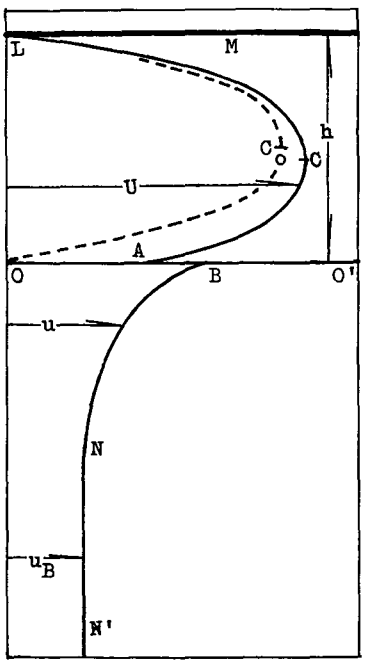
III. Beavers の研究

1. Beavers の実験

雪以外の透過性多孔物質内の流体の運動にも，論文 I およびこの論文 II の第 II 節でえた結果があてはまる。まえがきで述べたように，Beavers は，人工の透過性多孔物体の表面，すなわち透過性壁面にそって流体を層流として流し，壁面における流動の境界条件を研究した[1]。以下の第 III 節，第 IV 節は，現論文の理論による，Beavers の研究結果の検討である。

第 2 図に Beavers の実験の概念図を示す。水平線 OO′ が，真横からみた人工透過性多孔物質の板の上面，すなわち透過性壁面の一部を表す。面 OO′ の下の空間は多孔物質で占められる。面 OO の上，せまい間隔 h をおいて，むくの物質の板 M が，面 OO′ と平行におかれる。板 M の下面は非透過性壁面である。板 M と面 OO′ との間を流路とよぶことにする。透過性壁面上の一点 O を原点として水平右むきに x 座標を，鉛直上方に z 座標をとる。

流路にも多孔物質の空隙にも流体をみたす。水平右むきに，時間的にも空間的にも変化しない圧力の下り勾配 G を，流体全体にわたって生ぜしめる。y 方向および z 方向の圧力勾配は 0 に保つ。すると流体は，流路のなかも多孔物質のなかも，定常な



第 2 図 Beavers の実験装置の側面図。水平線 OO′ の下の空間を人工透過性多孔物質が埋め，透過性壁面 OO′ のうえ距離 h をおいて非透過性壁面 M がある。OO′ と M との間の流路も多孔物質の空隙も流体でみたされ，流体全体に圧力勾配 G がかかる。曲線 LCA は流路内の流速 U の分布，曲線 BNN′ は多孔物質内の空隙流速 u の分布を示す。点曲線 LC_0O は，面 OO′ を仮に非透過性壁面としたばあいの流路内流速分布である。

二次元平行水平流として左から右へむかって流れる。

流路の高さ h を充分に小さくとって，流路内の流れを層流に保つ。その流速を U で表す。多孔物質内の流れは構造乱流である。その平均流速，すなわち空隙流速を u で示す。多孔物質に比べ流路は抵抗が小さいから，流路内の流体は速く流れて，多孔物質内の流体を引きずる。よって，U および u の分布曲線は，それぞれ，第2図の曲線 LCA および曲線 BNN′ の形をとるであろう。

透過性壁面 OO′ での U と u との値，すなわち A 点と B 点とで表される U と u との値を，それぞれ U_0 と u_0 とする。図には，B 点を A 点の右において $u_0>U_0$ としてある。流路内の流体が多孔物質内の流体を引きずることから考えると，この大小関係は逆になるべきようにも思われる。しかし，透過性壁面を一枚の幾何学的平面とみなすこの巨視的理論では，次の論文 III で示すように，$u_0>U_0$ とおくのが正しい。多孔物質内深部の u の値は深部流速 $u_B=BG/\varepsilon$ で与えられる。B と ε とは，それぞれ，多孔物質の透過係数と空隙率とである。

2. Beavers の境界条件

流路内の流速 U が透過性壁面 OO′ で満すべき境界条件として，Bervers はすでに「まえがき」で(1)式として示した

$$(\mathrm{d}U/\mathrm{d}z)_{z=0}=(\alpha/\sqrt{B_0})(U_0-u'_B) \tag{15}$$

を仮定した。u'_B は深部濾過流速で εu_B にひとしい。B_0 は多孔物質の比透過係数で，流体の粘性係数を μ とすると $B=B_0/\mu$ の関係がある。B_0 の値は，多孔物質を構成する固体の骨組の構造だけできまり，流体の性質には依存しない。B_0 の元は長さの二乗にひとしい。よって(15)式から，α が無次元数であることがわかる。このことを基にして Beavers は，α が，流体の性質には無関係な，透過性壁面の構造だけで定まる常数であるとした。

流路内の流れは層流だから，$z=0$ に対しては(15)式の境界条件を用い，$z=h$ に対しては $U=0$ がなりたつとして粘性流体の運動方程式をとくと，U が z の関数として表される。この U を用いて計算される流路内の流量を M とする。透過性壁面 OO′ を仮に非透過性壁面でおきかえたとすると，流路内の流れは二次元 Couette 流となり，U の分布曲線は第3図の破線 LC_0O の形になる。このときの流量を M_0 とすると，$\Phi=M/M_0$ が，圧力勾配 G を含まない，$h/\sqrt{B_0}$ と α との簡単な関数で表されることが知られる。

Beavers は流体として水と空気とを用いて M を実測し，h のいろいろな値について Φ を定めた[1),2)]。その結果，実験でえられた Φ と h との関係が，(15)式の境界条件を使って得られた理論的関係とよく合うことが確められた。同時に，数種の多孔物質について α の値が求められた。多孔物質の性質により，α の値は 0.1 から 4.0 のあいだで変った。この Beavers の方法によると，α の値の決定に多孔物質内の流速 u に関する智識を必要としない。巧妙な方法というべきであろう。

IV. 透過性壁面における層流の一般境界条件

1. 一般境界条件

第2図の B 点から N 点までの間にある層が，第 II 節の終りで名づけた遷移層である。こ

の遷移層の存在を無視することにしよう。すると，多孔質内流体の透過性壁面 OO′ での流速は深部流速 u_B となり，流体は面 OO′ で (U_0-u_B) の速度をもって「滑る」ことになる。Beavers の仮定した境界条件式(15)は，流路内流体の流速の勾配 dU/dz が，面 OO′ で，この滑り速度 (U_0-u_B) に比例すること示す式に他ならない。ただ，Beavers は，深部流速 u_B の代りに深部濾過流速 $u'_B=\varepsilon u_B$ を使い，滑り速度を $(U_0-u'_B)$ とした。このように，遷移層の存在を無視した結果，Beavers の研究では，多孔質内流体の流動に関する詳しい智識が不要となった。。

しかし，遷移層は，ある厚さをもって実際に存在するから，それを無視しない理論を作ることが望ましい。それで，Beavers の境界条件とは別に，まえがきで述べた理由に基づき，透過性壁面 OO′ における力学的境界条件として

$$(\tau_{zx})_{z=+0}=a(\tau_{zx})_{z=-0} \tag{16}$$

を，また運動学的境界条件として

$$U_0=bu_0 \tag{17}$$

を設定し，このふたつを，この論文では「一般境界条件」とよぶ。a と b とは透過性壁面の性質によって定まる無次元常数である。式(16)の左辺と右辺の第2因子とは，面 OO′ の上面と下面とにおける流体内平均剪断応力 τ_{zx} の値である。U_0 と u_0 とは，流路内および多孔質内の流体の面 OO′ における流速で，第 III 節第1項にある U_0 および u_0 と同じである。

式(16)(17)の一般境界条件が正しいなら，そのなかに，Beavers の境界条件式(15)が，含まれる筈である。実際，次の第2項で示すように，第 II 節でえた結果に(16)(17)式を組合せるとある条件のもとに於てではあるが，(15)式が導かれる。

2. Beavers の境界条件と一般境界条件

Beavers の実験でも，流路内の流体が多孔物質内の流体を引きずって遷移層を出現させる。それゆえ，風の平均流によって透起される雪内気流に関して導いた第 II 節の結果を，そのまま，Beavers の多孔質内の流動にあてはめてよい。

式(16)の右辺の第2因子は，多孔物質内の流体に現れる剪断応力の透過性壁面 OO′ における値に他ならない。よって，それを表わす式は，第 II 節の(8)式の u^* に，それの $z=0$ での値 (u_0-u_B) を用いた。

$$\left.\begin{aligned}(\tau_{zx})_{z=-0}&=(\mu+\mu' u_0)(du/dz)_{z=0}=\sqrt{\varepsilon/B_0}\,(u_0-u_B)\sqrt{1+D}\\ D&=\mu'(2u_0+u_B)/3\mu\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

で与えられる。式(16)の左辺は，流路内の流体が現す面 OO′ での剪断応力である。これは

$$(\tau_{zx})_{z=+0}=\mu(dU/dz)_{z=0} \tag{19}$$

として表される。

式(18)と(19)とを(16)式に代入したうえ，(17)式を使って変形すると

$$(dU/dz)_{z=0}=(a/b)\sqrt{\varepsilon/B_0}\,(U_0-bu_B)\sqrt{1+D} \tag{20}$$

がえられる。この式を Beavers の式(15)と一致させるには

$$D=0, \qquad b=\varepsilon, \qquad a=\alpha\sqrt{\varepsilon} \tag{21}$$

とおけばよい。もし，u_0 が充分に小さくて，$\mu' u_0 \ll \mu$ となるならば，$u_B < u_0$ だから，$D \ll 1$ である。すなわち $D=0$ とおくのと同じ結果になる。よって，Beavers の仮定した境界条件は，多孔物質内の流速の透過性壁面における値 u_0 が充分に小さいという制限のもとに，$b=\varepsilon$ とおいた(16)式および(17)式の境界条件に等価であるといえる。

Beavers の式(15)は，結局，流路内を流れる流体の面 OO′ における剪断応力と流速との関係である。ところで，論文 I の運動方程式によって，面 OO′ における多孔物質内流体の剪断応力と流速との関係を与えるものとして(18)式が導かれた。流路内流体および多孔質内流体の面 OO′ における剪断応力の間と流速の間とにある関係を示すのが一般境界条件である。式(20)は，この一般境界条件をつかって，(18)式を，多孔質内流動による表現から流路内流動による表現に変換したものに過ぎない。

剪断応力 τ_{zx} の測定は困難である。したがって τ_{zx} の直接測定によって一般境界条件の定数 a を定めうる見込は殆んどない。しかし，空隙率 ε の測定と共に Beavers の実験をおこなって α を求めれば，b の値はもちろん，(21)式をつかって a の値も定められる。

3. 流速で表した一般境界条件

式(18)の左辺と中央項との関係は，$\mu' u_0 \ll \mu$ ならば

$$(\tau_{zx})_{z=-0} = \mu (\mathrm{d}u/\mathrm{d}z)_{z=0} \tag{22}$$

と書ける。したがって，(16)式と(17)式とは，$b=\varepsilon$ の関係を用いて

$$(\mathrm{d}U/\mathrm{d}z)_{z=0} = a(\mathrm{d}u/\mathrm{d}z)_{z=0}, \qquad U_0 = \varepsilon u_0 \tag{23}$$

と表わしてもよい。運動方程式の解を求めるにあたっては，(23)式の形の境界条件が便利である。なお，(16)式(17)式の形の境界条件にせよ(23)式の形の境界条件にせよ，透過性壁面の外の層流が Beavers の実験での層流と異っていても成立する，一般的境界条件であることはいうまでもない。

4. 得られた結果の検討

空隙率 ε は1より小さい。よって，(17)式の b が ε に等しいことは，第1項の終りで指摘した $U_0 < u_0$ の関係に適合する。しかし空隙流速 u は，多孔物質の空隙内にある流体の実際の平均流速である。実際の流速に不連続は生じえない。よって u は，透過性壁面で連続的に壁面外の流速 U に移行すべきである。すなわち，$u_0 = U_0$ であるべきである。この矛盾は，これまでの理論が，透過性壁面を一枚の幾何学的平面と見なす巨視的理論であることに由来する。透過性壁面に厚さを考えれば，次の論文 III で示すように，実際の流速の変化は連続でありながら $U_0 < u_0$ となることが説明される。

第2項で述べたように，Beavers は，(15)式の α が無次元であることから，α には流体の分子粘性係数 μ が含まれないとした。しかし，多孔質内流体には μ と構造乱流にもとづく $\mu' u$ との2種類の粘性係数がある。両者の比は無次元だから，この比が α に含まれても差しつかえない。実際，(20)式の右辺のうち

$$(a/b)\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1+D} \tag{24}$$

の因子が α にあたり，D は両粘性係数の比である。

式(18)が示すように，D は $u_0^*=(2u_0+u_B)$ に比例する。それ故，u_0^* が充分に小さくなければ，a と α との少くも一方は u_0^* の値によって変化し，多孔物質の表面の性質だけできまる定数ではありえない。仮に a が定数であるとすれば，α は(24)式にしたがって u_0^* の増大とともに増大する。しかし，Beavers のおこなった α の測定は，この増大の存否を判定しうるほどには精密でない。

V. ま と め

透過性多孔物質の表面に平行に流体が層流として流れる場合を考える。この層流は，多孔物質の空隙をみたす流体をひきずり，表面直下に内部流動を生ぜしめる。表面における境界条件として

$$(\tau_{zx})_{z=+0}=a(\tau_{zx})_{z=-0}, \qquad U_0=bu_0 \tag{A}$$

を設定した。x と z とは，表面上に原点をおく流動方向および上方にむく座標である。U_0 および u_0 は外部流動および内部流動の表面における平均流速を表わす。a と b とは多孔物質の表面に固有な定数で，その値は実験によって定められるべきものである。雪面を吹く風は必ず乱流である。それで，多孔物質が積雪のばあいは，風の平均流速と同じ流速で流れる層状気流を外部流動とする。

Beavers と Joseph とは，巧妙な実験方法を案出し，人工多孔物質について，表面における境界条件として

$$(\mathrm{d}U/\mathrm{d}z)_{z=0}=\sqrt{\alpha/B_0}\,(U_0-\varepsilon u_B) \tag{B}$$

を仮定し，表面に固有な常数 α の値を実験によって決定した。流体には空気，水その他の液体を用いたが，α の値は流体の種類には無関係に只多孔物質の微小構造にのみ依存し，0.1 と 4.0 との間に現れた。式(B)で，B_0 および ε は多孔物質の比透過係数および空隙率，u_B は多孔物質内深部での空隙流速である。

論文 I でえた多孔性物質内流動に関する運動方程式 (I, 33) を利用して内部流動の平均流速，すなわち空隙流速 u およびその導関数 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$ を z の関数として求めた。その $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$ を用いて(A)式から(B)式に近い形の式を導き，それにより

$$a=\alpha\sqrt{\varepsilon}/\sqrt{1+D}, \qquad b=\varepsilon \tag{C}$$

の関係をえた。D は u_0 の増大によって増大する数である。よって，u_0 が非常に小さければ $a=\alpha\sqrt{\varepsilon}$ としてよい。かくして，空隙率 ε を測定したうえ，非常に小さい流速で Beavers の実験をおこなって α を定めれば，a の値が求められる。

式(C)の関係で結ばれているから，a と α とは共に定数ではありえない。どちらかは，あるいは両方ともに，軽くではあるが流速によって変る筈である。しかし，現在は，それを決定するに足るほどの実験的材料がない。

座標 z と u との関係は，第 II 節に示したように，初等関数で表わされる。

この論文を書くにあたっては，北海道大学低温科学研究所の石田 完教授をはじめとする

気象部門の研究員にいろいろ検討してもらった。ここに記して感謝の意を表す。

文 献

1) Beavers, G. S. and Joseph, D. D. 1967 Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.* **30-1**, 197-207.
2) Beavers, G. S., Sparrow, E. M. and Masha, B. A. 1974 Boundary condition at a porous surface which bounds a fluid flow. *AIChE J.* **20**, 596-597.
3) 吉田順五 1978 雪内空気の流動理論, I. 低温科学, 物理篇, **36**, 11-27.
4) Dubrovin, L. I. 1965 Air currents in the snow and firn layer of Lazarev Ice Shelf. *Soviet Antarctic Expedition*, **3**, 218-219.
5) 吉田順五 1977 風が誘起する雪内気流. 低温科学, 物理篇, **35**, 47-65.

Summary

1. It is imagined that a wind blows over the horizontal surface of a snow cover in the form of laminar flow with no turbulence accompanied, dragging the air that fills interstices of the snow lying near the surface. For such an imaginary case, the present author writes

$$(\tau_{zx})_{z=+0} = a(\tau_{zx})_{z=-0} \qquad (1)$$

and

$$U_0 = bu_0 \qquad (1')$$

as boundary conditions at the surface of the snow cover, where

x, z: coordinates taken respectively leeward and upward with the origin on the surface,
U_0, u_0: respective values at the surface of velocity of the wind and intersticial velocity of the air in snow,
τ_{zx}: mean value of microscopic shear stresses of the air,
a, b: constants whose values are determined by the nature of the snow surface.

Boundary conditions (1) and (1′) are applicable also to other kinds of fluids and porous materials if only the fluid makes a rectilinear and laminar flow over their surface.

2. Beavers and Joseph made on artificial porous materials an experiment, which will be described in Article 4, and found that the result of their experiment was in good accord with the theoretical result obtained by assuming the boundary condition

$$(\mathrm{d}U/\mathrm{d}z)_{z=0} = (\sqrt{\alpha/B_0})(U_0 - \varepsilon u_B) \qquad (2)$$

at the surface of the materials (Ref. 1). In formula (2)

ε, B_0: porosity and specific permeability of the porous materials,
α: dimensionless constant characteristic of the structure of the porous surface,
u_B: intersticial velocity of the fluid deep in the porous materials.

3. The present author derived in Paper I equations of motion applicable to the fluid flowing within a porous material, regarding that shear stress arises in it from two causes: molecular viscosity and structural turbulence. Let $u(z)$ be a solution of the equations of motion such that it fits the experimental conditions of Beavers and Joseph. Then it is possible, by use of $\mathrm{d}u(z)/\mathrm{d}z$, to draw formula (2) from formulae (1) and (1′) with the result that constants a and b in the latter formulae are expressed by those in the former as

$$a = \alpha\sqrt{\varepsilon} \quad \text{and} \quad b = \varepsilon, \qquad (3)$$

provided that $u_0 = u(0)$ is so small as to make the shear stress due to a structural turbulence disappear before that due to molecular viscosity.

4. Figure 2 of the text shows schematically the experimental arrangement of Beavers and Joseph. Impermeable plate M is placed a short distance h above surface OO′ of the artificial porous material. Water fills its interstices as well as the channel between M and OO′. Whole of the water flows from the left to the right under the action of a constant pressure gradient G with velocity profile LCA in the channel and BNN′ within the porous material. As h is very small, the flow in the channel is laminar.

5. Beavers and Joseph measured experimentally flux M of water through the channel, while on the other hand they calculated the same flux using the boundary condition given by formula (2). Broken curve LC_0O in Fig. 2 gives a velocity profile in the channel when OO′ is supposed to be impermeable; let M_0 denote the flux calculated for this case. Ratio $\Phi = M/M_0$ is independent of G and makes a simple function of $h/\sqrt{B_0}$ and α. Beavers and Joseph found a good agreement between the observed and the calculated values of Φ, and, in doing so, they could determine the magnitude of α which turned out to lie between 0.1 and 4.0.

6. The flow of water through the porous material is governed by equations of motion (1) shown in the English Summary of Paper I. If coordinates x and z are placed in Fig. 1 respectively to the right and upward from point O, the equations of motion are reduced to the single equation

$$G + (\mu + \mu' u)\, \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}z^2 + \mu' (\mathrm{d}u/\mathrm{d}z)^2 - (\varepsilon/B) = 0, \tag{4}$$

because v, w vanish whereas u is independent of x, y and q turns out to be equal to u. The solution of equation (4) gives $u(z)$ mentioned in Article 3.

7. When integrated, equation (4) yields

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}z = (\sqrt{\varepsilon/B})\, u^* \sqrt{\mu_B + (2/3)\mu' u}\,/(\mu + \mu' u) \tag{5}$$

with

$$u^* = u - u_B, \qquad \mu_B = \mu + \mu' u_B \qquad \text{and} \qquad u_B = BG/\varepsilon, \tag{6}$$

where the constant of integration is so chosen that $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z = 0$ for $z = -\infty$. Then formula (2) in the English Summary of Paper I gives, together with the above equations (5) and (6)

$$(\tau_{zx})_{z=-0} = (\mu + \mu' u_0)(\mathrm{d}u/\mathrm{d}z)_{z=0} = \sqrt{\varepsilon\mu/B}\,(u_0 - u_B)\sqrt{1+D} \tag{7}$$

with

$$D = \mu' (2u_0 + u_B)/3\mu, \tag{8}$$

which makes the second factor on the right side of formula (1). The left side of the same formula is given by

$$(\tau_{zx})_{z=+0} = \mu (\mathrm{d}U/\mathrm{d}z)_{z=0}, \tag{9}$$

because flow of water is laminar in the channel of Fig. 1.

8. Formula (1) is transformed into

$$(\mathrm{d}U/\mathrm{d}z)_{z=0} = (a/b)\sqrt{\varepsilon/B_0}\,(U_0 - bu_B)\sqrt{1+D}, \tag{10}$$

when both of its sides are replaced by the right members of equations (7) and (9), U_0/b being substituted for u_0 by virtue of formula (1′). Comparison of equations (2) and (10) leads to the relations

$$a = \alpha\sqrt{\varepsilon}\,/\sqrt{1+D} \qquad \text{and} \qquad b = \varepsilon. \tag{11}$$

When u_0 is so small as to make D negligible against one, they are reduced to relations (3) shown in Article 3.

9. If the dimensionless variables

$$s=(\mu'/\mu_B)(u-u_B) \qquad \text{and} \qquad \zeta=z\sqrt{\varepsilon/(\mu_B B)} \tag{12}$$

are used, the integral of differential equation (5) is expressed by

$$\zeta=F(s)-F(s_0), \tag{13}$$

where $F(s)$ is a function of s as illustrated by the curves in Fig. 1 of the text, while s_0 is the value of s corresponding to $u=u_0$. Analytical expression for $F(s)$ is given by

$$F(s)=3S-\ln\left\{(S+1)/(S-1)\right\} \qquad \text{with} \qquad S=\sqrt{1+(2/3)s}\ . \tag{14}$$

10. Since the fluid flowing over the surface drags that flowing below it, U_0 should be greater than u_0. But the above obtained result $b=\varepsilon$ gives $U_0<u_0$, because ε is always smaller than one. This contradiction will be solved in the next Paper III.

低温科学　物理篇　第36輯　訂　正

頁	行	誤	正
16	上から16	統形的	統計的
23	下から1	(B/ε)	(ε/B)
27	上から10	S_1+S_2	$S_1'+S_1''$
34	下から12	第3図	第2図
37	〃　12	(I, 33)	(I, 35)
39	上から18	Fig. 1	Fig. 2
〃	〃　21	$-(\varepsilon/B)=0$	$-(\varepsilon/B)u=0$
〃	〃　25	$(2/3)\mu' u/$	$(2/3)\mu' u^*/$
〃	下から7	Fig. 1	Fig. 2
44	上から13	変ル	変る
47	〃　4	$\tau+\tau'\varepsilon'/$	$\tau+\tau''\varepsilon'/$
48	〃　15	あるうとい	あるという
50	下から8	曲織	曲線