



Title	斜面積雪の挙動の研究 : 単独鉛直主応力状態
Author(s)	吉田, 順五
Citation	低温科学. 物理篇, 39, 1-16
Issue Date	1981-03-18
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/18408
Type	bulletin (article)
File Information	39_p1-16.pdf



[Instructions for use](#)

斜面積雪の挙動の研究 VII*

— 単独鉛直主応力状態 —

吉田 順五

(北海道大学名誉教授)

(昭和55年10月受理)

I. ま え が き

藤岡を主任とする北海道大学低温科学研究所の雪害科学部門は、斜面につもった積雪内部の応力の実測を数年来つづけて行い、このほど、その結果をまとめて発表した^{1,2)}。応力の測定法は文献3), 4)にくわしいが、それには応力と歪との数量的関係が使われていない。測定結果は、最大傾斜方向に立つ鉛直面内にある主応力の大きさと方向とを用いて表示された。応力は積雪表面からの深さによって異なり、時間の経過とともに変るが、測定結果をみると、ふたつの応力主軸がほぼ鉛直および水平で、水平方向の主応力が鉛直方向の主応力にくらべ、絶対値において著しく小さい場合の多いのが目につく。このような応力を「単独鉛直主応力」と名づけよう。

積雪は、応力の変化が緩慢なときは、粘性係数の非常に大きい圧縮性粘性流体とみることができる。この論文では、斜面積雪を圧縮性粘性流体として、単独鉛直主応力の発生条件を理論的に考察する。その結果、単独鉛直主応力は、積雪が、「持続上部均一」という条件をみたしつつ、傾斜方向の伸縮をとまわずに斜面を流下するときに発生することが示される。また、両応力主軸の鉛直方向あるいは水平方向からの偏角 α 、および水平主応力 σ_1 と鉛直主応力 σ_3 との比 $\gamma = \sigma_1/\sigma_3$ が、ともに積雪の塑性ポアソン比 ν と積雪表面の傾斜角 θ との関数としてあたえられる。

塑性ポアソン比 ν の値は、理論的に、 -1 と $+0.5$ との間にかぎられる。その最大値 $\nu = 0.5$ は非圧縮性を、すなわち圧縮性が 0 であることを意味する。圧縮性は、 ν が 0.5 から減少するにつれ増大し、 ν の最小値 -1 で無限大となる(文献5の p. 57)。測定された γ および α の値と、この論文の理論的結果との比較から、斜面積雪の ν の値が $0.3 \sim -0.1$ の範囲にあることが示される。

II. 実測された積雪内応力と単独鉛直主応力

1. 実験斜面

藤岡たちが応力を測定したのは、北海道天塩郡幌延町問寒別の北海道大学天塩地方演習林内にある実験斜面につもった雪についてである。実験斜面は笹におおわれた立木のない平坦な

* 北海道大学低温科学研究所業績 第2273号

斜面で、東西にはしる海拔 230 m の尾根から真北にむかってくだる。毎年、秋のおわりに笹や雑草を刈りとり、整地して凹凸のない斜面に仕あげる。この斜面につもる雪の斜面に直角な方向の厚さを M で表すと、 M の最大値は 1 m をこえ、年によりしばしば 1.5 m に達する。

応力の測定は 1 月中旬から 3 月中旬にかけ、昭和 49 年から昨年の昭和 54 年まで 6 回の冬にわたって行われた。こんども続けられるであろう。この地の気温は、平均値が 1 月には -10°C 付近に、2 月には -5°C 付近にある。最高気温が 0°C をこえることは 1 月には殆どなく、2 月でも珍しい。実験斜面は直射日光をうけることもない。それゆえ、この斜面の雪は、応力測定期間中、その全体が 0°C 以下の温度にあり、新雪からしまり雪へ、それから更にしもぎらめ雪への乾燥変態を行う。ただし、地面と接する積雪の底だけは 0°C に保たれ、緩慢に融解する。

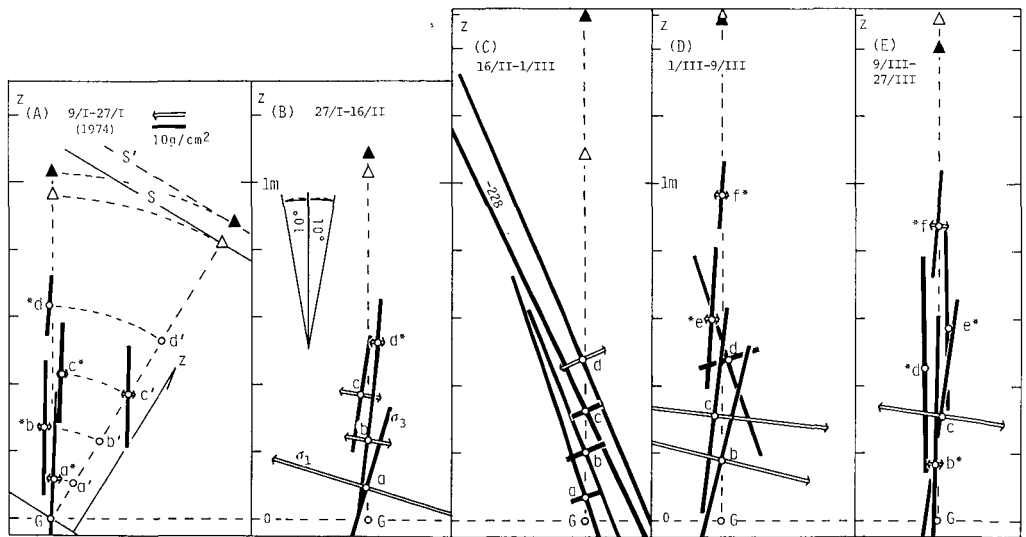
なお、実験斜面は冬の季節風の風下斜面であるうえ、その両側は林である。したがって風がよわく、この斜面の積雪の成層構造は、風に乱されることが殆どない。

2. 測定された応力の例

実験斜面は横幅が広いから、斜面の等高線の方には、雪の性質も応力の分布も変化しないと考えられる。それで応力は、等高線に直角な鉛直面内の、すなわち最大傾斜線をふくむ鉛直面内の二次元歪の応力として測定された。

第 1 図に、一例として、昭和 49 年の 1 月から 3 月にかけて行われた応力測定の結果を示す。測定場所は、実験斜面の頂から、斜面にそって 60 m くだった傾斜 32° の地点で、測定地点 D_1 となづけられた。

第 1 図の縦軸は、斜面の表面から斜面に垂直な方向に測った距離 z を表す。点 G は斜面上にある点で、 G 点の上方に並ぶ小さい白丸印の点 a, b, c, \dots, f が、応力が測定された積雪内



第 1 図 斜面積雪の中立区で実測された積雪内応力。応力は主応力によって表されている。*印をつけた測定点の応力は単独鉛直主応力である。主応力が張力ときは中白の線で、圧力のときは太い黒線で表した。白三角形と黒三角形とは、歪測定期間の初日と終日における積雪表面 S, S' の位置を示す

の位置を z によって与える。第1図(A)に示すように、測定点 a, b, c, d の実際の位置は、 G 点から斜面に垂直にたてた直線上の点 a', b', c', d' の位置である。点 G から点 a, b, c, d までの距離は、点 G から点 a', b', c', d' までの距離に等しくとってある。

測定点 a, b, c, \dots, f で十字に交る二本の直線が、その点の位置での主応力 σ_1 と σ_3 とを表す。応力の主軸の方向は直線の方向と一致し、主応力の大きさは直線の長さで与えられる。先端に山形の印をつけた中白の直線は張力を、先端が突然に切れている太い黒い直線は圧力を表す。

応力は次のようにして決定された^{3,4)}。積雪を構成する雪層のうちのいくつかに、3本ないし4本の水平に長い直径1 cmの孔を平行に明け、これを雪層内につけた目印の組とする。この目印の組の中心が測定点 a, b, c, \dots, f である。2週間ないし3週間の期間に生ずる目印の位置の変化から測定点付近の雪のなかに生じた歪を計算する。この期間を「歪測定期間」と名づけよう。測定点 a, b, c, \dots, f での応力は、歪と応力との数量的関係は用いず、ただこうして得られた歪の主軸の方向が応力的主軸の方向を与えるとの仮定をおいて、決定された。それゆえ、第1図に示した応力は歪測定期間中にはたらいっていた応力の平均値にほかならない。第1図に(A)から(E)まで5個の図があるのは、応力の測定が相つぐ5個の歪測定期間について行われたからである。5個の図には、それぞれ、歪測定期間を示す日付がかきいれてある。たとえば(B)図の27/I-16/IIは、歪測定期間が1月27日から2月16日にいたることを表す。

図(A)-(E)のおおのにおに示された測定点 a, b, c, \dots, f の位置は、歪測定期間の初日のものである。測定点は、各図に示された歪測定期間のあいだに、次の図の同じ英字記号で示された点の位置まで下降する。図(D)には測定点 a が見えない。この点を含む雪層があまりに地面に近づいて応力の決定ができなかったからである。その代り、(D)図には積雪が厚くなったために新たに設定された測定点 e, f が現れている。各図にある白三角印と黒三角印とは、それぞれ、歪測定期間の初めと終りにおける積雪表面の位置を示す。

3. 単独鉛直主応力

第1図(A)の測定点 a, b, c, d における応力は、全部「まえがき」でのべた単独鉛直主応力である。太い黒線で表した主応力 σ_3 は圧力でほぼ鉛直に立つ。それに直角な主応力 σ_1 は張力であるが、鉛直主応力 σ_3 にくらべると絶対値が3~10%にすぎない。第1図全体について見ると、応力は、時間的にも積雪内の深さによっても複雑な変化を示すが、単独鉛直主応力として現れる場合の多いことに気がつくであろう。実際、第1図の(A)から(E)までの5個の図に示された22個の応力のうち、*印をつけた半数の11個が単独鉛直主応力である。残りの単独鉛直主応力でない応力を「非単独鉛直主応力」ということにする。第1図は昭和49年にえられた結果だが、ほかの年の結果についても同様なことがいえる。

積雪上層部の雪は、普通、新雪かこしまり雪で非常に圧縮されやすい。そのため、目印としてあけた孔が歪測定期間中につぶれて消えてしまい、歪が、したがってまた応力が、決定できない場合が多い。第1図に上層部での測定結果が見られないのはその為である。しかし、上層部でも応力測定に成功することがある。その結果によると、上層部の応力が単独鉛直主応力から著しく外れるのは、風がオホーツク海方面から吹いて地吹雪をおこして雪を圧密したり、

春さきの気温融雪で雪の密度が増大したりする場合である。したがって、このような特別な原因による密度増大がないかぎり、積雪上層部の応力は単独鉛直主応力であろうと推定される。この推定が正しければ、斜面積雪の全体積の3分の2あるいはそれ以上が、ほとんど常に、単独鉛直主応力で支配されることになる。

4. 非単独鉛直主応力

通常、斜面積雪全体を伸張区、中立区、圧縮区の3区にわけて考える。斜面積雪の上部は、斜面の頂に懸っているため、斜面を流下しようとする積雪に引かれて伸張する。この伸張のおこる斜面積雪の上部が伸張区である。斜面の麓の平地にある積雪は動こうとしないから、斜面下部の積雪は圧縮されて圧縮区を形成する。伸張区と圧縮区との間にある斜面積雪の中部が中立区で、中立区の積雪は伸張も圧縮もうけないと考えられている。斜面の頂からも麓からも遠くへだたり、そのいずれからも影響をうけない状態にあるからである。それで、この考えにしたがえば、中立区の積雪の状態は、頂と麓とが無制限にある無限に長い一様な斜面に均一につもった「無限斜面積雪」の状態と変わらないことになる。

第2項でのべたように、第1図の応力が測定された測定地点 D_1 は、積雪の厚さの40倍以上に達する60 mもの距離を、実験斜面の頂から斜面ぞいにくだった所にある。また、実験斜面は、測定地点 D_1 の下方にも、40 mほど裸地のままの同じ状態でつづき、その先は立木のある斜面となる。それゆえ、測定地点 D_1 は斜面積雪の中立区にあり、第1図に示された応力は中立区の積雪内応力であるといえる。

第IV章の第2図は、斜面積雪の最大傾斜線をふくむ鉛直断面である。この図にあるように、座標 x および z を、それぞれ、積雪表面に平行および垂直にとると、無限斜面積雪の場合には、斜面方向の並進対称性だけから、応力成分 σ_z , τ_{zx} の値が決定される。しかし、応力成分 σ_x は、応力と歪あるいは歪速度との関係があたえられない限り、未定のままに残される。すると、応力と歪あるいは歪速度との関係を不明のままに放置して、 σ_x に適当な値をえらび、それと上記の σ_z および τ_{zx} とを組合せて第1図の応力を作りあげる可能性がうまれる。もしそれを実現しえたとしたら、第1図の応力は、すべて、無限斜面積雪内の応力と同じになる。

しかし、積雪内部に現れる応力と歪あるいは歪速度との間には一定の関係があるに相違ない。次の第III章で示すように、その関係は、圧縮性粘性流体における応力と歪速度との関係にひとしい。この関係を用いると、積雪内のある点が次の章で定義される「持続上部均一」の条件をみたすなら、その点の応力が単独鉛直主応力になることが証明される。また、この単独鉛直主応力の σ_z , τ_{zx} が無限斜面積雪の σ_z , τ_{zx} と一致するという結果をうるから、この単独鉛直主応力は無限斜面積雪の応力に属することになる。

ところで、無限斜面積雪は、その内部のすべての点で持続上部均一の条件をみたすのである。よって、無限斜面積雪においては、応力がいたるところ単独鉛直主応力である筈で、非単独鉛直主応力が発生することはありえない。しかるに、実際の斜面積雪の中立区には、第1図が示すように、非単独鉛直主応力が現われた。

このようにして、応力の実測の結果により、中立区の応力が無限斜面積雪内の応力にひとしいとする通説は否定されなければならないことになる。ただ、前項でのべたように、中立区

の積雪の体積の3分の2は、無限斜面積雪内応力に属する単独鉛直主応力で占められている。その意味で、うえの通説も、だいたいにおいては正しいと言ってよいかも知れない。

III. 予 備 考 察

1. 圧縮性粘性流体としての斜面積雪

積雪は粘弾性体で、その粘弾性は Maxwell 流体模型と Voigt 固体模型とを直列につないだ機械模型で表示することができる^{6,7)}。この機械模型の力学的特性は2個の弾性係数と2個の粘性係数とで定められる。しかし、この機械模型の応力 q が時間的に変化しない特別の場合には、 q と機械模型の歪 s の変化速度 \dot{s} との間に、ただ1個の係数しか含まない

$$q = \eta_M \dot{s} \quad (1)$$

の関係がなりたつ。 η_M は、機械模型を構成する Maxwell 流体模型の粘性係数である。つまり、 q が一定の場合には、 q はそれ自身に比例する一定値の歪速度 \dot{s} を生ぜしめるだけで、機械模型の運動は η_M を粘性係数とする粘性流体の流動と形式上おなじになる。

応力 q が時間的に変化すれば、機械模型の運動に他の3個の係数が関係する。しかし、 q の変化が非常に緩慢ならば、他の3個の係数の影響はきわめて小さく、(1) 式の関係が高い近似度でなりたつに違いない。すなわち、非常に緩慢に変化する応力による機械模型の運動は粘性流体の運動とおなじと考えてよい。

斜面につもった積雪の流動は非常に緩慢だから、そのなかの応力の変化も非常に緩慢である。それで、うえに述べたことを根拠にして、この論文では、斜面積雪を粘性流体とみなし、斜面積雪内の剪断応力 τ と剪断歪速度 $\dot{\gamma}$ とのあいだに、 η を粘性係数として

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (2)$$

が成立するとする。

ただし、積雪の粘性係数 η は水の粘性係数の 10^{11} 倍ないし 10^{12} 倍もの値で、非常に大きい^{7,9)}。また、積雪は時間の経過につれて変態するから粘性係数は時間 t の関数である。しかし、ある時刻 t に考察を限定すれば、 η は τ によって変化しない常数である。

2. 粘性流体としての積雪の圧縮性、塑性ポアソン比

積雪は、内部に小空隙がたくさんあって圧縮されやすい。よって、斜面積雪を粘性流体とみるにしても、それは圧縮性流体であるとしなければならない。この論文では、その圧縮性の程度を塑性ポアソン比 ν で示すことにする。

雪の柱の軸の方向に伸張力あるいは圧縮力を加えたとき、軸方向に歪速度 $\dot{\epsilon}_a$ が、軸と直角の方向に歪速度 $\dot{\epsilon}_b$ が生じたとしよう。塑性ポアソン比とは

$$\nu = -\dot{\epsilon}_b / \dot{\epsilon}_a \quad (3)$$

のことである。粘性流体としての積雪の圧縮性は $\nu = 0.5$ のときに0で、 ν が0.5より小さくなるにつれ大きくなる。

粘性係数の小さい流体を扱う粘性流体力学では、圧縮性に関連する常数として第二種粘性係数 ζ を ν の代りに用いる (文献8の p. 52, p. 348)。重力が作用する地球上では、粘性係数の

小さい流体は柱の形を保ちえず、(3)式による ν の定義が使えないためであろう。

3. 塑性ポアソン比の実測値

篠島が、密度 $0.09 \sim 0.28 \text{ g/cm}^3$ の雪の柱に伸張力、圧縮力を加えて雪の塑性ポアソン比 ν を測定した。その結果によると、 ν の値は伸張の場合と圧縮の場合とで著くちがう。伸張の場合の ν の直接測定値は $0.39 \sim 0.65$ の範囲に分布し、平均値は上記の密度範囲を通じて 0.49 である。ところが、圧縮の場合の ν は平均値が 0.03 で、伸張の場合の平均値の 18 分の 1 にすぎない。直接測定値の分布範囲は $0.01 \sim 0.1$ で、平均値は、この場合にも、密度によって変らない⁹⁾。

成田は温度 $-7 \sim -10^\circ\text{C}$ 、密度 $0.37 \sim 0.39 \text{ g/cm}^3$ のしまり雪の円柱を、側圧をかけながら軸方向に圧縮した。同時に円柱の体積の変化をはかり、えられた体積変化と軸方向の圧縮量とから、雪を粘性流体とみなして、塑性ポアソン比 ν を算出した。側圧の強さのちがひ、圧縮速度のちがひにより、 ν は -0.18 から $+0.2$ にいたるいろいろな値を示した¹⁰⁾。

若浜も、温度 $-8 \sim -12^\circ\text{C}$ 、密度 $0.27 \sim 0.42 \text{ g/cm}^3$ のしまり雪の薄片を圧縮して、 0.27 から 0.42 にいたる塑性ポアソン比をえた。用いた薄片は厚さ $0.5 \sim 0.7 \text{ mm}$ で一辺が $2 \sim 3 \text{ cm}$ の正方形であった¹¹⁾。

塑性ポアソン比 ν が、伸張の場合では圧縮の場合にくらべ著しく大きいという篠島の測定結果は注目すべき事柄である。しかし、これを考慮すると理論が複雑になるからこの論文ではそれを無視し、 ν は伸張圧縮いずれの場合も同じ値であるとしよう。すると、圧縮性粘性流体である積雪の ν は、まえがきで述べたとおり、理論上、 -1 以下の値および $+0.5$ 以上の値をとれない。このことと、うゑに述べた測定結果とから考えて、積雪の塑性ポアソン比 ν は

$$\nu = -0.1 \sim 0.4 \quad (4)$$

の範囲にあるとしてよいであろう。雪質や密度、また温度がことなるにつれ、 ν はこの値の範囲内で変化すると見るわけである。

雪は多孔質の物体だから、 ν が負になる機構も考えられるし¹²⁾、現に成田は負の値の ν を測定によって得た。弾性ポアソン比が、負ではないにせよ殆ど 0 にひとしい物質としてコルクが知られていることから見ても (文献 13 の p. 233)、積雪の塑性ポアソン比 ν が負になりうることは不思議でない。しかし、あまりに絶対値の大きい負の値はありそうにもないから、うゑのように -0.1 をもって ν の下限とした。

IV. 斜面積雪内の上部均一条件をみたす点における応力

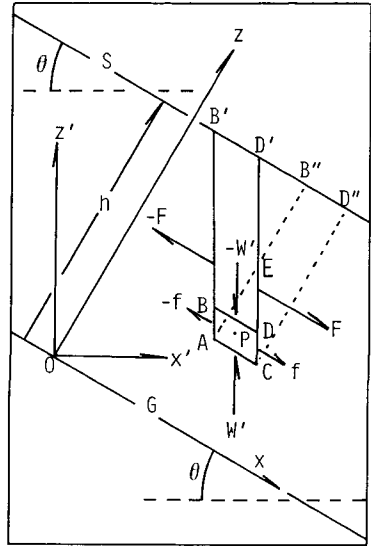
この章では、次の第 V 章で利用するため、土圧論のひとつの定理の要点を、平坦な斜面上の積雪の中立区に関連して説明する。ただし、用語はこの論文だけで便宜つかうもので、土圧論では通用しない (この定理については、たとえば、文献 14 の p. 63, 文献 15 の p. 127 を参照)。

1. 上部均一条件と持続上部均一条件

第 2 図は、平坦な幅のひろい斜面につもった積雪中立区、最大傾斜線をふくむ鉛直断面である。線 G が斜面を、線 S が積雪表面を表わし、両者は互に平行で傾斜角は θ であるとす

る。斜面 G 上の一点 O から斜面にそい下むきに座標 x を、斜面に直角上むきに座標 z をとる。また、座標 x' と z' とを、それぞれ、水平右むき鉛直上むきにとる。

積雪の状態は、第2図の紙面に垂直な y 方向に均一であるから、 y 方向の厚さが単位長さに等しい積雪を考えれば充分である。第2図に示したように、積雪内の任意の一点 P を左右からはさむ極めて近接した2枚の鉛直面 AB' , CD' をつくる。面 AC と面 BD とは積雪表面 S に平行で、面 AB および面 CD と共に点 P を中心とする微小体積 $ABCD$ をかこむ。また、おなじく点 P をはさむ極めて接近した、積雪表面 S に垂直な2枚の平面 AB'' , CD'' をつくる。いま、面 AC をふくみ積雪表面 S に平行な平面を面 P とよぶ。そして、面 P と積雪表面 S とにはさまれた雪層のうち、平行四辺形 $AB'D'C$ および長方形 $AB'D''C$ をふくむような点 P に近い部分を、 P 点の「上部近傍」とよぶことにする。



第2図 斜面積雪の中立区の最大傾斜線をふくむ鉛直断面。線 S が積雪表面、線 G が地面である

点 P の上部近傍で、積雪の状態および積雪内応力が z だけの関数で x 方向に均一な場合、点 P は「上部均一」であるということにしよう。点 P が上部均一ならば、点 P の上部近傍内の点はすべて上部均一である。斜面積雪の状態も応力も、また点 P の位置も、積雪の流動とともに変化する。しかし、その変化にもかかわらず、積雪表面 S の傾斜が変わらずに上部均一状態だけは持続する場合があります。その場合、点 P は「持続上部均一」状態にあるということにする。点 P が持続上部均一ならば、点 P の上部近傍内の点はすべて持続上部均一である。

斜面が無限に長く、その上に雪が一様につもったとすれば、積雪内のすべての点は、上部均一条件をみたすことはもとより、 x 方向の並進対称性のために、この条件をみたし続け、積雪表面の傾斜も変わらない。すなわち、無限斜面積雪は、その内部のすべての点で持続上部均一状態にある。

2. 上部均一な点における応力成分

第2図の平行四辺形 $AB'D'C$ のなかにある薄い板の形の雪を雪 Q とよぶことにしよう。点 $P(x, z)$ が上部均一であるとする。雪 Q に周囲の雪が紙面内で加える力は図に示した F , $-F$, W' の3個である。力 F は面 CD' の各点における応力ベクトルの合成、 $-F$ は面 AB' の各点における応力ベクトルの合成の向きを反転したもの、 W' は面 AC の各点における応力ベクトルの合成の向きを反転したものである。これら3個の力は、雪 Q に作用する重力と釣合いを保たなければならない。そのことと、点 P が上部均一であることから、第2図にあるように、 F と $-F$ とは積雪表面 S に平行な同一作用線上にはたらいて偶力を生ぜしめないこと、また、 W' は面 AC の中点で鉛直上方にはたらしき雪 Q の重量と釣合うことが導かれる。

力 F , $-F$, W' について知られた以上の性質から、さらに次の結果 (i), (ii) が導かれる。

(i) 鉛直上方をむく単位ベクトルを \mathbf{k}' とし,

$$w' = g \int_P^S \rho dz' \quad (5)$$

を用いると、第2図の面 AC にはたらく応力のベクトル成分は $-w' \cos \theta \cdot \mathbf{k}'$ で与えられる。上の積分で、上限 S は点 P の真上にある積雪表面 S 上の点を表し、 ρ は積雪密度であり、 g は重力加速度である。これから、点 P(x, z) における xy 面上の垂直応力成分 σ_z と剪断応力成分 τ とが

$$\sigma_z = -w \cos \theta, \quad \tau = w \sin \theta \quad (6)$$

として得られる。ここに

$$w = w' \cos \theta = g \int_z^h \rho dz \quad (7)$$

で、 h は積雪表面 S の z 座標、すなわち、積雪の厚さ M にひとしい。密度 ρ は測定により z の関数として知られる。よって w は既知量として取扱える。

垂直応力成分は張力のとき正に、圧力のとき負にとるから、(6) 式の σ_z は圧力である。なお、(6) 式の τ は、 τ_{zx} の添字 zx を省略したものである。第 II 章第 4 節でのべた無限斜面積雪内の応力成分 σ_z, τ_{zx} は (6) 式の応力成分に一致する。

(ii) 第2図の面 CD にはたらく応力のベクトル成分 \mathbf{f} は積雪表面 S に平行である。したがって、座標 x の正の方向をむく単位ベクトルを \mathbf{i} とすれば $\mathbf{f} = f\mathbf{i}$ と書ける。 f は、応力の元をもつ、正負いずれの値もとりの未知量である。これから、点 P(x, z) における yz' 面上の垂直応力成分 σ'_x と剪断応力成分 τ' とが

$$\sigma'_x = f \cos \theta, \quad \tau' = -f \sin \theta \quad (8)$$

として与えられる。

3. 完全単独鉛直主応力

点 P が上部均一であり、点 P におけるふたつの xz 面内応力主軸の方向が鉛直方向と水平方向と完全に一致することがあれば、(8) 式の τ' は 0 に、 σ'_x は水平方向の主応力 σ_1 となる。ところが、 θ が 0 でないかぎり、 $\tau' = 0$ であるためには $f = 0$ でなければならない。すると $\sigma'_x = \sigma_1$ も 0 となる。すなわち、点 P における応力は正確に鉛直な主応力 $\sigma'_2 = \sigma_3$ だけで表される。このような応力を「完全鉛直主応力」と名づけよう。

第2図の点 P をふくむ微小三角形 AEC 内の雪に周囲の雪が加える力の、点 A のまわりのモーメントを 0 とおくと

$$f = \sigma_x \cos \theta + w \sin^2 \theta \quad (9)$$

の関係がえられる。いま、点 P が上部均一で、圧縮性粘性流体である等方均一な雪層のなかにあり、そのう雪層が y 方向のみならず x 方向にも伸縮せずに流動するとすると、すなわち、 x 方向と y 方向との歪速度 $\dot{\epsilon}_x$ と $\dot{\epsilon}_y$ とが共に 0 であるとすると

$$\sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z), \quad \sigma_y = \nu(\sigma_z + \sigma_x) \quad (10)$$

の関係がなりたつ。等方均一な粘性流体の歪速度と応力とは、等方均一な弾性体の歪と応力の関係と形式的に同じ関係にあるからである。 ν は雪層の塑性ポアソン比である。

式(10)から

$$\sigma_x = \sigma_y, \quad \sigma_x = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \quad (11)$$

が導かれる。この(11)式と(6)式とを使うと、(9)式は

$$f = w \left(\sin^2 \theta - \frac{\nu}{1-\nu} \cos^2 \theta \right) \quad (12)$$

に書きかえられる。ところで、先にのべたように、点Pの応力が完全単独鉛直応力であるためには $f=0$ が必要である。そして、 $f=0$ であるためには、(12)式からわかるように

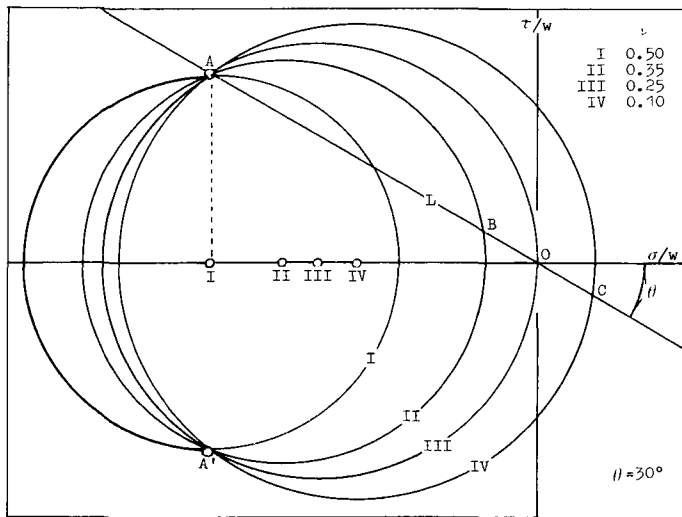
$$\nu = \sin^2 \theta \quad (13)$$

でなければならない。式(13)の値の ν を ν_θ で表すことにする。かくして、点Pが上部均一で等方均一な雪層内にあり、かつ $\dot{\epsilon}_x=0$ で $\nu=\nu_\theta$ ならば、点Pの応力が完全単独鉛直主応力になることがわかった。次の章で、点Pが持続上部均一ならば $\dot{\epsilon}_x=0$ になることが証明される。

雪層の塑性ポアソン比 ν が丁度 ν_θ に等しいことは極めて稀である。一般に ν は ν_θ から外れるが、その外れが余り大きくなければ、応力は完全単独鉛直応力にちかい筈である。すなわち、応力主軸がほぼ鉛直および水平であり、水平主応力 σ_1 が鉛直主応力 σ_3 にくらべて小さい単独鉛直主応力になる。

4. モールの応力円

第3図は式(6)と式(8)とで与えられる応力を示すモール円である。横軸に σ/w を縦軸に



第3図 上部均一な積雪内の点でのモール応力円。 σ/w 軸上の白丸印I, II, III, IVがモール円I, II, III, IVの中心である。固定点Aが積雪表面に平行な面上の応力を、直線Lとモール円との交点が鉛直面上の応力をあたえる。第V章で示されるように、応力は積雪の塑性ポアソン比 ν が与えられると決定する。図の右上隅に、各モール円を定める ν の値が示してある

τ/w をとり、 $\theta=30^\circ$ として書いてある。垂直応力成分 σ は張力のとき正に、圧力のとき負にとる。モールの円は (6) 式と (8) 式とで与えられる 2 点を通るが、(6) 式の応力点は点 A として固定し、(8) 式の応力点の位置は f の大きさによって変る。したがって、モールの円は、 f が異なるにつれ、点 A を通り中心を σ/w 軸上のいろいろな点 I, II, III, IV におく大きさの異なる円 I, II, III, IV となる。

式 (6) と式 (8) とから

$$\tau/\sigma_z = \tau'/\sigma'_x = -\tan \theta \quad (14)$$

であることが知られる。よって点 A と原点 O とを通る直線 L は σ/w 軸と $-\theta$ の角をなし、直線 L と応力円とのふたつの交点のうち、点 A でない交点が (8) 式の応力を与えることになる。モールの円 II, IV の場合には点 B, C で (8) 式の応力が表される。モールの円 III は原点 O で τ/w 軸に接する。よってこの円は、主応力 σ_1 が 0 である完全単独鉛直主応力を与える。

式 (8) から、 f/w が A 点でない交点と原点 O との距離で与えられることがわかる。ただし、その交点が τ/w 軸の左にあるときは f を負に、右にあるときは f を正にとる。モールの円 II では $\overline{BO} = -f/w$ であり、モールの円 IV では $\overline{OC} = f/w$ である。

第 3 項を除く以上の第 IV 章が、さきにもべた土圧論の定理である。この定理は、斜面積雪が圧縮性粘性液体であるか否か、また、等方均一な雪層の重畳であるか否かに拘らず成立つ。その代り、無限斜面積雪の場合と同様に、この定理で値が定められる応力成分は σ_z と τ だけで、 σ_x の値は未定のまま残される。

V. 単独鉛直主応力

積雪は、等方均一な雪からなる多くの雪層が重なった構造である。第 III 章第 1 節でのべたことにより、各雪層の雪は粘性が非常に強い圧縮性の粘性流体とみなされる。この章では、まず、斜面積雪を圧縮性粘性流体の層の重畳とし、持続上部均一の条件を加えて、前章の定理では未知のままに残された応力成分 σ_x を定める。ついで、得られた応力成分 σ_x , σ_z , τ から、持続上部均一の条件をみたま斜面積雪内の点では応力が単独鉛直主応力になることを証明する。

1. 斜面積雪を構成する雪層内の応力と歪速度

各雪層の密度 ρ , 粘性係数 η , 塑性ポアソン比 ν には、それぞれの雪層に固有な値があるとする。等方均一な圧縮性粘性流体の応力と歪速度との関係は、形式的に、等方均一な弾性体の応力と歪との関係にひとしい。雪層は y 方向には伸縮しない平面歪の状態にある。よって、雪層内部の応力と歪速度との関係は

$$\dot{\epsilon}_x = [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_z]/2\eta, \quad \dot{\epsilon}_z = [(1-\nu)\sigma_z - \nu\sigma_x]/2\eta \quad (15)$$

$$\dot{\gamma} = \tau/\eta, \quad \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \quad (16)$$

で与えられる。(うえの式は、文献 16 の p. 30 にある式 (26), (27) の歪を歪速度におきかえ、 E を $2\eta(1+\nu)$ としたものである。)

相接するふたつの雪層の境界における条件は第 5 節で考察する。

2. 持続上部均一な点での応力成分

雪層内に持続上部均一な点Pがあるとし、その点での応力成分 σ_x を求めよう。持続上部均一は上部均一の一種であるから、点Pの応力成分のうち σ_z と τ とは第IV章第2節の(6)式で表され、共に w に比例する。それで、 σ_x も w に比例すると予想し、常数 b を用いて

$$\sigma_x = bw \quad (17)$$

とおく。

雪層内の流動速度の x, z 成分を u, v とする。式(15)の第2式を z について積分すると、 $\dot{\epsilon}_z = \partial v / \partial z$ だから、(6)式の σ_z を用いて

$$v = -\frac{1}{2\eta} [(1-\nu) \cos \theta + \nu b] \int w dz + f_1(x) \quad (18)$$

が得られる。関数 $f_1(x)$ は任意にえらべるが、 $f_1(x)$ が実際に x によって変ると、点Pをふくむ雪層が歪んだり傾きを変えたりすることになる。ところが、点Pは持続上部均一だから、点Pの上部近傍内では、積雪表面とともに全部の雪層が歪みもせず傾きもかえない。したがって $f_1(x)$ は常数でなければならない。つまり、 v は z だけの関数である。

式(15)の第1式を x について積分すると、 $\dot{\epsilon}_x = \partial u / \partial x$ だから

$$u = \frac{1}{2\eta} [(1-\nu) b + \nu \cos \theta] w \cdot x + f_2(z) \quad (19)$$

が得られる。さらに、(16)式の第1式と(6)式の第2式とから導かれる。

$$\dot{\gamma} = \partial u / \partial z + \partial v / \partial x = w \sin \theta / \eta \quad (20)$$

に上の u, v を用いると、 $\partial v / \partial x = 0$ および $dw/dz = -\rho g$ だから

$$-[(1-\nu) b + \nu \cos \theta] \rho g \cdot x / 2\eta + df_2/dz = w \sin \theta / \eta \quad (21)$$

の関係が得られる。ひとつの雪層の内部では ρ, η, ν が一定である。よって、この式の左辺第1項は x だけの関数、左辺第2項と右辺とは z だけの関数である。したがって(21)式が成立するためには

$$b = -\nu \cos \theta / (1-\nu), \quad df_2/dz = w \sin \theta / \eta \quad (22)$$

でなければならない。

上の b を(17)式に用いて得られる σ_x と(6)式とを組合せて、持続上部均一状態にある点の応力が

$$\sigma_x = -\frac{\nu}{1-\nu} w \cos \theta, \quad \sigma_z = -w \cos \theta, \quad \tau = w \sin \theta \quad (23)$$

として定められる。 w は(7)式によって与えられる。式(15)の第1式に上の σ_x, σ_z をいれると $\dot{\epsilon}_x = 0$ となる。すなわち、雪層は x 方向に伸縮しないという第IV章第3節で設けた仮定が証明された。

3. 持続上部均一な点での主応力

式(23)で示される座標 (x, z) に関する応力成分から主応力 σ_1, σ_3 を求めると

$$N = (1+3 \sin^2 \theta) - 4\nu(1+\sin^2 \theta) + 4\nu^2$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\cos \theta - \sqrt{N}}{\cos \theta + \sqrt{N}}, \quad \tan 2\varphi = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \tan \theta \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

の関係が得られる。主軸が鉛直に近い主応力の値が σ_3 で、主軸が水平に近い主応力の値が σ_1 である。鉛直にちかい主応力は常に圧力で、 σ_3 は負である。よって、 γ が正あるいは負であるにつれ、水平に近い主応力 σ_1 は圧力あるいは張力となる。

角 φ は、第4図の上部左よりに示したように、座標 z の正の方向から主応力 σ_3 の軸の方向へ反時計まわりにはかった角である。また、鉛直な座標 z' の正の方向から主応力 σ_3 の軸の方向へ反時計まわりにはかった角を α とすると、 α は

$$\alpha = \varphi - \theta \quad (25)$$

で与えられる。式(24)で

$$\nu = \nu_\theta = \sin^2 \theta \quad (26)$$

とおくと、第IV章第3節で述べたことと一致して、 $\gamma=0$ および $\alpha=0$ となり、応力は完全単独鉛直主応力となる。

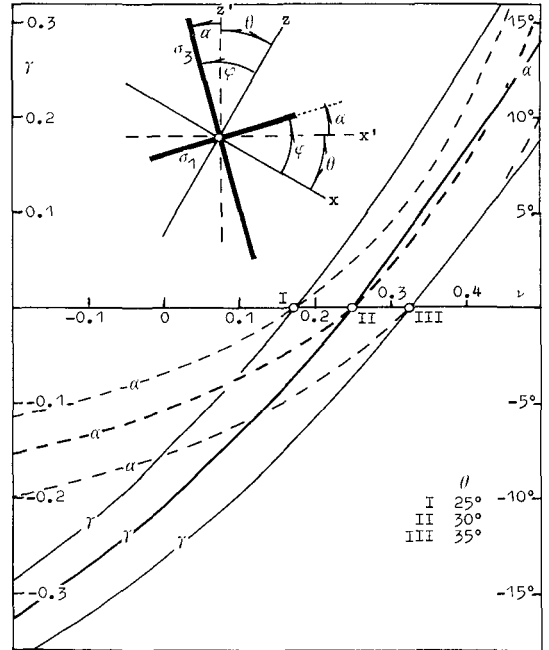
4. 単独鉛直主応力と塑性ポアソン比

第4図に、(24)式で与えられる γ および α と ν との関係を曲線で示した。実線が $\gamma-\nu$ 曲線で破線が $\alpha-\nu$ 曲線である。積雪表面の傾斜角 θ には $25^\circ, 30^\circ, 35^\circ$ を選んだ。横軸上の白丸 I, II, III は、左から、 θ が $25^\circ, 30^\circ, 35^\circ$ のときの $\nu=\nu_\theta$ の位置にあり、実線も破線も白丸を通過する。すなわち、白丸は完全単独鉛直主応力を示す点である。

第III章第3節で、積雪の塑性ポアソン比 ν の値は -0.1 から $+0.4$ までの範囲にあると述べた。いま、 θ を 30° とし、第4図の曲線 II によって、この ν の値の範囲に対応する γ および α の値の範囲を定めると

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= -0.27 \sim +0.17, \\ \alpha &= -7^\circ \sim +7^\circ \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

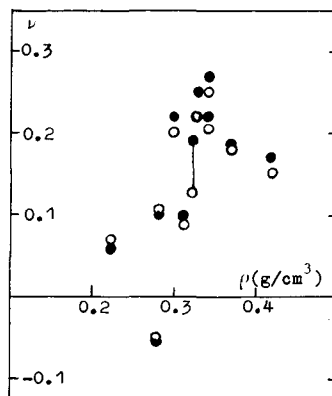
となる。他の θ の値をとっても、この範囲はあまり変らない。すなわち、さきに述べた通り、持続上部均一の条件をみたす斜面積雪内の点における応力は単独鉛直主応力になることが証明された。第1



第4図 式(24)であたえられる、持続上部均一な点での γ および α と塑性ポアソン比 ν との関係。水平に近い主応力の値 σ_1 を鉛直に近い主応力 σ_3 の値で割った比が γ である。 α は、図の上部に示した角である

図で*印のついていない応力は、(25)式の条件の一方または両方をみたさない。よって、これらの応力の測定された点は持続上部均一ではなく、無限斜面積雪内とは異なる応力状態にある。

第1図の応力を測定した場所での地面の傾斜は 32° で 30° に近い。それで、積雪表面の傾斜角 θ が 30° であるとしよう。すると、第4図の曲線IIを用いて、第1図の単独鉛直主応力の γ および α の実測値から、これらの単独鉛直主応力を測定した雪層の ν を求めることができる。こうして求めた ν と、別に測定してある雪層の密度 $\rho^{17)}$ との関係を示したのが第5図である。この図で、おなじ鉛直線上にある白丸と黒丸との対は同じ応力に関するもので、白丸は γ から定めた ν の値 ν_γ を、黒丸は α から定めた ν の値 ν_α を与える。たての長い線で結んだ一対を只ひとつの例外として、対をなす白丸と黒丸とは皆たがいに接近している。このことから、もし応力の測定値に誤差がなかったとしたら、 ν_γ と ν_α とは一致した値になっていたかも知れないと言える。



第5図 斜面積雪内応力の実測値から定めた積雪の塑性ポアソン比 ν を積雪の密度 ρ に対応させた図

持続上部均一状態は、単独鉛直主応力発生のためのひとつの充分条件にすぎない。それゆえ、他の条件のもとでも単独鉛直主応力は発生しうる。実際、第1図(E)の点bの単独鉛直主応力は、持続上部均一状態のために発生したものではない。点bの上に位置する点cの応力が単独鉛直主応力でないから、点bは持続上部均一状態にはありえないのである。このように、単独鉛直主応力を発生させる条件はいろいろでありうるが、その条件のちがいでよって γ 、 α と ν との関数関係 $\gamma = F_1(\nu, \theta)$ 、 $\alpha = F_2(\nu, \theta)$ は異なるにちがいない。それゆえ、もし、まえの文段の推定があたって、第5図の白丸と黒丸とが実際に重なっているのであれば、関数 F_1 、 F_2 は(24)式で与えられるものになる。すなわち、第1図の*印をつけた単独鉛直主応力は、ひとつの例外をのぞいて、持続上部均一状態のために発生したことになる。

第5図に -0.05 なる負の値の ν がひとつある。これは、第1図(E)の点fが属する雪層の ν の値である。結局、斜面積雪内応力の実測値から定めた積雪の塑性ポアソン比 ν は、実験的に定められた(4)式の範囲内にはほぼ一様に分布することになった。また、 ν には ρ の増大とともに増大する傾向がみとめられる。

5. 雪層境界条件、あとがき

斜面積雪を構成する雪層と雪層との境界面では、応力の垂直剪断の両成分と雪の流動速度の垂直成分とが連続であることが、もともと、必要である。そして更に、流動速度の切線成分の連続性も必要とされる。斜面積雪は、その底で地面に対しては滑るが、雪層境界では滑りをおこさないのが普通だからである。

持続上部均一の条件がみたまされている領域内では、(23)式が示すとおり、応力の垂直成分 σ_z も剪断成分 τ も、 w および θ だけの関数である。雪層ごとに値を異にする ρ 、 η 、 ν を含まない。しかるに、雪層境界で、 w は、(7)式の定義からわかるように、連続的に変化し、 θ はその値を変えない。よって、 σ_z と τ とは雪層境界で連続である。一方、各雪層内の流動速度成分 u 、 v

は(18)式(19)式で与えられる。これらの式にある $f_1(x)$ と $f_2(x)$ とを適当に選べば、 u と v とを雪層境界で連続にすることができる。かくして、第2節で得た応力成分流動速度成分が、持続上部均一の条件をみだす領域で、雪層境界条件をも満足することが確かめられた。

これまでの議論をふりかえると、斜面の傾斜角が理論の発展に全く関係なかったことがわかる。理論に関係したのは積雪表面の傾斜角であって、座標 x を積雪表面に平行におきさえすればよかったのである。それにも拘らず、第2図のように斜面と積雪表面とを平行であるとしたのは、積雪表面の傾斜角が測定されておらず、それを定める方法が他になかったからに過ぎない。こんごの主な問題は、単独鉛直主応力でない応力の解明にあるであろう。それには、積雪表面のみならず、雪層境界面の傾斜の観測値、雪層の厚さが斜面方向に変化する割合の観測値が役立つであろう。それと関連して、雪層の x 方向の伸縮の精密な測定がのぞましい。さらに、積雪底面の滑り速度の値も必要となるに違いない。

この論文を書くにあたっては、低温科学研究所の藤岡敏夫教授をはじめとする雪害科学研究部門員ならびに同所の他の所員に検討を願い、多くの教示をうけた。ここに記して感謝の意を表す。

文 献

- 1) 藤岡敏夫・他 1978 斜面積雪の歪速度と応力 I. 低温科学, 物理篇資料集, **36-37**, 39-69.
- 2) 藤岡敏夫・他 1979 斜面積雪の歪速度と応力 II. 低温科学, 物理篇資料集, **38**, 33-37.
- 3) 清水 弘 1968 斜面積雪の内部歪 I. 低温科学, 物理篇, **26**, 143-168.
- 4) 藤岡敏夫 1974 斜面積雪の挙動の研究 IV. 低温科学, 物理篇, **32**, 103-112.
- 5) Jaeger, J. C. 1956 *Elasticity, Fracture and Flow*. Methuen & Co., John Wiley & Sons, Inc., pp. 152.
- 6) 吉田順五 1953 雪の粘弾性及び雪の破壊抵抗. 低温科学, **10**, 1-11.
- 7) 小島賢治 1954 積雪の粘弾性. 低温科学, 物理篇, **12**, 1-13.
- 8) ランダウ・リフシツ (竹内均訳) 1954 (1970) 流体力学, 東京図書, pp. 596.
- 9) Shinojima, K. 1966 Study on the visco-elastic deformation of deposited snow. *In Physics of Snow and Ice, Part 2* (H. Oura ed.), Inst. Low Temp. Sci., Sapporo, 875-907.
- 10) 成田英器 1967 三軸圧縮に於ける雪の変形. 低温科学, 物理篇, **25**, 49-61.
- 11) 若浜五郎 1960 積雪の薄片を応用した積雪の組織と内部歪の研究 II. 低温科学, 物理篇, **19**, 73-95.
- 12) 吉田順五 1963 一様な斜面上の積雪の内部応力. 低温科学, 物理篇, **21**, 1-12.
- 13) Tamaru-T. 1937 *Rikigaku II*. 岩波書店, pp. 354.
- 14) 山口 昇 1936 土の力学. 岩波全書, pp. 193.
- 15) 山内豊聰 1960 土質力学. 理工図書, pp. 337.
- 16) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. 1970 *Theory of Elasticity*, 3rd. ed., McGraw-Hill Book Co. pp. 567.
- 17) 藤岡敏夫・他 1974 雪崩観測実験室実験斜面の雪質調査報告 VIII. 低温科学, 物理篇資料集, **32**, 31-39.

Summary

Huzioka and his coworkers measured actual internal strains within a snow cover lying on a wide and long sloping ground, and they succeeded in deriving internal stresses from the measured strains with no reference to the quantitative relationship that should exist between stress and strain of the snow^{3,4}. They first observed the deformations undergone by the snow during periods of two or three weeks and then calculated the internal strains from those deformations. Therefore the obtained stresses were mean values averaged over the periods. The stresses were expressed in the form of pairs of principal stresses as shown in Fig. 1 of the text which gives stresses obtained in 1974 in the neutral zone of the snow cover. In case of this Figure, the time of measurement ranged from January 9 to March 27, and it was divided into five periods (A), (B), ... (E). The principal stresses shown by black stripes are pressure while those shown by double lines with an arrow head at their tip are tension. Coordinate z is the distance above from the ground in the direction perpendicular to the surface of the snow cover. At each of the points attached with starred letters such as a^* , b^* , ..., one of the paired principal stresses stands nearly vertical while the other lies nearly horizontal, and the nearly horizontal principal stress σ_1 is much smaller than the nearly vertical principal stress σ_3 . Let such a pair of principal stresses be called 'single vertical principal stress'.

The snow cover is a stratification composed of many snow layers each of which is isotropic and homogeneous in nature. Experiments of compressing a pillar cut out from a snow layer show that it behaves like a compressive viscous fluid of enormously large viscosity, when the compressing force does not change in magnitude or when it changes in magnitude very slowly if it does. In the present paper the single vertical principal stress is theoretically studied on the assumptions that the snow layers composing the snow cover on the sloping ground are compressive viscous fluids and that the relationship between stress and strain velocity of the snow layers is formally the same as that between stress and strain of isotropic and homogeneous elastic materials. The snow layers are each characterized by their own values of density ρ , coefficient of viscosity η and plastic Poisson's ratio ν . The value of ν serves as a measure for the compressibility of the snow layers: it is zero at $\nu = +0.5$ and increases as ν decreases below 0.5 to become infinitely large at $\nu = -1$. Experimental values of ν lie in the range from -0.1 to $+0.4^9-11)$.

Let coordinate x be placed, as in Fig. 2 of the text, parallel to the surface S of the snow cover which makes angle θ with the horizontal, and let the inside of triangle $PB'D$ of that Figure be called 'upper neighbourhood' of point P which is arbitrarily chosen in the snow cover. State of the snow in the upper neighbourhood of point P changes as the snow cover flows down the sloping ground. But there can happen such a case that stress and strain in the neighbourhood continue to be invariable in the direction of x with no change in θ in spite of the flow of the snow cover. Point P shall be said to be in 'state A', when stress and strain change in this manner in its upper neighbourhood.

It is shown that, if a point is in state A, the following formulas hold for the principal stresses at that point:

$$\gamma = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\cos \theta - \sqrt{N}}{\cos \theta + \sqrt{N}}, \quad \tan 2(\theta + \alpha) = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \tan \theta,$$

with

$$N = (1 + 3 \sin^2 \theta) - 4\nu(1 + \sin^2 \theta) + 4\nu^2,$$

where α is the angle between principal stress σ_3 and the vertical z' as shown in the upper half of Fig. 4. Curves I, II, III in the same Figure show the relationship of γ and α versus ν respectively for three values 25° , 30° , 35° of θ . In case of Fig. 1 the value of θ is 30° and curve II of Fig. 4 turns out to restrict values of γ and α respectively within the ranges from -0.27 to $+0.17$ and from -7° to $+7^\circ$, because ν is limited within the aforementioned range from -0.1 to $+0.4$. If a stress has its γ and α restricted as above, its two principal stresses σ_1 and σ_3 are nearly horizontal and nearly vertical respectively while σ_1 is much smaller than σ_3 . Thus state A makes a sufficient condition for a stress to be a single vertical principal stress.

When stress is not a single vertical principal stress at a point, this point is not in state A. It seems to be generally believed that stress in the neutral zone of a sloping snow cover is the same as that in an infinitely long sloping snow cover in which every point must be in state A due to its own translational similarity. But such a belief is not always sound, because the actual stresses shown in Fig. 1 fail to be single vertical principal stresses throughout February and early in March in the lowest third of thickness of the snow cover, whereas they were all given rise to in its neutral zone.

Although there may be other causes which are effective in bringing about single vertical principal stresses, it is very likely that state A will work most widely. Plotted against density ρ of the snow layers in Fig. 5 are values of their ν which are determined through curves II of Fig. 4 from the values of γ and α read on the single vertical principal stresses shown in Fig. 1. Thus determined values lie in the experimental range from -0.1 to $+0.4$ of ν mentioned before.