Yosio SUZUKI 1980 A Note on Analysis of Data Obtained by Thermal Probe Method. *Low Temperature Science, Ser.* ***A, 39.*** (With English Summary p. 192)

サーマル•プローブ法のデータの解析について*

鈴 木 義 男
(低 温 科 学 研 究 所)

(昭和55年10月受理)

サーマルプローブ法とは，一定の発熱量をもつ線状発熱体（プローブ）を試料内に挿入し，プローブの温度上昇曲線から試料の熱定数を求める方法である。解析法はブラックウェルが詳細に論じている[1]。彼によれば，試料の熱伝導度 k，体積比熱 $c\rho$，プローブ半径 a，時間変数 t から作られる無次元時間パラメーター，$\tau=k\cdot(c\rho)^{-1}\cdot a^{-2}\cdot t$ が 1 より大きい時のプローブ温度 $T(t)$ は次のような漸近解であらわされる：

$$T(t)=T(0)+\frac{Q}{4\pi k}\left[2\Omega+\ln\frac{4\tau}{C}+\frac{1}{2\tau}\left\{(1-\beta)\ln\frac{4\tau}{C}+(1-2\beta\cdot\Omega)\right\}+O(\tau^{-2})\right] \quad (1)$$

ここで，$T(0)$ は初期値，Q はプローブ単位長，単位時間の発熱量，C は常数 (1.7811…)，β はプローブと試料との体積比熱の比，$c_0\rho_0/c\rho$ であり，また Ω はプローブと試料との接触熱抵抗 R（界面での温度差と，プローブ単位長から試料に流れこむ熱流の比）を用い，

$$\Omega=2\pi\cdot R\cdot k \quad (2)$$

で与えられる無次元量である。

時間の逆数の次元をもつ変数

$$\eta=4k\cdot(c\rho)^{-1}\cdot a^{-2}\cdot C^{-1} \quad (3)$$

を導入し，以下，η, t を同一単位系で測った数値とする。式 (1) を $O(\tau^{-2})$ の項を省略し，ξ, t で書き直すと，

$$\begin{aligned}T(t)&\simeq T(0)+\frac{Q}{4\pi k}\left[2\Omega+\ln\eta+\ln t+\frac{2}{C\cdot t\cdot\eta}\left\{\left((1-\beta)(\ln\eta+\ln t)\right)+(1-2\beta\cdot\Omega)\right\}\right]\\&=A\ln t+B+\frac{1}{t}\left\{G\ln t+H\right\}\end{aligned} \quad (4)$$

ここで，

$$A=Q\cdot(4\pi k)^{-1} \quad (5)$$

$$B=T(0)+A\cdot(2\Omega+\ln\eta) \quad (6)$$

$$G=2A\cdot C^{-1}\cdot\eta^{-1}\cdot(1-\beta) \quad (7)$$

$$H=2A\cdot C^{-1}\cdot\eta^{-1}\left\{(1-\beta)\ln\eta+(1-2\beta\cdot\Omega)\right\} \quad (8)$$

---

* 北海道大学低温科学研究所業績 第 2297 号

サーマル・プローブ法の解析はふつうは，$\tau \gg 1$ として (1) で τ^{-1} のオーダーの項を省略し，(4) の代りに

$$T(t) = A\ln(t) + B \tag{4'}$$

とし，常数 A, B を求める。この時，k は (5) からきまるが，(6) は2つの未知量，Ω と η を含むため η (したがって，温度拡散係数 $k\cdot(c\rho)^{-1}$) は求まらない。

ブラックウェルは，実際の測定の場合，τ^{-1} のオーダーが省略できない場合が多く，(4′) による A, B の決定は誤差が大きいおそれがあるとして，(4) を用いて，A, B, G, H を最小自乗法できめよと主張した。B, G, H がきまれば，(6), (7), (8) は3つの未知数，Ω, η, β の連立方程式となり，これをといて η がえられるのであるが，ブラックウェルは，折角の G, H を用いず，$\tau < 1$ の漸近解から Ω を求め，これと (6) 式から η を求めることを提案した。しかし，(6), (7), (8) は実は簡単にとける：

実際，(6), (7) を，それぞれ，

$$2\Omega = X - \ln\eta, \quad X \equiv (B - T_0)\cdot A^{-1} \tag{9}$$

$$\beta = 1 - Y\cdot\eta, \quad Y \equiv C\cdot G(2A)^{-1} \tag{10}$$

とかくと，(8) から

$$\eta^{-1}\Big\{Y\cdot\eta\ln\eta + 1 - (1 - Y\cdot\eta)(X - \ln\eta)\Big\} = C\cdot H\cdot(2A)^{-1}$$

となり，これを整理すると，

$$\eta^{-1}(U + \ln\eta) = V \tag{11}$$

$$U \equiv 1 - X \equiv 1 - (B - T_0)A^{-1} \tag{11 a}$$

$$V \equiv C\Big(H - G(B - T_0)A^{-1}\Big)(2A)^{-1} \tag{11 b}$$

という，η の簡単な方程式がえられ，これをとけば η，さらに必要なら，(9), (10) より Ω, β が求まり，ブラックウェルのようなまわりみちをする必要はない。

ブラックウェルは，A, B, G, H を最小自乗法によってきめることを提案したが，具体的には論じていない。データ採取時刻は等比級数的にとるのが自然であろう。いま，

$$T_n = T(\alpha^{n-1}t_1), \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{12}$$

とおくと，(4) より，

$$T_n = A(\ln t_1 + (n-1)\ln\alpha) + B + \frac{1}{\alpha^{n-1}t_1}\Big\{G(\ln t_1 + (n-1)\ln\alpha) + H\Big\} \tag{13}$$

いま，

$$\varDelta_1(n) = \alpha^n(T_{n+1} - T_n) \tag{14}$$

$$\varDelta_2(n) = \varDelta_1(n+1) - \varDelta_1(n) \tag{15}$$

とすると，

$$\varDelta_1(n) = A\cdot\alpha^n\cdot\ln\alpha + \frac{(1-\alpha)}{t_1}\Big\{G(\ln t_1 + (n-1)\ln\alpha) + H\Big\} + \frac{G\ln\alpha}{t_1} \tag{16}$$

$$\Delta_2(n) = A\cdot\alpha^n(\alpha-1)\ln\alpha + \frac{(1-\alpha)}{t_1}G\cdot\ln\alpha \tag{17}$$

(17) より,

$$\begin{aligned} A\,\alpha^n(\alpha-1)^2\ln\alpha &= \Delta_2(n+1)-\Delta_2(n) \\ &= \Delta_1(n+2)-2\Delta_1(n+1)+\Delta_1(n) \\ &= \alpha^{n+2}(T_{n+3}-T_{n+2})-2\alpha^{n+1}(T_{n+2}-T_{n+1})+\alpha^n(T_{n+1}-T_n) \end{aligned}$$

すなわち

$$A = (\alpha-1)^{-2}(\ln\alpha)^{-1}\left\{\alpha^2(T_{n+3}-T_{n+2})-2\alpha(T_{n+2}-T_{n+1})+(T_{n+1}-T_n)\right\} \tag{18}$$

また,

$$\begin{aligned} G\frac{(1-\alpha)^2}{t_1}\cdot\ln\alpha &= \Delta_2(n+1)-\alpha\,\Delta_2(n) \\ &= \Delta_1(n+2)-(1+\alpha)\,\Delta_1(n+1)+\alpha\,\Delta_1(n) \\ &= \alpha^{n+2}(T_{n+2}-T_{n+2})-(1+\alpha)\,\alpha^{n+1}(T_{n+2}-T_{n+1})+\alpha^{n+1}(T_{n+1}-T_n) \end{aligned}$$

すなわち,

$$G = (\alpha-1)^{-2}(\ln\alpha)^{-1}\cdot t_1\cdot\alpha^{n+1}\left\{\alpha\,T_{n+3}-(1+2\alpha)\,T_{n+2}+(2+\alpha)\,T_{n+1}-T_n\right\} \tag{19}$$

ブラックウェルの考えた最小自乗法が, (18), (19) で $n=1,2,\cdots$ としてえられる A, G の算術平均をとることに相当するか否かはわからない。

一般には, T を $\ln t$ に対してプロットした図上でよみとった4つの値, $T_1=T(t_1)$, $T_2=T(\alpha t_1)$, $T_3=T(\alpha^2 t_1)$, $T_4=T(\alpha^3 t_1)$ を用い, (18), (19) で $n=1$ とした式で, A, G を計算するだけで充分であろう。

$$A = (\alpha-1)^{-2}(\ln\alpha)^{-1}\left\{\alpha^2(T_4-T_3)-2\alpha(T_3-T_2)+(T_2-T_1)\right\} \tag{18$'$}$$

$$G = (\alpha-1)^{-2}(\ln\alpha)^{-1}\cdot t_1\cdot\alpha^2\left\{\alpha\,T_4-(1+2\alpha)\,T_3+(2+\alpha)\,T_2-T_1\right\} \tag{19$'$}$$

この時, H は (16) で $n=1$ とした式に (18′), (19′) で求めた A, G を使い, B は (13) で $n=1$ とした式と, 求めた H, A, G を使って計算する。A, B, G, H がすべて求まれば, (11) より η が求まる。k だけが必要の場合は A 以外は計算する必要はない。

サーマル・プローブ法を適用する時, 測温データが (4′) に適合するような範囲だけを使うことが多いが, 実は (4′) からずれるような, より短い時間のデータも用いると, 熱伝導度だけでなく温度拡散係数も求められ, さらに, 熱伝導度の測定精度も, (18′) または (18) を使うことにより, (4′) にたよった長時間データに劣らぬものが得られるものと思われる。

文 献

1) Blackwell, J. H. 1954 A Transient-Flow Method for Determination of Thermal Constants of Insulating Materials in Bulk. *J. of. Appl. Phys.*, **25**, 137–144.

Summary

The thermal probe method is a kind of transient-flow method to measure thermal constants. The probe, a cylindrical heater with a thermometer to measure its temperature, is inserted in a material, whose thermal constants are deduced from the record of the probe temperature versus elapsed time. Conventionally, the part of the record which can be expressed by eq. (4′), that is, according to the theory, the part after a sufficiently long elapsed time, is used to deduce only the heat conductivity of the material. This paper discusses the record for a shorter elapsed time, which can be expressed by eq. (4). It is shown that not only the heat conductivity but the thermal diffusion constant of the material can be deduced from the record in this case, the former from eq. (5) and the latter from eq. (11). The four constants appeared in the equations, A, B, G and H, are expressed in terms of the temperatures measured at such elapsed times as consist a geometric series.