HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	斜面積雪の挙動の研究　ＸＸ：曲線群CHと雪の密度分布とによる応力の決定
Author(s)	吉田, 順五
Citation	低温科學. 物理篇, 44, 1-14
Issue Date	1986-03-10
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/18514
Type	bulletin (article)
File Information	44_p1-14.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Zyungo YOSIDA 1985 Studies of the Behavior of a Snow Cover on Mountain Slope. XX. Determination of Stresses in the Snow Cover through Curves C_H and the Distribution of Snow Density. *Low Temperature Science, Ser. A, 44.* (With English Summary p. 11)

斜面積雪の挙動の研究 XX*

—曲線群 C_H と雪の密度分布とによる応力の決定—

吉田順五
(北海道大学名誉教授)

(昭和60年7月受理)

I. まえがき

1. 本論文の目的

これまでに発表された同じ表題の一連の論文[1~5]でとおなじく，この論文XXでも，対象とする斜面積雪は，等高線が平行水平直線群で表わされる山の斜面につもった雪である。等高線の方向には，雪の積りかたに変化がないとする。したがって，積雪は，等高線に直角に立つ「流動面」に平行に，山の斜面を2次元流として流下する。いま，流動面による積雪断面の，斜面にそって十分に長く続く範囲をとって「領域N」と名づける。この論文の目的は，領域Nの全体にわたって，曲線群 C_H と曲線群 C_V とが，なんらかの手段をもちいて描かれたとした場合，両曲線群と雪の密度分布とから，領域N内の任意の点における積雪内応力を定める方法の考察である。ところが，この論文の最後で，曲線群 C_V が曲線群 C_H と領域N内の雪の密度分布とから導かれることが示される。その結果，領域N内の応力の決定には，曲線群 C_H と雪の密度分布とが知られさえすれば，十分なことになる。本論文の副題は，このことを意味する。

曲線群 C_H および曲線群 C_V は，筆者が論文IX[2]で導入した流動面内曲線群で，次の第II章のはじめに，その定義を要約する。なお，曲線群 C_H の構成要素である各曲線 C_H について，つづく第2節でのべる仮定をおく。

2. 正則H型曲線 C_H の仮定

論文XV[5]で，領域Nの内部に極めて特殊な応力の点が存在しなければ，曲線 C_H が正則なH型曲線であることを証明した。「H型曲線」は，領域Nをよこぎって，地面上の一点と積雪表面上の一点とを結ぶ曲線にあたえた名である。ただ，うえの極めて特殊な応力の点が存在する場合については，なんの結論もださなかった。存在しても，曲線 C_H がH型になることがあるかも知れない。

二次元流下をする斜面積雪では，3箇の主応力のうちの2箇が流動面内にある。その2箇のうちの一方が0に等しい応力の点を「完全単独主応力点」とよび，「PSP点」と略称する。

* 北海道大学低温科学研究所業績 第2773号

曲線 C_H は，領域 N の内部で終ること，分岐すること，交叉することがあるかも知れない。すなわち，領域 N 内に曲線 C_H の端点，分岐点，交叉点があるかも知れない。しかし，あるとすれば，それらの点は必ず，0 でない主応力の方向が水平な水平 PSP 点であると言うことができる。そして，論文 XVI[5] で示したように，水平 PSP 点は，(1) 孤立二重交叉点 (2) 線状二重交叉点 (3) 孤立無限多重交叉点 (4) 孤立無限多重端点の 4 種類に分類される。分岐点となる水平 PSP 点は存在しない。はじめの (1) は 2 本の曲線 C_H が交る孤立点，つぎの (2) は二重交叉点がつながって連続曲線となったもの，(3) は無限に多くの曲線 C_H が交る孤立点，さいごの (4) は無限に多くの曲線 C_H が収斂して終る孤立点である。

論文 XV で証明したのは，(1) の水平 PSP 点は存在してもよいが他の 3 種類の水平 PSP 点は存在しないと仮定すると，曲線 C_H が H 型になる，と言うことであった。ところが，曲線 C_H が H 型だと，力学的理由により，(1) の水平 PSP 点すなわち孤立二重交叉点も存在が否定される。その結果，曲線 C_H は H 型であるばかりでなく，交叉も屈曲もしない正則曲線であることになる。この第 2 節のはじめの文章はこのことを述べている。したがって，同文章にある「極めて特殊な応力の点」とは，上記 (2), (3), (4) の水平 PSP 点に他ならない。

水平 PSP 点は極めて特殊で，出現するとしても非常に稀であるに違いない。それで，本論文ではその存在を無視し，曲線 C_H は，すべて，H 型の正則曲線であると仮定する。よって，領域 N 内の任意の点 P を通る曲線 C_H は 1 本に限られ，その両端は積雪表面と地面との上にあることになる。この曲線 C_H を点 P でふたつに分け，点 P と積雪表面とを結ぶ部分を点 P の「上部曲線 C_H」と名づけ，点 P と地面とを結ぶ部分を点 P の「下部曲線 C_H」と呼ぶことにする。

II. 曲線群 C_H および曲線群 C_V による応力の決定

1. 曲線 C_H と曲線 C_V

紙面を，前章第 1 節でのべた斜面積雪の流動面と考える。第 1 図で，曲線 S_0 と曲線 G とが，それぞれ積雪表面と地面とを表し，両曲線にはさまれた範囲が領域 N の一部を示す。曲線 S_0 ならびに曲線 G は，左から右へむかって，局部的には上昇することがあっても，全体としては下降するものとする。座標 x を紙面内水平右むきに，座標 z を鉛直上むきに，座標 y を紙面に直角にとる。雪の密度は，領域 N の全体にわたって，場所の関数 $\rho(x, z)$ として，その分布が知られているとする。

曲線 C_H は，その上の各点で，その切線が，水平な (x, y) 面上の応力成分ベクトル $\boldsymbol{f}_H$ と方向を共にするような，流動面内の平面曲線である。曲線 C_V は，その上の各点で，その切線が，鉛直な (y, z) 面上の応力成分ベクトル $\boldsymbol{f}_V$ と方向を共にするような流動面内の平面曲線である。それで次のことが言える。点 $P(x, z)$ を領域 N 内の任意の点とする。点 P を通る曲線 C_H と曲線 C_V との切線が，点 P で，水平方向との間に，それぞれ，角 φ と角 ψ とをはさむとする。このふたつの角は，共に，座標 x の正の方向から反時計まわりに切線まではかることとし，その変域を $[\pi/2, -\pi/2)$ にとる。点 P における応力成分を σ_x, σ_z, τ_{zx} で表す。すると

$$\tan\varphi = \sigma_z/\tau_{zx}, \qquad \tan\psi = \tau_{zx}/\sigma_x \tag{1}$$

の関係がなりたつ。

式(1)から，数学的には，両曲線が，それぞれ，微分方程式

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}x = \sigma_z/\tau_{zx}, \quad \mathrm{d}z/\mathrm{d}x = \tau_{zx}/\sigma_x \tag{2}$$

の解として与えられることが判る。微分方程式(2)は第1階常微分方程式だから，その解は積分定数を1箇づつふくむ。その積分常数を，それぞれ，a_{H} および a_{V} とすると，両曲線は

$$z = \mathrm{f}_{\mathrm{H}}(x, a_{\mathrm{H}}), \qquad z = \mathrm{f}_{\mathrm{V}}(x, a_{\mathrm{V}}) \tag{3}$$

の形に表される。すなわち，曲線 $\mathrm{C_H}$ も曲線 $\mathrm{C_V}$ も，それぞれ，a_{H} および a_{V} を1箇の副変数として含む曲線群 $\mathrm{C_H}$ および曲線群 $\mathrm{C_V}$ を形成する。

曲線 $\mathrm{C_H}$ と曲線 $\mathrm{C_V}$ とには，次のような物理的意味がある。すなわち，曲線 $\mathrm{C_H}$ 上の応力成分ベクトルは方向が常に水平であり，曲線 $\mathrm{C_V}$ 上の応力成分ベクトルは方向が常に鉛直である。それ故，有限な長さの曲線 $\mathrm{C_H}$ の両側にある積雪が互に及ぼしあう力は，鉛直成分を欠く。また，有限な長さの曲線 $\mathrm{C_V}$ の両側にある積雪が互に及ぼしあう力には，水平成分がない。

曲線 $\mathrm{C_H}$ あるいは曲線 $\mathrm{C_V}$ を流動面に直角に単位長さ移動させて作られる曲面を「曲面 $\mathrm{C_H}$」あるいは「曲面 $\mathrm{C_V}$」と呼ぶことにしよう。いま上で「曲線 $\mathrm{C_H}(\mathrm{C_V})$ 上の応力成分ベクトル」と書いたが，これは「曲面 $\mathrm{C_H}(\mathrm{C_V})$ 上の応力成分ベクトル」の意味である。以後，用語簡潔のため，このように「面」を「線」で代用することが多い。また「閉曲線Lで囲まれた雪」ということがある。これは「閉曲線Lで囲まれた厚さが単位長さの雪」のことである。

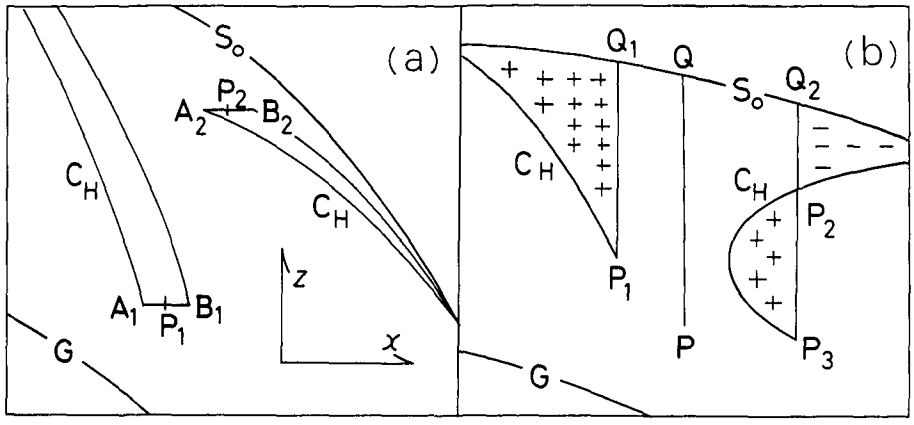
2. 曲線 $\mathrm{C_H}$ による σ_z の決定

これから先は，領域N全体にわたって曲線群 $\mathrm{C_H}$ および曲線群 $\mathrm{C_V}$ が描かれたとしての議論である。したがって，領域N内のすべての点で，角 φ と角 ψ とはその値が知られる。

式(1)は，φ と ψ とが既知ならば，応力成分 σ_x, σ_z, τ_{zx} を3箇の未知数とする2箇の方程式である。それ故，3箇の応力成分のうちのどれかひとつの値を定めれば，式(1)によって，残りの応力成分も値が定められる。

論文IX[2]の第III章で，曲線 $\mathrm{C_H}$ を用いて σ_z の値を定める方法を説明した。第1図(a)の点 $\mathrm{P_1}$ および点 $\mathrm{P_2}$ は，それぞれ，水平線分 $\mathrm{A_1B_1}$ および水平線分 $\mathrm{A_2B_2}$ の中点である。点 $\mathrm{A_1}$ と点 $\mathrm{B_1}$ とから左上にむかう曲線，また，点 $\mathrm{A_2}$ と点 $\mathrm{B_2}$ とから右下へむかう曲線は，みな，それぞれの点の上部曲線 $\mathrm{C_H}$ である。線分 $\mathrm{A_1B_1}$ とその両端から出る上部曲線 $\mathrm{C_H}$ とに囲まれた雪を雪 $\mathrm{J_1}$ とし，線分 $\mathrm{A_2B_2}$ とその両端から出る上部曲線 $\mathrm{C_H}$ とに囲まれた雪を雪 $\mathrm{J_2}$ としよう。雪 $\mathrm{J_1}$ は，その重量 W_1 を線分 $\mathrm{A_1B_1}$ 上に全部かけて同線分上に圧力を生ずる。雪 $\mathrm{J_2}$ は，その全重量 W_2 を線分 $\mathrm{A_2B_2}$ の下側にかけて，同線分上に鉛直方向の張力を発生させる。雪 $\mathrm{J_1}$ および雪 $\mathrm{J_2}$ の両側にある雪が，雪 $\mathrm{J_1}$ および雪 $\mathrm{J_2}$ に及ぼす力には，鉛直成分がないからである。かくして，両水平線分が十分に短かければ，W_1 を線分 $\mathrm{A_1B_1}$ の長さで割った商が点 $\mathrm{P_1}$ における σ_z を圧力として与え，W_2 を線分 $\mathrm{A_2B_2}$ の長さで割った商が点 $\mathrm{P_2}$ における σ_z を張力として与える。

以上により次のことが言える。点Pを領域N内の任意の点とし，点Pを含み長さ l の短い水平線分を考える。水平線分の両端から発する2本の上部曲線 $\mathrm{C_H}$ と水平線分とが囲む雪を



第1図 流動面による斜面積雪の断面図。曲線 S_0 が積雪表面を，曲線 G が地面を表す。第2図第3図も，以上の点では同じである。(a) 短い水平線分 A_iB_i とその両端から発する2本の上部曲線 C_H とに囲まれた雪 J_i の重量により，点 P_i における σ_z が定められる。σ_z は，$i=1$ のときには負で圧力に，$i=2$ のときは正で張力になる。(b) 点 P_i から発する鉛直線と上部曲線 C_H とに囲まれた雪 K の代数的重量が，鉛直線上の剪断力 T_V を与える。図に示したように，雪 K のうち鉛直線の左にある部分の重量を正とし，右にある部分の重量を負とする

雪 J と名づけ，その重量を W で表す。すると，点 P における σ_z は，点 P の上部曲線 C_H が点 P から上にむかって発するときは $-W/l$ で与えられ，下にむかって発するときは W/l で与えられる。水平に発するばあいの σ_z は 0 である。

論文 IX で用いた以上の方法は簡単だが，その反面，これによって定められる σ_z の値には誤差が伴いやすい。雪 J の重量 W を計算するには，雪 J の幅とそのなかの雪の密度分布とが必要である。ところが雪 J の幅はせまい。それで，雪 J をはさむ上部曲線 C_H の形に小さい狂いがあっても，雪 J の幅に，したがってその重量 W に大きな関係誤差をもたらすからである。こんなわけで，σ_z の値を求めて応力成分を定める上の方法は，曲線 C_H がよほど正確に描かれた場合にしか使えない。そのため，次の第3，4節で準備をしたあと，第5節で，σ_z の値の代りに τ_{zx} の値を，誤差少く求める方法を考える。(論文 IX[2] の第 III 章第1節の終り近くに「曲線 C_H，曲線 C_V は交らない」旨のことを書いた。これは誤りであるから取消す)

3. 鉛直面剪断力 T_V

第1図 (b) の点 P は領域 N 内に任意にえらんだ点である。積雪表面 S_0 上，点 P の真上にある点を点 Q とする。鉛直線 PQ を境にして，その右側，すなわち座標 x の正の側にある積雪が，鉛直面 PQ を通して，その左側，すなわち座標 x の負の側にある積雪に加える力の z 成分を点 P の「鉛直面剪断力」とよび，記号 T_V で表す。この T_V は，鉛直線 PQ 上の剪断応力成分の，鉛直線 PQ の全長にわたる積分で与えられる。すなわち

$$T_V=\int_P^Q \tau_{zx}\mathrm{d}z \tag{4}$$

である。記号 T_V の T は剪断力を，添字の V は鉛直面を意味する。

点Pの上部曲線C_Hを利用すると，T_Vの値を定めることができる。点Pの上部曲線C_Hと点Pを通る鉛直線PQと積雪表面S_0とが囲む雪を「雪K」と名づける。雪Kには積雪表面上の力，上部曲線C_H上の力，鉛直線PQ上の力および重力が外力として加わるが，第1の力は0であり，第2の力は鉛直成分を欠く。第3の力の鉛直成分はT_Vである。それ故，鉛直方向にはT_Vと雪Kの重量とが釣合いを保つことになる。ただし，この雪Kの重量には，以下のように，正負の区別を考える必要がある。正負の区別をつけたこの重量を，雪Kの「代数的重量」とよび，記号W_K^*で表す。

第1図(b)の点P_1, P_2, P_3はいづれも点Pを表すが，それぞれから出る上部曲線C_Hが鉛直線PQと異る位置関係にある。点P_1からは上部曲線C_Hが左上方へ出発し，雪Kはその全体を鉛直線PQの左側におく。それ故，雪Kの重量W_K'と，鉛直線PQの右側の積雪が雪Kに加える力のz成分T_Vとが釣合う。よって，T_VはW_K'にひとしく正である。このばあいには，W_K'そのものをW_K^*とし，T_VはW_K^*で与えられると言う。点P_2からでる上部曲線C_Hは右上にむかい，雪Kの全体が鉛直線PQの右側にある。それ故，このばあいの雪Kの重量W_K''を支えるのは，鉛直線PQの左側の雪が雪Kに加える力のz成分$-T_V$となる。よってT_Vは$-W_K''$にひとしい。それで，$-W_K''$をW_K^*とおく。すると，うえのばあいと同様，T_VはW_K^*によって与えられると言うことができる。以上の代数的重量W_K^*の正負を示すため，第1図(b)で，点P_1の雪Kの領域には＋の記号を，点P_2の雪Kの領域には－の記号を書きいれた。

点P_3のばあいには，雪Kが，その下部を鉛直線PQの左側に，その上部を右側におく。下部の重量を正とし，上部の重量を負として，両重量の代数和をW_K^*とすれば，そのW_K^*が点P_3のT_Vを与える。一般に次のように言える。点Pの雪Kを，点Pを通る鉛直線PQの左側にある部分と右側にある部分とに分ける。左側にある部分の総重量がW_K'であり，右側にある部分の総重量がW_K''であるとき，雪Kの代数的重量W_K^*を

$$W_K^* = W_K' - W_K'' \tag{5}$$

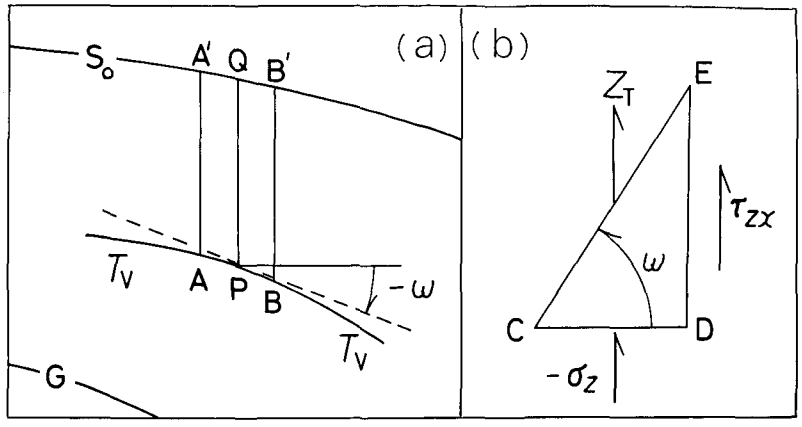
とおく。すると，点PのT_VはW_K^*によって与えられる。

曲線C_Hを利用する上記の方法により，領域Nのなかの多くの点でT_Vの値を求めると，その上のT_Vの値が同一な曲線を描くことができる。この曲線を「等T_V曲線」と呼ぶことにする。異なるT_Vの値に対して異なる等T_V曲線が存在するから，等T_V曲線も等T_V曲線群を形成し，領域Nを埋めつくす。

4. 積雪水量と等T_V曲線

前節で定義した等T_V曲線の切線の方位角をωで表し，曲線C_Hおよび曲線C_Vの切線の方位角φおよびψと同様に，座標xの正の方向から切線まで反時計まわりに測った角とする。第2図も，第1図とおなじく，流動面による斜面積雪の断面である。第2図(a)で，点Pは領域N内の任意の点であり，点Aと点Bとは，点Pを通る等T_V曲線のうえに，点Pをはさんで極めて接近して存在する。点Aと点Bとの間の水平微小距離をdxとする。また点A，点Bおよび点Pの真上，積雪表面S_0上にある点を，それぞれ点A′，点B′および点Qで表す。

第2図(a)の微小四辺形A′ABB′内にある雪を「雪J′」と呼ぶ。雪J′の重量を$w\,dx$とす



第2図 (a) 記号 T_V のついた曲線は等 T_V 曲線で，その上にある点Aと点Bとの間隔は微小である。四辺形A′ABB′内の雪を「雪J′」とよぶ。(b) 三角形CDEは微小な三角形で，辺CEは等 T_V 曲線の微小部分をなす。この三角形のなかの雪に周囲の積雪が加える応力の z 成分が矢印で示してある。これら成分の平衡条件から，Z_T を σ_z と τ_{zx} とで表す式が導かれる

ると，w は点Pにおける積雪水量で，重力加速度 g と雪の密度 $\rho(x, z)$ とを用いて

$$w = g\int_P^Q \rho(x, z)\,dz \tag{6}$$

として表される。この雪J′の重量 $w\,dx$ を支えるのは，雪J′の右側にある積雪が雪J′に加える力の z 成分 T_V および雪J′の左側にある積雪が雪J′に加える力の z 成分 $(-T_V)$ と，雪J′の底ABにその下の積雪が加える力の z 成分とである。はじめのふたつの力の成分 T_V と $(-T_V)$ とは，点Aと点Bとが同一の等 T_V 曲線上にあるから，符号は反対だが絶対値はあい等しい。よって互に打消しあい，雪J′の重量を支える働きをしない。かくして，雪J′の重量を支えるのは，雪J′の底ABに加わる力の z 成分だけとなる。

一本の等 T_V 曲線で，領域Nにある積雪を z の正の側にある「上の積雪」と z が負の側にある「下の積雪」とに分ける。そして Z_T を，上の積雪が下の積雪に加える力の z 成分の，水平単位長さ当たりの値を表す記号としよう。すると，雪J′の底である微小線分ABは等 T_V 曲線の一部をなすから，雪J′が下の積雪から受ける力の z 成分は $(-Z_T)\,dx$ と書かれる。これが雪J′の重量 $w\,dx$ にひとしければ，雪J′の落下は止まる。よって Z_T は，等 T_V 曲線上の積雪水量に負号をつけた

$$Z_T = -w \tag{7}$$

として与えられる。この式(7)の関係を使うと，次の第5節で示すように，τ_{zx} を φ, ω, w で表すことができる。角 φ の値は曲線群 C_H から，積雪水量 w の値は雪の密度分布 $\rho(x, z)$ から，角 ω の値は曲線群 C_H と密度分布 $\rho(x, z)$ とから求められる。それ故結局，τ_{zx} は，σ_z とおなじく，曲線群 C_V を用いずに，曲線群 C_H と雪の密度分布 $\rho(x, z)$ とによって定められると言える。

5. 曲線 C_H と積雪水量 w とによる τ_{zx} の決定

第2図(b)の三角形CDEは領域Nにある微小三角形で，その辺CEは等 T_V 曲線の微小部分をなすとする。辺CDは長さ dx の水平な微小線分，辺DEは長さ dz の鉛直な微小線分である。この微小三角形CDEのなかの雪に，周囲の積雪が加える力の，鉛直方向の釣合を考えると，τ_{zx} が φ, ω, Z_T によって表される。それ故，この Z_T を式(7)によって $(-w)$ でおきかえると，τ_{zx} が (x, z) の既知関数である φ, ω, w で表されることになる。

第2図(b)の微小三角形CDEの各辺には，外から加えられる力の z 成分が矢印で示してある。ただし，辺CDと辺CEについては水平単位長さ当たりの z 成分であり，辺DEについては鉛直単位長さ当たりの z 成分である。これから，鉛直方向の平衡条件として

$$Z_T dx - \sigma_z dx + \tau_{zx} dz = 0$$

がえられる。よって，Z_T を $(-w)$ でおきかえて

$$dz/dx = (\sigma_z + w)/\tau_{zx}, \qquad \tau_{zx} = w/(\tan\omega - \tan\varphi) \tag{8}$$

が導かれる。第二式は，dz/dx が $\tan\omega$ であり σ_z/τ_{zx} が $\tan\varphi$ であることを使って，等 T_V 曲線の微分方程式である第一式を書きなおして得られる。この第二式が，前節の終りで述べた，τ_{zx} を φ, ω, w で表す式にほかならない。

他の応力成分は式(1)を用いて，式(8)の第二式から

$$\sigma_x = w\cot\psi/(\tan\omega - \tan\varphi), \quad \sigma_z = w\tan\varphi/(\tan\omega - \tan\varphi) \tag{9}$$

の形で得られる。

6. この章のあとがき

鉛直面剪断力 T_V は，第3節で定義した雪Kの代数的重量 W_K^* と値がひとしい。雪Kの領域は一般に広い。それ故，その領域の境界の一部をなす曲線 C_H の形に多少の狂いがあっても，W_K^* の計算値に大きな関係誤差はもたらされない。等 T_V 曲線は，領域N内の多くの点で定められる W_K^* の値を利用して描かれるから，各点の W_K^* に付着する誤差も打消される。よって，描かれる等 T_V 曲線の狂いは小さく，その切線の方位角 ω も相当に正確な値に定めることができる。それで，3箇の応力成分 σ_x, σ_z, τ_{zx} を求めるには，第2節の σ_z を先ず定める方法より，手数はかかるが，前節の方法の方が確実であると言える。

積雪内に応力を発生させるのは重力である。積雪内の各点の積雪水量 w が重力の効果の現われで，応力は各点の w の影響がからみあって形成される。しかし，ある点の応力に最も強く影響するのは，その点の積雪水量 w である。それ故 w は，いわば，その点の応力成分の標準値である。前節の式(8)と式(9)とは，ある点の実際の応力成分が，その点の応力成分の標準値 w から外れる度合を示す形で書かれている。そして，その外れの度合は，その点から離れた点の w の影響の総和に他ならない。このように，上記の2式は，応力成分を，その物理的意味の考察に便宜な形で表現していると考えてよい。

以上の応力成分決定法では，τ_{zx} と σ_z とをきめるのに，曲線群 C_H と曲線群 C_V とのうちの前者しか用いない。曲線群 C_V は σ_x を求めるのに使われるだけである。ところが，次の第III

章の第3節で，曲線群 C_V を曲線群 C_H と雪の密度分布とから定める方法が示される。それで，2次元流下する斜面積雪内の応力の決定には，雪の密度分布と曲線群 C_H とを知るだけで十分なことになる。

III. 鉛直面上および水平面上の力の成分

1. 鉛直面上および水平面上の力の成分

第3図も，第1図第2図と同様，斜面積雪の流動面による断面で，点Pは領域N内の任意の点を表す。点Qと点Rとは積雪表面 S_0 上の点で，線分PQは鉛直，線分PRは水平である。線分PQと線分PRと曲線 S_0 とに囲まれた雪を「雪L」と呼ぶ。雪Lが線分PQの全長にわたって加える力をベクトル $\boldsymbol{F}_V$ で，雪Lが線分PRの全長にわたって加える力を $\boldsymbol{F}_H$ で表す。

第II章で導入した点Pの鉛直面剪断力 T_V は $\boldsymbol{F}_V$ の z 成分であった。力 $\boldsymbol{F}_H$, $\boldsymbol{F}_V$ のその他の成分も用いると便利である。力 $\boldsymbol{F}_V$ の x 成分を点Pの「鉛直面垂直力」となづけ記号 S_V で表す。力 $\boldsymbol{F}_H$ の x 成分，z 成分をそれぞれ「水平面剪断力」「水平面垂直力」とよび，前者には記号 T_H を後者には記号 S_H を用いる。これら力の4成分は，応力成分の積分

$$S_V=\int_P^Q \sigma_x \mathrm{d}z,\ T_V=\int_P^Q \tau_{zx}\mathrm{d}z,\ S_H=\int_P^R \sigma_z \mathrm{d}x,\ T_H=\int_P^R \tau_{zx}\mathrm{d}x \tag{10}$$

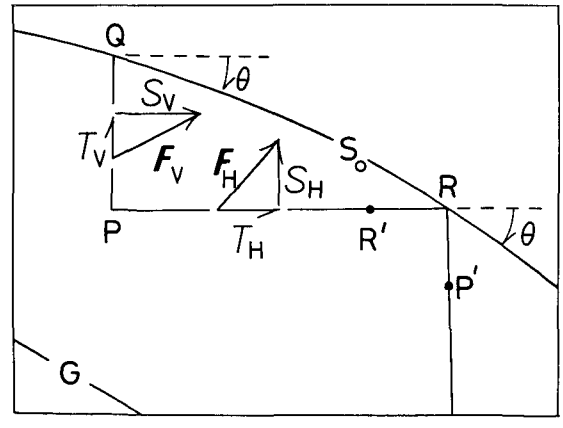
として与えられる。上記の記号で，S および T は，それぞれ，垂直力および剪断力を，添字のHおよびVは，それぞれ，水平面および鉛直面を意味する。

雪Lに作用する重力と雪Lに周囲の積雪が加える力との平衡条件から，雪Lの重量を W_L として

$$S_H=-(T_V+W_L),\qquad S_V=-T_H \tag{11}$$

の関係が導かれる。

積雪の密度分布から W_L の値が計算され，T_V の値は前章の方法で求められる。よって，S_H はその値がすでに知られているとしてよい。残りの S_V と T_H とは，そのどちらか一方の値がわかれば他方の値もわかる。ただ，どちらの値を求めるにしても，前章の方法で線分PQ上あるいは線分PR上の σ_x あるいは τ_{zx} を定めたうえ，式(10)の積分演算を実行する必要がある。そして，その演算は T_H を選んだ方が簡単におこなえる。前章の式(8), (9)が示すように，σ_x を表す式は曲線 C_V の方位角 ψ をふくむが τ_{zx} はそれ



第3図 三角形PQR内の雪を「雪L」となづける。ベクトル $\boldsymbol{F}_V$ と $\boldsymbol{F}_H$ とは，雪Lが，それぞれ，鉛直線分PQと水平線分PRとを通して，その反対側にある積雪に加える力を表す。両ベクトルの鉛直成分および水平成分を示すのに，図示の記号を用いる

を含まないからである。それにしても，次節でのべるように，その積分演算について解決しておくべきひとつの問題がある。

2. 水平面剪断力 T_H と積雪表面上の応力成分

積雪表面 S_0 上では，応力が，論文 XVI[5] で PSP と略称し記号 I で表すことにした完全単独主応力である。主応力 I の方向は曲線 S_0 の切線の方向と一致し，数少ない特別な点を除けば，I の値は 0 でない有限値である。よって，積雪表面 S_0 上の応力成分は，したがって，表面 S_0 に極めて近い所の応力成分 $(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{zx})$ もまた，一般に 0 でない有限値を持つといえる。ただ，次にのべるように，この応力成分の値にせよ I の値にせよ，曲線群 C_H と雪の密度分布 $\rho(x, z)$ とから，正確には定めにくい。

第 3 図の水平線分 PR 上その右端近くにある点では，線分 PR と積雪表面 S_0 との間の鉛直距離が極めて短いため，積雪水量 w の値が極めて小さい。したがって，式 (8) の τ_{zx} の値が有限であるためには，式 (8) の右辺の分母が非常に小さくなければならない。すなわち，曲線 C_H と等 T_V 曲線とがほぼ平行し，角 φ と角 ω との差を僅少に止める必要がある。このことは，式 (8) によって τ_{zx} の値を定めるとすれば，両曲線の形にいささかの狂いがあっても，τ_{zx} の値に大きな関係誤差が生ずることを意味する。それで，線分 PR の右端に近い部分については，その上の τ_{zx} の積分値を，次にのべる別の方法で定めることにする。

第 3 図で，点 R からくだる鉛直線上，点 P′ より下方にある点では，積雪表面から遠いため，T_V と τ_{zx} との値が十分正確に定められるとする。つまり，点 P′ は，T_V と τ_{zx} との値が正確に定められる鉛直線上の点のうち，最も点 R に近い。点 R と点 P′ とにおける τ_{zx} の値を，それぞれ，(τ_{zx}) と $\tau_{zx}(\mathrm{P}')$ とで表し，点 R と点 P′ との間では τ_{zx} が直線的に変化すると仮定する。この仮定は，両点の間隔 l_V が余り長くはないから，事実に遠くはない。すると，点 P′ での T_V の値 $T_V(\mathrm{P}')$ が

$$T_V(\mathrm{P}') = \int_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{R}} \tau_{zx} \mathrm{d}z = l_V \left\{ (\tau_{zx}) + \tau_{zx}(\mathrm{P}') \right\} \Big/ 2 \tag{12}$$

の形に表され，この式によって，積雪表面上にある点 R における τ_{zx} の値 (τ_{zx}) の値がきめられる。

次に，水平線分 PR 上に点 R′ をとり，点 R′ を，線分 PR 上で T_V と τ_{zx} との値が正確に知られる点のうち最も右にあるものとする。点 R′ と点 R との間隔 l_H は余り長くはない。それで，両点の間での τ_{zx} の変化を直線的と仮定すると，式 (12) を用いて

$$\int_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{R}} \tau_{zx} \mathrm{d}x = l_H \left\{ (\tau_{zx}) + \tau_{zx}(\mathrm{R}') \right\} \Big/ 2 = (l_H/l_V)\, T_V(\mathrm{P}') + (l_H/2) \left\{ \tau_{zx}(\mathrm{R}') - \tau_{zx}(\mathrm{P}') \right\} \tag{13}$$

がえられる。点 R′ での τ_{zx} の値を $\tau_{zx}(\mathrm{R}')$ とした。点 P と点 R′ との間の τ_{zx} の積分値は，両点の間の τ_{zx} を式 (8) によって定めることにより，求められる。それと式 (13) の値とを加えあわせれば，水平線分 PR の全長にわたる τ_{zx} の積分値 T_H となる。かくして，T_H と S_V との値が，曲線群 C_H と雪の密度分布とから，近似値ながら，得られることになった。

積雪表面 S_0 上の τ_{zx} の値を括弧でかこんで (τ_{zx}) で表したが，ほかの応力成分についても同

じ表現を用いると

$$(\sigma_x)=I\cos^2\theta,\ (\sigma_z)=I\sin^2\theta,\ (\tau_{zx})=-I\sin\theta\cos\theta \tag{14}$$

と書ける。角 θ は積雪表面曲線 S_0 の切線の方位角で，この方位角だけは，水平座標 x の正の方向から切線まで時計まわりに測る。式(12)によって求めた (τ_{zx}) から I の値が定まり，その I の値を使って他の応力成分の値が知られる。

3. 等 S_V 曲線群と曲線群 C_V との同定

領域N内で，S_V また T_V の値が等しい点をつないだ曲線を，それぞれ，等 S_V 曲線また等 T_H 曲線と名づけよう。両曲線が一致することは式(11)に示された $S_V=-T_H$ の関係から明かだが，曲線 C_V もまた等 S_V 曲線と同じであることが，以下のように，このふたつの曲線が共通の微分方程式の解であることから判る。

第3図の点Pは領域N内に任意に選んだ点である。点Pに微小変位 (dx, dz) を与えたとき，S_V におこる微小変化 dS_V が0ならば，この微小変位は等 S_V 曲線の微小部分をなす。よって

$$dS_V=(\partial S_V/\partial x)\,dx+(\partial S_V/\partial z)\,dz=0 \tag{15}$$

が等 S_V 曲線の微分方程式を与える。式(10)と $S_V=-T_H$ の関係とによって

$$\partial S_V/\partial x=-\partial T_H/\partial x=\tau_{zx},\quad \partial S_V/\partial z=-\sigma_x \tag{16}$$

が導かれる。この式の σ_x, τ_{zx} は点Pにおける応力成分である。式(16)を式(15)に代入すれば，式(15)は

$$dz/dx=\tau_{zx}/\sigma_x \tag{17}$$

に変る。これは，正に，第II章第1節で曲線 C_V の微分方程式として示した式(2)の第2式に他ならない。よって曲線 C_V と等 S_V 曲線とは，同一の微分方程式の解として一致し，同一の曲線群を形成する。

曲線群 C_H と雪の密度分布とから求められる領域N内の τ_{zx} を積分することによって，等 T_H 曲線群が描かれる。その等 T_H 曲線群は等 S_V 曲線群と一致し，等 S_V 曲線群が，また，曲線群 C_V に等しいことが判ったわけである。よって，式(9)の第1式にある曲線 C_V の切線の方位角 ψ も，結局は，曲線群 C_H と雪の密度分布とによって定ることになる。かくして，第II章の最後でのべた予告，すなわち，2次元流下する斜面積雪内の応力は曲線群 C_H と積雪の密度分布とを用いるだけで決定しうると言うこと，が証明された。

凝集力のない土の安定を論ずる論文[6]で，Rankineは，鉛直面垂直力に負号をつけた $(-S_V)$ を horizontal thrust と名づけ，等 S_V 曲線群の各要素曲線から座標 y の方向にひろがる曲面群を surfaces of uniform horizontal thrust と呼んだ。凝集力のない土では，σ_x が正の値をとって張力となることがない。したがって，S_V は，常に値が負で圧力となる。それで $(-S_V)$ に thrust の名を与えたのであろう。積雪のばあいには，凝集力があるから，S_V は，正負いづれの値でもとりえ，張力になることも圧力になることもある。

等 T_V 曲線の微分方程式は，すでに，第II章第5節で式(8)の第1式として得ている。上

と同様に，$dT_V=0$ とおいても，式(10)式(11)と

$$W_L=\int_P^R w\mathrm{d}x \longrightarrow \partial W_L/\partial x=-w \tag{18}$$

の関係とを使って，式(8)の第1式に達する。

IV. まとめ

第I章「まえがき」の第1節でのべたように，2次元的に山の斜面を流下する積雪内の応力分布を雪の密度分布と曲線群 C_H および曲線群 C_V とから定める新しい方法を示した。正確の点で，また，えられる応力成分表式の物理的意味が理解しやすい点で，論文IX[2]で用いた方法にくらべ優ると思われる。まず，曲線群 C_H と斜面積雪の密度分布とから等 T_V 曲線群と名づけるものを作った。すると，σ_z と τ_{zx} とが，この曲線群と曲線群 C_H とから得られる。しかし，σ_x の決定には，そのうえに，曲線群 C_V が必要である。ところが，えられた τ_{zx} を利用して，さらに，等 T_H 曲線群なるものを作ったら，それが曲線群 C_V と一致することが判った。つまり，曲線群 C_V も，曲線群 C_H と雪の密度分布とを用いて描けるわけである。かくして，応力の3成分 σ_x, σ_z, τ_{zx} 全部の分布が，この論文の方法を用いれば，曲線群 C_H と雪の密度分布とのふたつだけから知られることになった。それ故，曲線 C_V は定められないが，曲線 C_H なら定めうる実験的操作があれば，それだけで応力分布決定には十分である。しかし，曲線 C_V も定められる方法が用いられるばあいには，その曲線 C_V を利用した方が便利であるし，えられる応力分布も正確になる。

この論文は，低温科学研究所の藤岡敏夫教授と鈴木義男教授とに検討してもらい，有益な教示と助言とを受けた。ここに記して，両教授に対する謝意を表す。

文　献

1) 吉田順五 1980 斜面積雪の挙動の研究 VII. 低温科学，物理篇，**39**, 1-16.
2) 吉田順五 1981 斜面積雪の挙動の研究 VIII, IX. 低温科学，物理篇，**40**, 25-35, 37-49.
3) 吉田順五 1982 斜面積雪の挙動の研究 X. 低温科学，物理篇，**41**, 25-42.
4) 吉田順五 1983 斜面積雪の挙動の研究 XII, XIII. 低温科学，物理篇，**42**, 21-38, 39-56.
5) 吉田順五 1984 斜面積雪の挙動の研究 XV, XVI, XVII. 低温科学，物理篇，**43**, 1-14, 15-31, 33-47.
6) Rankine, W. J. M. 1857 On the stability of loose earth. Trans. Roy. Soc., London, **147**, 9-27.

Summary

1. The snow cover is supposed to flow two-dimensionally down a wide mountain slope which extends uniformly in the horizontal direction. Let "domain N" be a long portion of a vertical section of the snow cover which ranges more than several times its thickness along the mountain slope. The present Paper XX describes how to determine the stresses of snow in domain N from curves C_H and curves C_V when they have been drawn by some certain means throughout the domain, on the assumption that density ρ of snow is known exactly everywhere in it.
2. Curve C_H and curve C_V are both plane curves lying in a vertical section of the snow

cover made in the steepest direction of the mountain slope. Domain N makes a portion of this vertical section. Let $\boldsymbol{f}_H(\boldsymbol{f}_V)$ denote a vector component on a horizontal (vertical) plane of the internal stress of the snow cover. Curve $C_H(C_V)$ is such a curve whose tangent coincides in direction with $\boldsymbol{f}_H(\boldsymbol{f}_V)$ at every point upon it. Therefore, if coordinates x and z are respectively placed horizontally and vertically upward in the vertical section, and if the tangent of curve $C_H(C_V)$ makes angle $\varphi(\psi)$ against the horizontal, the equations

$$\tan\varphi = \sigma_z/\tau_{zx}, \quad \tan\psi = \tau_{zx}/\sigma_x \tag{A}$$

hold, and from these follow the differential equations

$$dz/dx = \sigma_z/\tau_{zx}, \quad dz/dx = \tau_{zx}/\sigma_x \tag{B}$$

for curves C_H and curves C_V respectively.

3. Physical nature of curve $C_H(C_V)$ is characterized by the fact that the internal stress acts on curve $C_H(C_V)$ horizontally (vertically) at every point upon it. It results from this that the force of snow acting on any portion of curve $C_H(C_V)$ has no vertical (horizontal) component.

4. Once curves C_H and curves C_V have been drawn, angles φ and ψ are known in value at any point in domain N. Therefore, if any one of σ_x, σ_z and τ_{zx} is known at a point, the other two can be obtained by use of Eqs. (A), that is, the internal stress of the snow cover is determined at that point.

5. As was shown in Papers XV[5] and XVI[5], curve C_H is a regular curve of "type H", except in rare cases in which a point or points of peculiar stress appear in domain N. "Type H" is used here as the name for any continuous curve which connects a point on the ground and a point on the surface of the snow cover. Those rare cases are disregarded in this Paper XX. Then any point P in domain N divides curve C_H through it into two parts: the part connecting point P to a point on the surface of the snow cover and the part connecting point P to a point on the ground. The former part shall be called "upper curve C_H of point P", while the latter part shall be called "lower curve C_H of point P".

6. Density ρ of snow is measured at so many points in domain N that the weight of snow surrounded by any closed curve in the domain can be obtained by calculation. If the water equivalent of snow above point P is denoted by w, then w can also be calculated wherever point P is positioned in domain N.

7. Figures 1, 2 and 3 of the text show the vertical section of the snow cover, its surface and the ground being given by curve S_0 and curve G respectively. Points P or P_i in the Figures represent points arbitrarily chosen in domain N. Figure 1 (a) illustrates how to determine σ_z at point P_i $(i=1, 2)$. Segment $A_iP_iB_i$ is horizontal and very short in length l_i. Let W_i denote the weight of the snow which lies between the pair of upper curves C_H starting from both the ends of the segment. Then, if $i=1$, then σ_z is given by $-W_1/l_1$ at point P_1, whereas, if $i=2$, then σ_z is given by W_2/l_2 at point P_2.

8. As the above pair of upper curves C_H keep all along their length very short distances between them, any small error in the shape of the curves brings a great relative error into W_i. To be free from such a fault, there will be developed another method in which τ_{zx} is determined instead of σ_z.

9. In Fig. 1 (b), point Q_i $(i=1, 2)$ is the intersection of curve S_0 with the vertical straight line through point P_i $(i=1, 2, 3)$. The snow which curve S_0, line P_iQ_i and upper curve C_H of point P_i enclose shall be called "snow K of point P_i". Generally snow K is, like snow K

of point P_3 in Fig. 1 (b), formed of left parts, namely parts lying to the left of line P_iQ_i, and right parts, namely parts lying to the right of line P_iQ_i. Let the weight of the left parts and of the right parts be counted plus and minus respectively, while let the algebraic sum of all of them be called "algebraic weight of snow K" which is denoted by W_K^*.

10. In Fig. 3, points Q and R are respective intersections of curve S_0 with vertical and horizontal straight lines passing through point P. Let the following integrals

$$S_V = \int_P^Q \sigma_x dz, \quad T_V = \int_P^Q \tau_{zx} dz, \quad S_H = \int_P^R \sigma_z dx, \quad T_H = \int_P^R \tau_{zx} dx \tag{C}$$

be introduced, and let the name "snow L" be given to the snow enclosed by line PQ, line PR and curve S_0. If the weight of snow L is denoted by W_L, equilibrium conditions for snow L yield

$$S_H = -(T_V + W_L), \qquad S_V = -T_H. \tag{D}$$

11. Returning to Fig. 1 (b), integral T_V is the vertical component of the force which the snows lying to the left or to the right of line P_iQ_i exert throught that line on snow K. No vertical component is had by the force acting on upper curve C_H of point P_i which makes one of the curves bounding snow K. Therefore it follows that

$$T_V = W_K^*. \tag{E}$$

Let a curve in domain N on every point of which T_V has the same value be called "equi-T_V curve". There are infinitely numerous equi-T_V curves that differ from one another in value of T_V, and they fill domain N to leave no vacant spaces in it.

12. In Fig. 2 (a), the curve marked T_V is an equi-T_V curve which passes through point P. The broken straight line shows the tangent to the equi-T_V curve at point P, the direction of the tangent being given by angle ω counted counter-clockwise from the horizontal. Let the name "snow J'" be given to the snow between verticals AA′ and BB′ which stand very small horizontal distance dx apart. If $-Z_T dx$ denotes the vertical component of the force exerted on base AB of snow J′ by the snow lying below, $-Z_T dx$ makes the only force to support weight $w dx$ of snow J′, because the forces acting on sides AA′ and BB′ of snow J′ cancel each other in the vertical direction. Thus the relation

$$Z_T = -w \tag{F}$$

is obtained, where $-Z_T$ is the vertical component per horizontal unit length of the force with which the snow lying above the equi-T_V curve pushes down the snow lying below it.

13. Triangle CDE in Fig. 2 (b) is a very small triangle in domain N with $CD = dx$ and $DE = dz$. A very small portion of the equi-T_V curve makes its oblique side CE. The equilibrium conditions for the snow in this triangle yield

$$\tau_{zx} = w/(\tan\omega - \tan\varphi) \tag{G}$$

using Eq. (F); and Eqs. (A) give

$$\sigma_x = \cot\psi \cdot \tau_{zx}, \qquad \sigma_z = \tan\varphi \cdot \tau_{zx}. \tag{H}$$

It is noted that σ_z and τ_{zx} can be given in the above forms by the use of curves C_H and the distribution of density ρ of snow with no reference to curves C_V.

14. As angle ψ is included in σ_x of Eqs. (H), curves C_V are needed for obtaining it. But, as will be shown below, curves C_V can be derived from curves C_H and the distribution of density

ρ of snow, with the result that the stresses in domain N are completely determined by ρ and curves C_H.

15. The value of T_H can be obtained as a function of point P by integrating τ_{zx} which Eq. (G) gives on line PR of Fig. 3, and an equi-T_H curve can be drawn by using the thus obtained value of T_H. The equi-T_H curve is an equi-S_V curve at the same time because of the second relation of Eqs. (D). The differential equation for the equi-S_V curve is given by

$$dS_V = (\partial S_V/\partial_x)dx + (\partial S_V/\partial z)dz = 0 \qquad (I)$$

while the relations

$$\partial S_V/\partial x = -\partial T_H/\partial x = \tau_{zx}, \qquad \partial S_V/\partial z = -\sigma_x \qquad (J)$$

follow from Eqs. (C).

16. Equation (I) is rewritten through Eqs. (J) into

$$dz/dx = \tau_{zx}/\sigma_x\,, \qquad (K)$$

which is the differential equation for curve C_V as shown by the second equation of Eqs. (B). Therefore, the equi-S_V curve and curve C_V turn out to be the same as the solution of the same differential equation. This means, as noted in Article 14, that curves C_V can be derived from ρ and curves C_H.