



Title	木材の可塑性に関する理論及び実験
Author(s)	大澤, 正之; 加納, 孟
Citation	北海道帝國大學農學部 演習林研究報告, 12(2), 1-24
Issue Date	1942-12
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/20654">http://hdl.handle.net/2115/20654</a>
Type	bulletin (article)
File Information	12(2)_P1-24.pdf



[Instructions for use](#)

# 演習林研究報告 第十二卷第二號

## 1

### 木材の可塑性に関する理論及び實驗

林學博士 大 澤 正 之  
林 學 士 加 納 孟

#### 目 次

I. 緒 言	1
II. 可塑性に関する理論	2
III. 計算の方法	16
IV. 實驗の方法並に成績	17
(1) 實驗装置	17
(2) 供試材片の種類及び處理	18
(3) 實驗操作	19
(4) 實驗結果	22
V. 摘 要	24

#### I. 緒 言

材料強弱學は工學方面への應用を目的として彈性學の領域から導き出されたものであるが、近時可塑性に関する研究が進歩したる爲め之に基づき更に多くの理論的研究が附隨された。即ち吾人が取扱ふ材料中完全彈性體と名づけ得るものは極めて僅少にして、如何に精密なる實驗と雖も彈性に基礎を置いたものであれば其のまゝ實際の材料には適合しない。之に可塑性に関する理論を加味して初めて全きを期し得るものである。又實驗的根據から見ても、最近材料強

( 2 )

弱試験機の精密度が高まつた結果、益々材料の非弾性的であることが確かめられるに到つた。

木材の機械的性質の研究者は今日まで木材を他の材料と同様に完全弾性體なる假定の下に實驗を行つてゐる。而して木材を構築材として利用する時に起る材料の設計に當つては通常かゝる實驗より得たる數値と安全率を基礎とし之が推定計算を行ふのである。然れども吾人の木材に關する智識が進むに伴ひ、かゝる方法に依る木材の取扱は適當でないことが明となつた。即ち木材は他の金屬材料と著しく異り、其の彈性限界甚だ低く而もその限界内にも應力と歪とは一次的比例關係を嚴正には示さないから、木材の彈性限界決定に對し非常に不便と不完全性を感じるのである。之木材に可塑性換言せば内部粘性として知られる性質が存するからであつて、木材に外力が作用すると木材分子はその外力に依つて相互の位置狀態を變化し外力のエネルギーの一部は木材分子の摩擦に於て失はれるに歸因するものである。故に分子の摩擦係數たる内部粘性係數（或は單に粘性係數といふ）は微細構造並に解剖學的構造の偏異により材質を異にすべき各樹種に於て夫々特有なる値を有し、又木材について一般に知られてゐる機械的並に物理的性質と同様に木材の含有水分と密接な關係にあるべき筈である。爰に於てか著者等は材料強弱に關する研究の一端として可塑性と關聯する木材の内部粘性係數検討の必要を感じ之が理論を究明し、更に内部粘性係數測定に對し必要なる振動實驗を行ひたるを以てその研究成績の一部を發表することにした。尙木材の振動に關する實驗は木材構築物の耐震性、航空機用材料の強度、木材質の防音効果並に樂器材等に關する研究に欠くべからざるものであるが、木材の性質研究領域内には之につき紹介せられたもの少きを以て、本研究成績が將來この種の實驗を行はんとするものの參考となり得れば幸である。

本研究の實施に當つては實驗裝置の費用として文部省科學研究費の補助に負ふところ尠くない。又之が印刷發表の機會を得たのは演習林長中島博士の御盡力に據るものである。茲に特記して謝意を表する。

## II. 可塑性に關する理論

一般に材料の可塑性と密接な關係にある材料の内部粘性係數は材料の歪の速度が彈性限界を超へた範圍内の應力に比例する場合其の比例常數として表はされる。即ち

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{\eta} (\sigma - \sigma_0)^n \dots \dots \dots (1)$$

の公式中  $\eta$  が内部粘性係數である。換言すれば材料の内部粘性係數は歪が變化する割合を以て示し得る。而して此の内部粘性係數は材料によつて異なるが木材の如き固體の内部粘性係數を求

めるには木材を振動せしめて其の振動の減衰率を測定することにより實驗的に定められるものである。而して一般に棒の振動に關する理論が究明せられてゐるから此の理論を木材の振動實驗に適用し木材の内部粘性係数を計算して見た。

物理學或は材料力學に於て棒の振動に對する微分方程式<sup>1)</sup>は次の如し。

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \xi k^2 \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + \zeta \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

式中  $\rho$  は質量,  $E$  は彈性係數,  $k$  は慣性半徑,  $\xi$  は内部粘性係數,  $\zeta$  は空氣の抵抗係數を示し棒の任意の點  $x$  の偏倚を  $y$  とする。

而して此の方程式の由來を探ぬるに, 均一なる斷面を有する棒の撓み振動に關する物理學的理論を究明するの必要に迫られるので, 前記微分方程式の作り方並に其の解き方につき以下説述を試みやう。

物理學に於て一般に質量  $m$  なる物體に作用する力を  $F$  とし, それにより生ずる加速度を  $u$  とすれば

$$m u = F$$

となる。

今第一圖に於て棒の微小部分を取り,  $P$  及び  $P'$  點に夫々剪斷力  $F$  及び  $F+dF$  が作用してゐると考へれば,

$$(F+dF) - F = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$
$$\frac{dF}{dx} = \rho a \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dots\dots\dots(3)$$

但し  $\rho$  を棒の密度,  $a$  をその横斷面とする。これは等布荷重を受けた梁に於ける力學的問題と同様であつて梁の中心線上の原點  $0$  から距離  $x$  に於ける單位長さの荷重を  $w$  とすれば長さ  $dx$  上の荷重は  $w dx$  であり剪斷應力及び曲げモーメントは,  $x$  に於ては  $F$  及び  $M$ , 又  $(x+dx)$  に於ては  $(F+dF)$  及び  $(M+dM)$  である。

然るときは, 第二圖に示す如く

$$F+dF+w dx=F$$

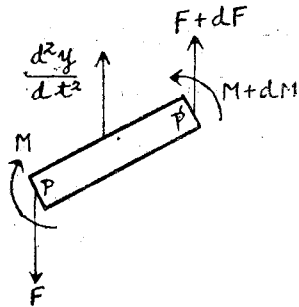
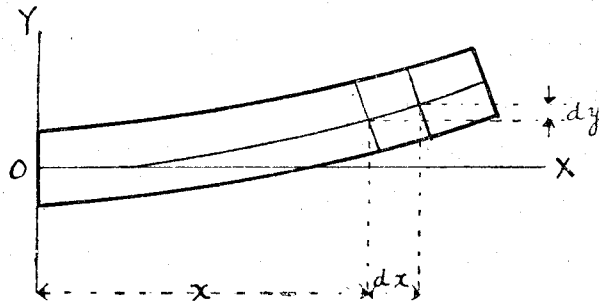
故に  $dF=-w dx$

$$\frac{dF}{dx} = -w \dots\dots\dots(4)$$

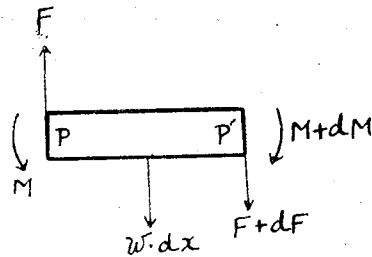
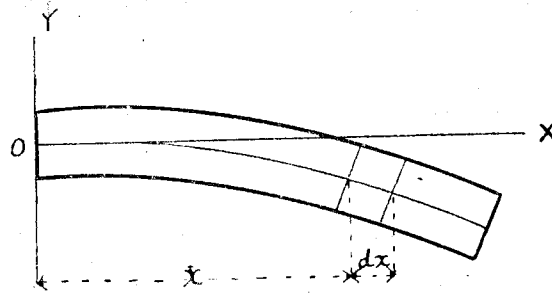
1) Sezawa K. and Kubo K.: Measurement of the Solid viscosities of materials through the flexural vibratons of a bar.  
Report of the Aeronautical Research Institute. Vol. V. No. 89. 1932.  
妹澤克惟: 震動學, 昭和七年, 頁79.--86.

(4)

第一圖



第二圖



即ち作用する剪断力は荷重の慣性による力である事が明にされる。

次に P' 點に於てモーメントをとると、 $w dx$  は PP' の中央に於て作用すると考へられるから

$$(M+dM) + F dx = M + w dx \frac{1}{2} dx$$

$$dM = -F dx + w \cdot \frac{1}{2}(dx)^2$$

$$\frac{dM}{dx} = -F + \frac{1}{2} w dx$$

極限では  $dx=0$  であるから

$$\frac{dM}{dx} = -F \dots \dots \dots (5)$$

(4) と (5) から

$$\frac{dF}{dx} = -w$$

$$\frac{d}{dx} \frac{dM}{dx} = w$$

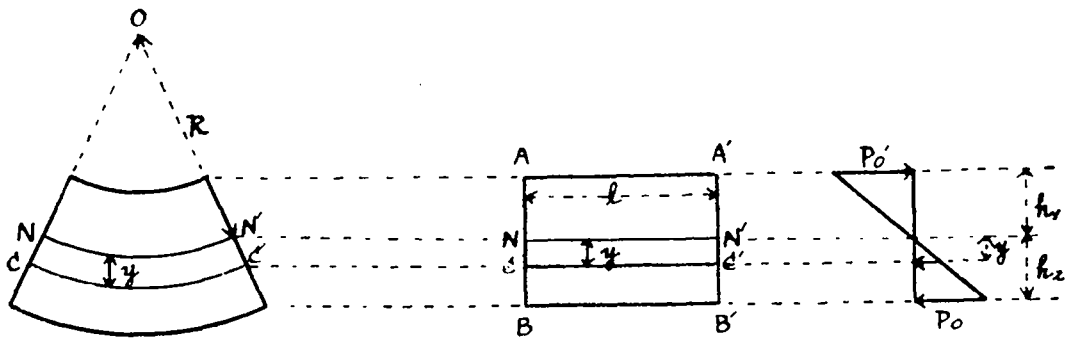
故に  $\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{dF}{dx} = w \dots \dots \dots (6)$

更に梁のたみの場合に於て上圖を擴大して見ると第三圖の如くなる。

今第三圖に於て中立軸の長さ  $NN'=l$ ,  $cc'=1+\Delta l$  とすれば、 $\angle ONN' \approx \angle OCC'$  より

$$\frac{R+y}{R} = \frac{1+\Delta l}{1} \\ \frac{1}{R} = \frac{\Delta l}{1} \cdot \frac{1}{y} \dots \dots \dots (7)$$

第 三 圖



第三圖に示す如く應力は中立軸を遠ざかるに従ひ直線的に増大し、上端及び下端に於て最大値に達する。 $NN'$ の周りの應力のモーメントを求めるに  $y$ なる距離に於ける應力を  $P_y$  とすれば

$$P_y = P_0 \cdot \frac{y}{h}$$

$NN'$ の周りのモーメント  $M_N$  は

$$M_N = \int_{-h_2}^{+h_1} P_y dA \cdot y$$

( 6 )

$$\begin{aligned} &= \int_{-h_2}^{+h_1} \frac{P_0}{h_2} y^2 dA_y \\ &= \frac{P_0}{h^2} I \end{aligned}$$

但し  $dA_y$  は面積,  $I$  は慣性能率を表はす。

然るに應力に因るモーメントの大きさは外力に因る曲げモーメントの大きさに等しい。外力に因る曲げモーメントを  $M$  とすれば

$$M = \frac{P_0}{h_2} I = \frac{P_y}{y} I$$

故に應力  $P$  は  $P = \frac{M}{I} y$  ..... (8)

(7) と (8) から

$$\begin{aligned} \frac{\Delta l}{l} &= \frac{P}{E} = \frac{M}{EI} y \\ \therefore \frac{1}{R} &= \frac{M}{EI} \end{aligned} \quad \text{..... (9)}$$

更らに微分學に於て曲率半徑は次の如く與へられる。即ち

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left\{ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \quad \text{..... (10)}$$

(10) 式に於て  $\left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$  は 1 に比して極めて小であるからこれを省略すると

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{..... (11)}$$

(11) と (9) の兩式から

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{..... (12)}$$

棒の横斷面を  $a$ , 慣性能率を  $I$  とすれば廻轉慣性半徑  $k$  はその定義に依り

$$\frac{I}{a} = k^2 \quad \text{..... (13)}$$

(12) 及び (13) 式から

$$M = E a k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{..... (14)}$$

(14) 式及び (6) 式から

$$-\frac{dF}{dx} = E a k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

これを (3) 式に代入して

$$\rho a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = E a k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \text{..... (15)}$$

此の (15) なる式は棒の撓み振動を表はす有名なる微分方程式である。

(7)

次にこれと同様な方法に於て材料の内部粘性として知られてゐる因子を考慮した微分方程式を導かう。

今第四圖の如く棒が撓みを受けたるときその微小部分を取り、それに於て中立軸の長さを  $h$  としそれから  $k$  だけ距たりたる  $O_1 O_2$  の長さを  $h + \Delta h$  とする。曲率半徑を  $R$  とすれば(7)式に於けると同様に

$$\frac{h + \Delta h}{h} = \frac{R + k}{R} \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{k}{R}$$

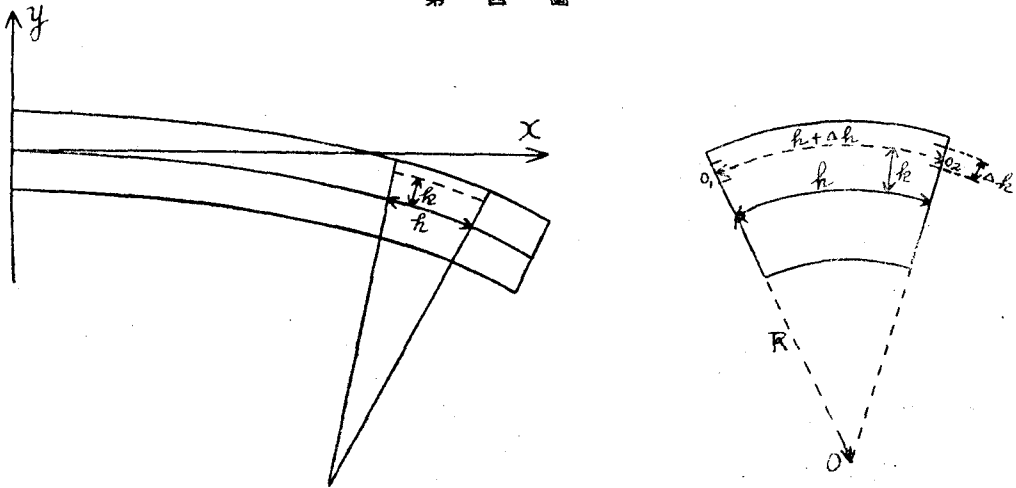
弾性係数を  $E$  とし  $\Delta k$  の部分に作用する水平分力を考ふるにそれは伸びに比例するから

$$E \frac{k}{R} \Delta k$$

曲率半徑  $R$  を  $x$  の函数と考へ力の方向  $\rightarrow$  を正  $\leftarrow$  を負とすれば  $O_1$  及び  $O_2$  點に作用する水平力の合力は

$$\begin{aligned} & -E \frac{k}{R(x)} \Delta k + E \frac{k}{R(x + \Delta x)} \Delta k \\ & = E k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) \Delta x \Delta k \end{aligned}$$

第四圖



此の水平力が軸に對するモーメントは  $Ek^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R} \right) \Delta x \Delta k$  となり、厚さ  $d$  に對し水平力の總和を求めると次の如し。

$$\begin{aligned} & \int_{-d}^{+d} E k^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) \Delta x \Delta k \\ & = E \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) \Delta x \int_{-d}^{+d} k^2 dk \end{aligned}$$



( 8 )

$$\begin{aligned}
&= E I \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) \Delta x \\
&= E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x \dots\dots\dots(17)
\end{aligned}$$

但し I は慣性能率を表はす。

次に(16)式から

$$h + \Delta h = \left( \frac{R+k}{R} \right) h$$

今  $0_2$  點の兩側に於て伸びの速度を  $v$  とすれば

$$\begin{aligned}
v &= \frac{\partial}{\partial t} (h + \Delta h) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R+k}{R} \right) h \\
&= h \frac{\partial}{\partial t} \left( 1 + \frac{k}{R} \right) \\
&= h k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R} \right)
\end{aligned}$$

茲で  $0_2$  點の兩側に於て伸びの速度が夫々相異ると考へると第四圖では  $0_2$  點の上が下よりも速度大である。而してその  $k$  に對する變化に依り内部粘性の現象が生ずるとし、更にこのときの比例常數を  $\hat{\xi}$  として表はすと

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial k} &= h \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R} \right) \\
-\hat{\xi} v &= -\hat{\xi} h k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R} \right)
\end{aligned}$$

之れが全面積の能率を考ふるに

$$\begin{aligned}
-\int_{-d}^d k \hat{\xi} v \, dk &= -\hat{\xi} h \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R} \right) \int_{-d}^d k^2 \, dk \\
&= -\hat{\xi} I \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R} \right) h
\end{aligned}$$

$$h \rightarrow dx \text{ とすれば } = -\hat{\xi} I \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R} \right) \Delta x$$

$$= -\hat{\xi} I \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} \Delta x \dots\dots\dots(18)$$

(18) 式は  $0_2$  點に於ける速度を問題としたので、 $0_1$  點に於ける速度を零としこれを規準として  $0_2$  點に於ける相對速度を出したのであるが、今  $0_1$  點に於ける速度を  $V(x)$ 、 $0_2$  點に於ける速度を  $V(x + \Delta x)$  とすれば、茲で  $v$  としたのは

$$v = V(x + \Delta x) - V(x)$$

を意味する。それ故に(18)式に於て  $(x + \Delta x) \rightarrow x$  即ち  $x \rightarrow (x - \Delta x)$  とすれば(18)式は

$$-\xi I \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} \Delta x \dots \dots \dots (19)$$

となる。

次に y 方向に於ける剪断力を F とし F を x と t との函数とし、要素の両端に P(x,t) 及び F(x+Δx,t) なる力が作用し方向反対であるとする。

然るときはその合力は

$$\begin{aligned} & F(x,t) - F(x+\Delta x,t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x \end{aligned}$$

単位長さの質量を ρ とすればその全質量は ρ Δx, 加速度は y 方向に  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  である。故に運動の方則に依り

$$-\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Delta x$$

$$\text{故に} \quad -\frac{\partial F}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dots \dots \dots (20)$$

而して F なる剪断力は上述せる (17) 及び (19) の力の誘因となるから

$$F = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \xi I \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} \dots \dots \dots (21)$$

$$(21) \text{ 式から} \quad -\frac{\partial F}{\partial x} = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \xi I \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^3}$$

之れに (20) 式を代入し

$$\rho a \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E a k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \xi a k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} = 0$$

更に単位長さに對する空氣の抵抗係数を ζ とすれば

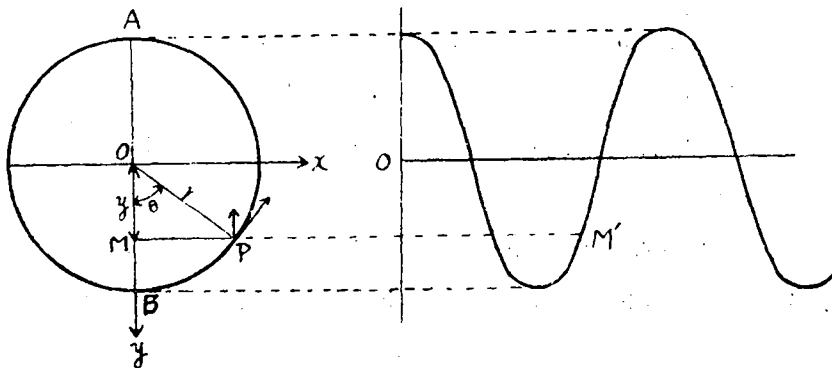
$$\rho a \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E a k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \xi a k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} + \zeta a \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

$$\text{故に} \quad \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \xi k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} + \zeta \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (22)$$

此の (22) 式は材料の内部粘性及び空氣の抵抗を顧慮した棒の振動に對する微分方程式である。

今此の微分方程式を解くに (第五圖参照)

第 五 圖



(10)

任意の直径 AB なる圆周上を質点 P が圖の如く圓運動をなすとき P 點の y 軸上への正射影 M の運動を考へるに P 點の位置は  $\theta$  なる位相角により定まる。

M 點の運動は

$$y = r \cos \theta$$

P 點の角速度を  $p$  とすれば

$$y = r \cos pt$$

然るに運動が時間  $t$  と共に次第に減衰するから

$$y = e^{rt} \cos pt$$

一般には  $y = a u e^{rt} \cos (pt + \beta) \dots\dots\dots(23)$

と假定する事が出来る。

但し  $a$  及び  $\beta$  は積分常数を表はし  $u$  は  $x$  の函数であるとする。

(23) 式から

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a u r e^{rt} \cos (pt + \beta) - a u e^{rt} p \sin (pt + \beta) \dots\dots\dots(24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= a u r^2 e^{rt} \cos (pt + \beta) - a u r e^{rt} p \sin (pt + \beta) \\ &\quad - a u r e^{rt} p \sin (pt + \beta) - a u e^{rt} p^2 \cos (pt + \beta) \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = a \frac{d^4 u}{dx^4} e^{rt} \cos (pt + \beta) = a m^4 u e^{rt} \cos (pt + \beta) \dots\dots\dots(26)$$

但し茲で

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = m^4 u \dots\dots\dots(27)$$

と假定した。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} &= a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} r e^{rt} \cos (pt + \beta) - a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} e^{rt} p \sin (pt + \beta) \\ &= a m^4 u r e^{rt} \cos (pt + \beta) - a m^4 u e^{rt} p \sin (pt + \beta) \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

茲で (22) 式に (24), (25), (26) 及び (28) 式の條件を代入すれば

$$\begin{aligned} &\rho [a u r^2 e^{rt} \cos (pt + \beta) - a u r e^{rt} p \sin (pt + \beta) - a u r e^{rt} p \sin (pt + \beta) \\ &\quad - a u e^{rt} p^2 \cos (pt + \beta)] + E k^2 [a m^4 u e^{rt} \cos (pt + \beta)] + \xi k^2 [a m^4 u r e^{rt} \cos (pt + \beta) \\ &\quad - a m^4 u e^{rt} p \sin (pt + \beta)] + \zeta [a u r e^{rt} \cos (pt + \beta) - a u e^{rt} p \sin (pt + \beta)] = 0 \end{aligned}$$

左邊を  $a u e^{rt}$  で除し

$$\begin{aligned} &\rho [\gamma^2 \cos (pt + \beta) - 2 \gamma p \sin (pt + \beta) - p^2 \cos (pt + \beta)] + E k^2 m^4 \cos (pt + \beta) \\ &\quad + \xi k^2 [m^4 \gamma \cos (pt + \beta) - m^4 p \sin (pt + \beta)] + \zeta [\gamma \cos (pt + \beta) - p \sin (pt + \beta)] = 0 \end{aligned}$$

左邊を  $\sin (pt + \beta)$  及び  $\cos (pt + \beta)$  に付き整頓すれば

$$\begin{aligned} & \cos(pt + \beta)[\rho \gamma^2 - \rho p^2 + E k^2 m^4 + \xi k^2 m^4 \gamma + \zeta \gamma] \\ & - \sin(pt + \beta)[2\rho \gamma p + \xi k^2 m^4 p + \zeta p] = 0 \end{aligned}$$

故に

$$\rho \gamma^2 - \rho p^2 + E k^2 m^4 + \xi k^2 m^4 \gamma + \zeta \gamma = 0 \dots\dots\dots (29)$$

$$2\rho \gamma p + \xi k^2 m^4 p + \zeta p = 0 \dots\dots\dots (30)$$

(30) 式から

$$\gamma = -\frac{\xi k^2 m^4 + \zeta}{2\rho} \dots\dots\dots (31)$$

(31) 式を (29) 式に代入して  $p$  の二次方程式を解けば

$$p = \sqrt{\frac{E k^2 m^4}{\rho} - \left(\frac{\xi k^2 m^4 + \zeta}{2\rho}\right)^2} \dots\dots\dots (32)$$

(31), (32) 式の  $\gamma$  及び  $p$  の値を (23) 式に代入すれば

$$y = a u e^{-\frac{\xi k^2 m^4 + \zeta}{2\rho} t} \cos\left[\sqrt{\frac{E k^2 m^4}{\rho} - \left(\frac{\xi k^2 m^4 + \zeta}{2\rho}\right)^2} t + \beta\right] \dots\dots\dots (33)$$

此の (33) なる解は微分方程式 (22) の一般的なる解であるが茲に (27) 於て

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = m^4 u$$

と假定した。

今之れを解く爲に

$$u = A e^{nx}$$

とすると

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = n^4 A e^{nx}$$

$$n^4 = m^4$$

$$n^2 = \pm m^2$$

$$n = \pm m \text{ 又は } \pm im$$

因つて (27) 式の解は

$$\left. \begin{aligned} u &= A_1 e^{mx} \\ u &= A_2 e^{-mx} \\ u &= A_3 e^{imx} \\ u &= A_4 e^{-imx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

左邊の總和を  $u$  に等しく置いて一の解を得る。

$$u = A_1 e^{mx} + A_2 e^{-mx} + A_3 e^{imx} + A_4 e^{-imx} \dots\dots\dots (35)$$

然るに

(12)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

故に

$$\left. \begin{aligned} e^{mx} &= \cosh mx + \sinh mx \\ e^{-mx} &= \cosh mx - \sinh mx \\ e^{+imx} &= \cos mx + i \sin mx \\ e^{-imx} &= \cos mx - i \sin mx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

故に (35) 式は

$$u = A \cos mx + B \sin mx + C \cosh mx + D \sinh mx \dots\dots\dots (37)$$

茲で境界条件を入れて A, B, C, D, を消去するに一端固定他端自由で自由端に有限荷重 M (本實驗にては鏡と小鐵片の重量) を有する棒に於て原點を固定端にとると

x=0 に於ては

$$u = 0 \dots\dots\dots (38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (39)$$

(38) は固定端に於て變位がないので振幅 u は零になる事を示し, (39) は固定端に於て棒はその方向を變へない事即ち棒が撓みに因つて彎曲するとき固定端に於てその彎曲線に對する切線は x 軸である事を示す。

次に自由端に於ては

即ち x=l に於ては

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI}$$

而して自由端に於てはモーメントは零であるから

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots (40)$$

$$\text{又 } F = -M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

次に (12) 公式に於けるモーメント M の符號は混同するのでモーメントを  $\theta$  で示し書きなほすと

$$\theta = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots\dots\dots (12)$$

$$F = -\frac{\partial \theta}{\partial x} \dots\dots\dots (5)$$

$$= EI \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$=EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

故に  $EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  .....(41)

振動の正則型から  $y = u \sin(pt + \alpha)$  として(41)式に代入すれば

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \sin(pt + \alpha) = -M u p^2 \sin(pt + \alpha)$$

$\sin(pt + \alpha)$  で両邊を除し.

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -M p^2 u$$
 .....(42)

然るに  $y = u \sin(pt + \alpha)$  から

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -p^2 u \sin(pt + \alpha)$$
 .....(43)

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \sin(pt + \alpha)$$
 .....(44)

(43)及び(44)式を(42)式に代入すれば

$$Ek^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \sin(pt + \alpha) = \rho p^2 u \sin(pt + \alpha)$$

之れに(27)式を代入して

$$m^4 = \rho \frac{p^2}{Ek^2}$$
 .....(45)

之れから

$$p^2 = \frac{Ek^2 m^4}{\rho}$$
 .....(46)

(42)式に(46)式を代入すれば

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{m^4 M}{a \rho} u$$
 .....(47)

茲で(37)式に(38)式を代入すれば

$$A + C = 0$$

又(37)を  $x$  で微分したるものにつき  $x=0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  の条件を入れると

$$B + D = 0$$

故に(37)式は次の形となる。

$$u = A(\cos mx - \cosh mx) + B(\sin mx - \sinh mx)$$
 .....(48)

之より

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -m A(\sin mx + \sinh mx) + m B(\cos mx - \cosh mx)$$
 .....(49)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -m^2 A(\cos mx + \cosh mx) + m^2 B(\sinh mx - \sin mx)$$
 .....(50)

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -m^3 A(\sinh mx - \sin mx) - m^3 B(\cos mx - \cosh mx)$$
 .....(51)

今  $x$  の代りに棒の長さ  $l$  を入れ(40)式と(50)式を用ゐると

$$-A(\cos ml + \cosh ml) - B(\sin ml + \sinh ml) = 0$$
 .....(52)

( 14 )

又(47)式と(51)式から

$$\begin{aligned}
& -m^3 \{A(\sinh ml - \sin ml) + B(\cosh ml + \cos ml)\} \\
& = \frac{m^4 M}{a \rho} \{A(\cosh ml - \cos ml) + B(\sinh ml - \sin ml)\} \dots\dots\dots (53)
\end{aligned}$$

(52) 及 (53) の兩式を利用し A 及び B の比を消去すれば

$$\begin{aligned}
& -(\sinh^2 ml - \sin^2 ml) + (\cosh ml + \cos ml)^2 \\
& = \frac{m M}{a \rho} \{(\cosh ml - \cos ml)(\sinh ml + \sin ml) \\
& - (\sinh ml - \sin ml)(\cosh ml + \cos ml)\}
\end{aligned}$$

之を簡単にすれば

$$1 + \cosh ml \cos ml = \frac{m M}{a \rho} (\cosh ml \sin ml - \sinh ml \cos ml) \dots\dots\dots (54)$$

棒全體の重量  $\rho a l$  に對する集中質量  $M$  との比  $M/\rho a l = c$  と見做し  $ml = z$  と置けば

$$\frac{1 + \cos z \cosh z}{\cosh z \sin z - \sinh z \cos z} = c z \dots\dots\dots (55)$$

此の式より  $z$  を求むるには

$$\begin{aligned}
y_1 & = \frac{1 + \cos z \cosh z}{\cosh z \sin z - \sinh z \cos z} \\
& = \frac{\cos z + \operatorname{sech} z}{\sin z - \cos z \tanh z} \dots\dots\dots (56)
\end{aligned}$$

なる曲線及び

$$y_2 = c z \dots\dots\dots (57)$$

なる直線を書きその交點として圖上より求められる。

今  $z$  の値が小ならざる限り近似値として

$\tanh z = 1$  及び  $\operatorname{sech} z = 0$  と看做し得るから

$$\begin{aligned}
y_1 & = \frac{\cos z}{\sin z - \cos z} \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos z}{\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)} \dots\dots\dots (58)
\end{aligned}$$

此の式は  $z$  に任意の數値を入れて  $y_1$  を求め圖示すれば第六圖の如き餘切曲線に似たる曲線となる。同一圖上に又  $c = 1$  と看做して  $y_2 = c z$  の直線を書き其の交點を求めると其の一つの値として  $z = 1.238$  が得られる。<sup>1) 2)</sup>

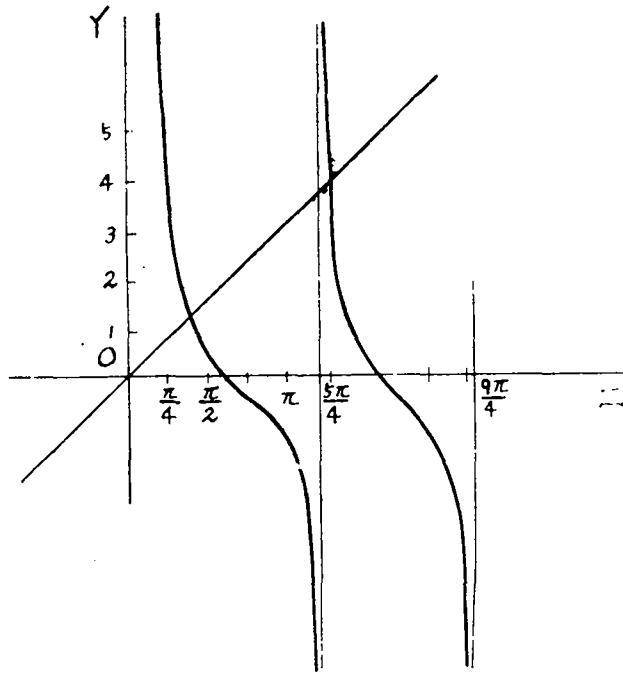
以上の理論より  $z$  即ち  $ml$  が定まり (32) の式により振動數  $p$  も定まる。而して振動の振幅を表はす項は (33) 式に於て  $u$  の項であること明である。

1) Prescott: Applied elasticity. 1924.p.217--219

2) 物部長雄: 載荷セル構造物ノ振動並ニ其ノ耐震性ニツイテ. 土木學會誌第六卷, 第四號. (大正九年)

$$a u c = \frac{\hat{\zeta} k^2 m^4 + \zeta}{2 \rho} t$$

第六圖



であるのは明である。

今第七圖に於て振動の週期を  $T$  で表はすと

$$\text{振幅 } ab = a u c = \frac{\hat{\zeta} k^2 m^4 + \zeta}{2 \rho} (t+0)$$

$$\text{振幅 } cd = a u c = \frac{\hat{\zeta} k^2 m^4 + \zeta}{2 \rho} (t+T)$$

茲に  $\log \frac{cd}{ab} = \lambda$  として表はすと

$$\begin{aligned} \lambda &= \log \frac{a u c \frac{\hat{\zeta} k^2 m^4 + \zeta}{2 \rho} (t+T)}{a u c \frac{\hat{\zeta} k^2 m^4 + \zeta}{2 \rho} t} \\ &= - \frac{\hat{\zeta} k^2 m^4 + \zeta}{2 \rho} T \end{aligned}$$

空氣の抵抗係數たる  $\zeta$  を省略するとすると内部粘性係數は次の式で與へられる。

即ち

$$\hat{\zeta} = \lambda \frac{-2\rho}{k^2 m^4} \frac{1}{T} \dots\dots\dots (59)$$

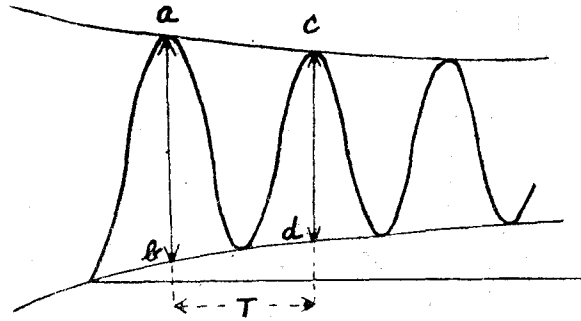
一般に  $cd$  として第  $n$  番目の振幅を取れば



(16)

$$\xi = \lambda \frac{-2\rho}{k^2 m^4 n} \frac{1}{T} \dots\dots\dots (60)$$

第七圖



### III. 計算の方法

振動実験により内部粘性係数を求むる理論公式

$$\xi = \lambda \frac{-2\rho}{k^2 m^4 n T}$$

に對し各因子に實際の數値を置換するに當り計算上の便宜の爲め各因子を再檢對して置くことが必要である。以下之につき聊か説述を試みやう。

W, 供試材片の重量

l, 供試材片の長さ

b, 及び h, 供試材片横斷面の幅及び厚さ

I, 慣性能率

k, 斷面の廻轉慣性半徑

とすれば

$$\rho = \frac{W}{b h l}$$

$$k^2 = \frac{I}{W} = \frac{b h^3}{12 W}$$

m は棒の兩端の狀態と長さにより實驗的に定められる常數で前に説明したるところに

よれば  $ml = 1.238$

$\lambda$  は振動の對數的減數で振動寫眞上の振幅を  $A_1, A_2, A_3, \dots$  とすれば

$$\lambda = \log \frac{A_{n+1}}{A_1}$$

であるが單に任意の相隣れる二つの振幅を基礎とせず比較的多くの振幅を連續的に採用すると

せば次の如き方法で求められる。

$$\text{即ち } \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \frac{A_4}{A_3} = \dots = \frac{A_{n+1}}{A_n} = \alpha \text{ なるをせば}$$

$$A_2 = \alpha A_1$$

$$A_3 = \alpha A_2 = \alpha^2 A_1$$

$$A_4 = \alpha A_3 = \alpha^3 A_1$$

.....

$$A_n = \alpha^{n-1} A_1$$

$$A_{n+1} = \alpha^n A_1$$

$$\text{故に } \lambda = \log \frac{A_{n+1}}{A_1} = \log \frac{\alpha^n A_1}{A_1} = \log \alpha^n = n \log \alpha$$

更に計算の實際に於ては振幅が  $A_1$  から  $A_{n+1}$  に進むまでに生ずる實驗状態の種々なる不均一性を平均する必要がある爲めに

$$\lambda = n \log \alpha = n \log \frac{\alpha A_1 (1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^p)}{A_1 (1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha^p)}$$

$$= n \log \frac{A_2 + A_3 + \dots + A_{p+1}}{A_1 + A_2 + \dots + A_p}$$

依つて内部粘性係数  $\xi$  の計算には

$$\xi = \lambda \frac{2\rho}{k^2 m^4 n T}$$

$$= n \log \frac{A_2 + A_3 + \dots + A_{p+1}}{A_1 + A_2 + \dots + A_p} \frac{2 \frac{W}{b h l}}{\frac{b h^3}{12} \frac{1}{W} \left( \frac{1.238}{1} \right)^4 n T}$$

$$= \log \frac{A_2 + A_3 + \dots + A_{p+1}}{A_1 + A_2 + \dots + A_p} \frac{24 W^2 l^3}{(1.238)^4 b^2 h^4 T}$$

更に計算の便宜上對數をとると

$$\log \xi = \log [\log(A_2 + A_3 + \dots + A_{p+1}) - \log(A_1 + A_2 + \dots + A_p)] \\ + \log \frac{24}{(1.238)^4} + 2 \log W + 3 \log l - 2 \log b - 4 \log h - \log T$$

此の式に依つて  $\xi$  を計算したるもフィルム上の振動數の關係より  $p=20$  とした。

#### IV. 實驗の方法並に成績

##### (1) 實驗装置

本振動實驗に對する装置は著者等の工業によつたものでその各部分を説明するに、第八圖の如く供試材 Ps を鐵製の固定装置 Fx にて固定しその自由端に鏡 Sp 及び小鐵板 Em を附しこれをガラス鐘外の電磁石 Mg にて引き供試材に振動を與へその振動の減衰する模様を光學

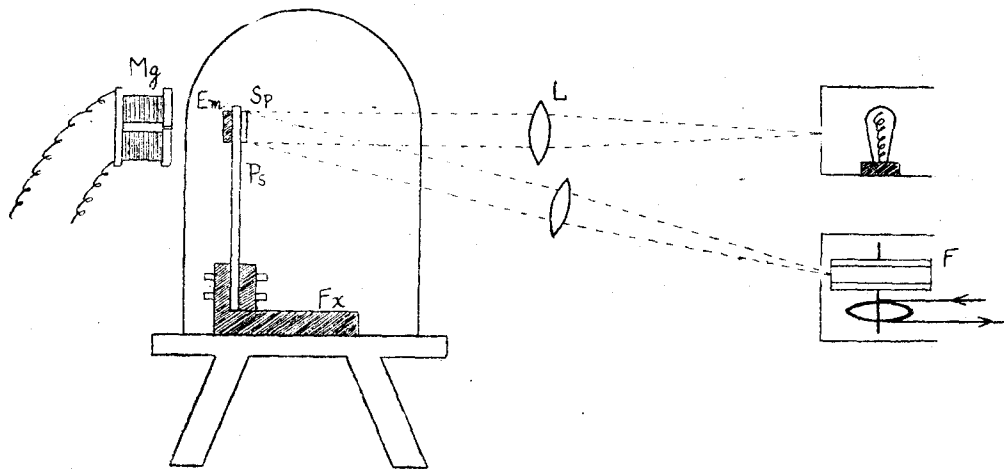
( 18 )

的にフィルム上に撮影した。

空気の抵抗を省略する爲に振動實驗に先立ちガラス鐘中の空気を排除した。而して振動實驗を実施した時の真空壓は大約 60cm 程度であつたが此の程度に於ては空気の抵抗係數は殆ど省略し得られるものと考へた。

電磁石には 20Volt の電流を用ゐ、記録装置には横河電機會社製 N3 型オンログラフを撮影用フィルムには富士フィルム 35mm を使用した。

第 八 圖



Ps 供試材片	Fx 固定装置
Mg 電磁石	L レンズ
Em 鐵片	F フィルム卷脚
Sp 鏡	

## (2) 供試材片の種類及び處理

供試材片としては長さ 15cm 幅 2cm 厚さ 0.1cm なる規格を標準とし良く鉋削したエゾマツ材外下記の十一種の材片を使用した。就中エゾマツ材片に對しては板目及び柁目を區別し、更に柁目の櫓材をも採用し又ブナ材に對しては柁目及び板目の二種を區別した。各樹種は北海道帝國大學天鹽演習林、苫小牧演習林及び北海道廳瀨棚國有林所産のもので、強弱試驗の目的を以て蒐集した材料の一部より木取りたる外觀上完全無瑕のものである。供試樹種を掲記すれば次の如し。

供試樹種和名	同 學 名
オ ン コ	<i>Taxus cuspidata</i> Sieb. et Zucc.
ト ド マ ツ	<i>Abies sachalinensis</i> Fr. Schm.

供試樹種和名	同 學 名
エゾマツ	<i>Picea jezoensis</i> Carr.
アカエゾマツ	<i>Picea glehni</i> Mast.
カラマツ	<i>Larix Kaempferi</i> Sarg.
シラカンバ	<i>Betula japonica</i> Sieb.
ブナノキ	<i>Fagus crenata</i> Bl.
ミヅナラ	<i>Quercus crispula</i> Bl.
ホホノキ	<i>Magnolia obovata</i> Thunb.
シナノキ	<i>Tilia japonica</i> Simk.
センノキ	<i>Kalopanax septemlobus</i> Koidz.
ヤチダモ	<i>Fraxinus mandschurica</i> Rupr. var. <i>japonica</i> Maxim.

### (3) 実験操作

本研究に於て結果として期待すべき内部粘性係数は供試材片の含有水分との關係に於て求め得べきものである。従つて木材含有水分の内部粘性に及ぼす影響は輕視するを得ぬものである。

真空中に於ては木材が乾燥し木材含有水分が變化する爲に、豫定の水分百分率にて實驗を行ふには先づ本研究に供したる真空装置としてのガラス鐘内に置かれた木材につき、排氣繼續時間と含有水分との關係並にガラス鐘内排氣の速度とを豫め知つて置く必要がある。

排氣繼續時間と木材平衡含有水分との關係並に排氣速度については排氣装置の規模、構造、排氣ポンプの性能並に供試材片の種類、大きさを規定した時初めて確定し得るのであるが、本研究に於ては振動實驗の豫備として供試材片含水率を豫定するの必要上實施したものに過ぎぬ。即ち前記のガラス鐘内の空気をロータリー真空ポンプによつて排氣し、之が供材片として一旦水中にて飽水せしめたエゾマツ材片を振動實驗と同じ取扱によつて排氣盤上に載せて、排氣繼續時間の各異變化に對し含有水分を測定し、此の關係を第九圖の如く圖示した。又排氣開始より最低壓の真空になる迄の時間即ち排氣速度は第十圖の如し。

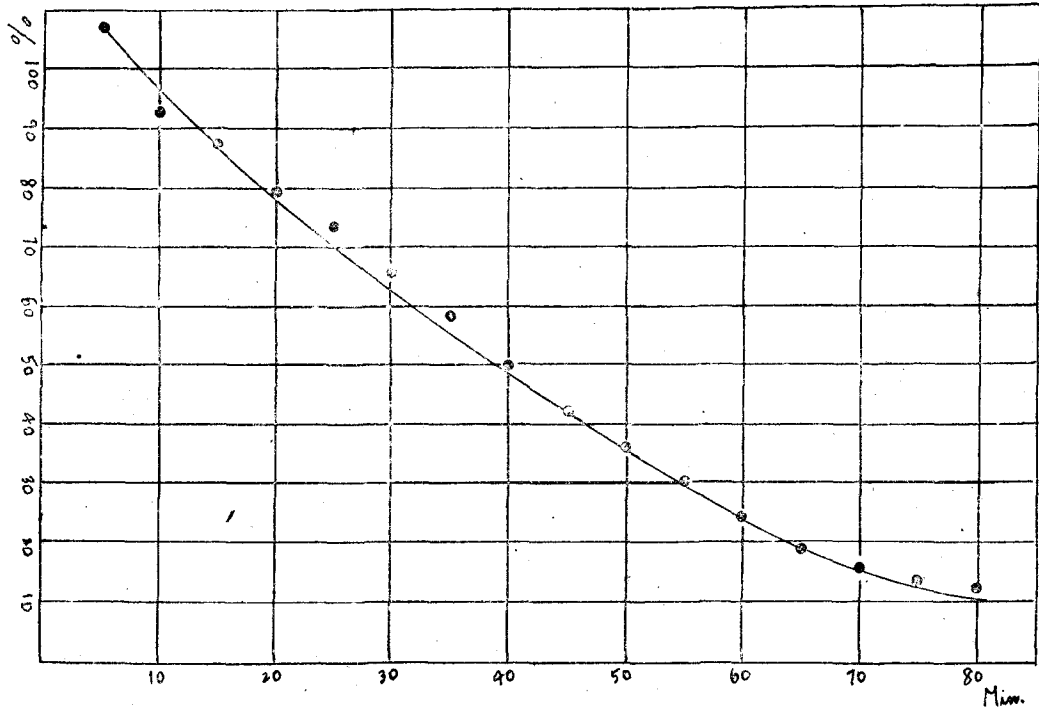
而して減壓空氣中の木材の含水率も環境空氣の濕度に關係するから真空状態が固定しないと眞の平衡含水率が定まらない。真空ポンプ使用に際し簡単な装置では一定減壓状態を保持し難いことを經驗するので、幾多の豫備實驗により深甚の注意を拂つて振動實驗直前の供試材片豫定含水率に達せしむべく真空操作を實施したけれども、振動實驗後測定した供試材片の含水率に多少の違算があつた。

而して木材の含水率と粘性係數との關係を究明するために實驗に採用した樹種はエゾマツに限り、其の他の樹種については此の問題を省略し、専ら樹種間に於ける粘性係數の相異を究

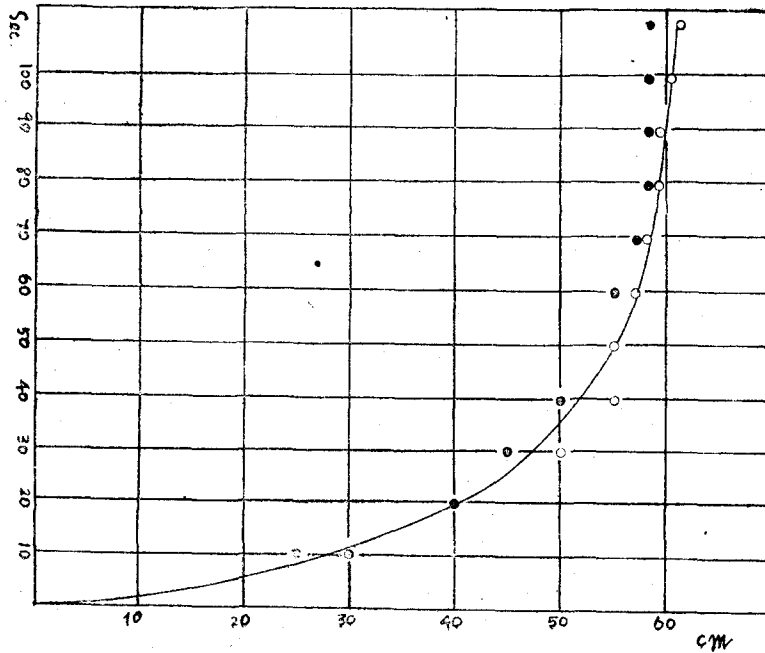
(20)

明するに努むる爲め絶対乾燥に近き含水率の下で振動実験を行つた。

第九圖 ガラス鐘内に於けるエゾマツ供試材片乾燥曲線



第十圖 真空ポンプによるガラス鐘内排気速度



第一表

エゾマツ板目材			エゾマツ柱目材			エゾマツ柱目檜材		
供試材片の記号	含水率(%)	粘性係数(10 <sup>-8</sup> )	供試材片の記号	含水率(%)	粘性係数(10 <sup>-8</sup> )	供試材片の記号	含水率(%)	粘性係数(10 <sup>-8</sup> )
Py1T-1	86.5	0.59	Py1R-1	65.4	0.50	Py1Rr-1	53.8	0.37
2	73.1	0.52	2	53.8	0.29	2	56.6	0.48
3	18.0	0.24	3	39.2	—	3	31.0	—
4	7.7	0.26	4	26.9	0.56	4	24.8	0.33
5	2.7	0.12	5	2.3	0.26	5	1.4	0.18
Py2T-1	94.4	—	Py2R-1	66.2	—	Py2Rr-1	64.6	0.47
2	89.7	0.39	2	64.9	0.65	2	62.6	0.44
3	55.6	—	3	39.2	0.44	3	30.9	0.38
4	16.7	0.22	4	18.6	0.50	4	18.7	0.31
5	4.0	0.30	5	1.4	0.14	5	1.4	0.21
Py3T-1	69.5	0.56	Py3R-1	81.0	0.43	Py3Rr-1	68.5	0.60
2	66.5	0.59	2	74.5	0.73	2	53.7	0.44
3	44.3	0.52	3	48.3	0.56	3	35.6	0.46
4	15.6	0.42	4	15.9	0.38	4	15.4	0.31
5	2.9	0.20	5	2.1	0.18	5	1.3	0.21
Py4T-1	90.7	0.76	Py4R-1	81.4	0.60	Py4Rr-1	74.5	—
2	70.8	0.66	2	47.4	0.34	2	28.5	0.34
3	36.7	0.36	3	28.8	0.32	3	25.5	0.34
4	17.4	—	4	16.7	0.34	4	16.8	0.25
5	2.1	0.19	5	1.9	0.17	5	2.2	0.18
Py5T-1	73.3	1.00	Py5R-1	86.3	0.87	Py5Rr-1	73.1	0.54
2	57.4	0.54	2	67.1	0.30	2	53.3	0.45
3	29.1	0.53	3	33.6	0.27	3	30.7	—
4	14.5	0.51	4	16.4	0.22	4	16.4	0.34
5	1.7	0.20	5	0.7	0.18	5	0.7	0.16

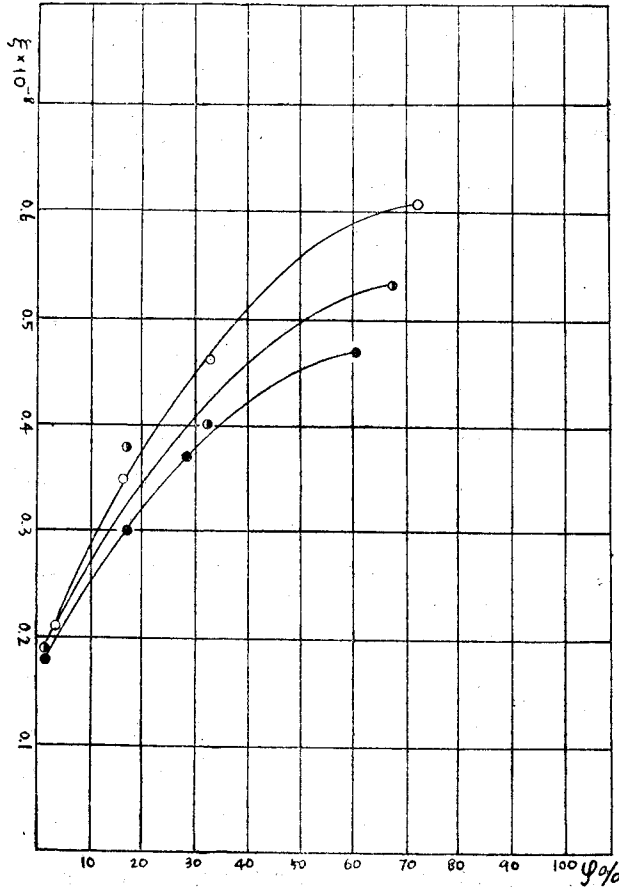
備考：同一供試材片の各異含水率に於ける振動実験成績中振動波の映像不良にて減衰率測定困難のものありたる爲め之に對する粘性係数の計算を省略した。

含水率の 階級	板目材			桁目材			桁目襜材		
	含水率 平均値 (%)	粘性係数 平均値 ( $10^{-8}$ )	個數	含水率 平均値 (%)	粘性係数 平均値 ( $10^{-8}$ )	個數	含水率 平均値 (%)	粘性係数 平均値 ( $10^{-8}$ )	個數
10%以下	3.5	0.21	6	1.7	0.19	5	1.4	0.18	5
11—20%	16.2	0.35	4	16.9	0.36	4	16.8	0.30	4
21—40%	32.9	0.46	2	32.6	0.40	4	29.0	0.37	5
41%以上	72.2	0.61	10	67.0	0.53	10	60.8	0.47	8

## (4) 實驗結果

供試材片の振動實驗に於て撮影した振動波の映像を基として、振動の減衰率を求め之と供

第十一圖 含水率と粘性係数との關係圖 (エゾマツ)



備考 ○板目供試材片  
 ○桁目供試材片  
 ●陽疾を含む桁目供試材片

試材片につき測定した長さ、幅及び厚さ並に重量の諸數値とを粘性係数算定公式の各因子に入れて計算したる結果次の如し。

a) 含水率の變化並に木取の種類により影響を蒙る粘性係数

エゾマツ板目木取及び桁目木取の供試材片と襜材桁目木取のものにつきて各異含水率の下で振動實驗をなし之が粘性係数を算出し第一表に掲げ、更に之を數個の含水率の階梯に分類集計し第二表に掲記した。

尙之を圖示すれば第十一圖の如く同一樹種に於ても供試材の種類異なる毎に粘性係数が含水率と比例的關係にあることを認め得られ、板目木

取のものが柁目木取のものより大なる數値を與へる。實際に於て材が曲げられる時柁目は外力に對して折損し難く粘り氣に富み又水分少き材は割合脆弱であることを日常目撃し、之は從來木材に對し定義づけられた所謂ヤンカ靱性係數の大小によつて説明されたものであるが、粘性係數で示し得る可塑性の影響と看做して差支ないものと思ふ。

b) 樹種別による粘性係數

各樹種別粘性係數を求むる爲めに採用した供試材片としては、柁目木取の夫々五個宛を使用し、含水率はすべて 1—2% のものである。従つて含水率の影響を度外視して、各樹種につき五回の振動實驗によつて撮影せる振動波の減衰率を測定の上算出した粘性係數の最大最小及び平均値は第三表の如し。

第 三 表

樹 種	粘性係數 ( $10^{-8}$ )	最 大 値	平 均 値	最 小 値
オ    ン    コ		0.32	0.24	0.20
ト    ド    マ    ツ		0.17	0.16	0.11
エ    ズ    マ    ツ		0.26	0.19	0.14
ア    カ    エ    ズ    マ    ツ		0.23	0.19	0.16
カ    ラ    マ    ツ		0.12	0.11	0.09
シ    ラ    カ    ン    バ		0.32	0.27	0.23
ブ    ナ    ノ    キ		0.62	0.50	0.41
ミ    ズ    ナ    ラ		0.56	0.54	0.51
ホ    ホ    ノ    キ		0.21	0.18	0.15
シ    ナ    ノ    キ		0.38	0.32	0.24
セ    ン    ノ    キ		0.23	0.22	0.19
ヤ    チ    ダ    モ		0.57	0.41	0.33

即ち針葉樹材中エゾマツ及びアカエゾマツ材は何れも粘性係數  $0.19 \times 10^{-8}$  の同値を示しトドマツより稍大、カラマツ材は  $0.11 \times 10^{-8}$  最少を示し、濶葉樹材中ミヅナラの粘性係數  $0.54 \times 10^{-8}$  にて最大、之に次ぎブナノキ、ヤチダモ、シナノキ、シラカンバ、センノキ及びホノキの順に粘性係數を減ずるを見る。而して一般に針濶葉樹材共に重いものが軽いものに比し粘性係數大なる事實については、木材に與へられた運動エネルギーが木材質量に富む重い材に於て分子間の摩擦として失はれる量の多きことに想到せば首肯し得られる。



## V. 摘 要

本研究は木材の可塑性を究明する爲め可塑性理論並に粘性係數算出公式の誘導方法を検討し、更に著者等の工案に依る振動實驗裝置を使用し、北海道産主要木材十二種に對し内部粘性係數の算出を試みた。而して木材の可塑性を示す數値として採用した内部粘性係數は、金屬材料と同様振動實驗により振動波の減衰率を測定することにより計算的に求められ、而も多數の供試材片の周到なる取扱により各樹種別並に含水率に定めることが出來た。唯遺憾なるは實驗中に撮影した振動波の映像に不完全のものありし爲め、内部粘性係數と密接な關係にあるべき彈性係數の算出を省略せざるを得ざりしことである。次回の實驗により之が補遺をなす心算である。