



Title	センサアレイを用いる最大尤度方位推定法
Author(s)	鈴木, 正清; 永井, 信夫
Citation	電子科学研究, 5, 14-22
Issue Date	1998-01
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/24403
Type	bulletin (article)
File Information	5_P14-22.pdf



[Instructions for use](#)

センサアレイを用いる最大尤度方位推定法

信号処理研究分野 鈴木 正清, 永井 信夫

最大尤度方位推定の評価関数に不連続点があることに起因し、解の振動が見られる。等間隔直線アレイについて、評価関数を連続化する手法を提案し、これによって解の振動が回避できることを示した。連続化された評価関数上での準最適解を与える効率的な算法を提案した。連続化された評価関数上で最適解を与える効率的な繰返し算法を提案した。また、この繰返し算法の初期化には AP 法の初期化法が有効であることを示した。等間隔直線アレイの規則性を利用した AP 法の高速度化法を示した。

1 はじめに

センサ・アレイを用いる複数の信号源の定位は、レーダー、ソナー、地震学および電波天文学等の分野における古くからの重要な問題である。この問題の基礎は、センサから十分遠方にある狭帯域信号源の方位推定である。これまでに、高分解能手法あるいは超分解能手法と呼ばれる極めて高い分解能を有する方位推定手法が提案されており [1]-[9], MUSIC[8, 9], 最大尤度法 (Maximum Likelihood method, ML 法) [1]-[5] はその代表である。

方位推定法において望ましい性質は、1) しきい値領域 (SNR が低い、入手データサンプル (スナップショット) が少数であるなどの推定条件が良くない状況下) においても高い推定精度が得られること、2) マルチパス等で生じるコヒーレント信号を取り扱うことができること、3) スナップショット数がセンサ数よりも少ない場合、たとえば単一スナップショットでも方位が推定できること、4) 計算コストが低いことがあげられる。

最大尤度方位推定法は、上記の性質の 1) ~ 3) に関して、他の超分解能手法よりも優れてる。しかしながら、多変数の非線形最適化問題を含んでいるために一般に膨大な計算量を必要とする。また、最大尤度方位推定法の評価関数は一般に多峰性であるため、解の探索において局所解を回避する必要がある。

本文では、最大尤度方位推定の評価関数に不連続点があることに起因して、探索による解法では解の振動が見られることを示す。等間隔直線アレイ

について、評価関数を連続化する手法を提案し、これによって解の振動が回避できることを示す。連続化された評価関数上での準最適解を与える効率的な算法を提案する。連続化された評価関数上で最適解を与える効率的な繰返し算法を提案する。また、この繰返し算法の初期値決定のためには AP 法 (Alternating Projection)[2] の初期化法が有効であることを示す。等間隔直線アレイの規則性を利用した AP 法の高速度化法を示す。

2 最大尤度方位推定

本章では、センサ・アレイによる観測信号をモデル化し、最大尤度方位推定の評価関数を示す。

2.1 信号のモデル

同一中心周波数 ω_0 の狭帯域信号を放射する複数の信号源があり、 M 個のセンサから成るセンサ・アレイにより K 個の到来信号を受信するものとする。各センサには付加雑音が重畳されるものとする。観測信号ベクトルの複素表現 (解析信号) は次式で表される。

$$\mathbf{x}_t = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) s_{k,t} + \mathbf{n}_t \quad (1)$$

ここに、

θ_k : 到来信号の方位パラメータ

$\mathbf{a}(\theta)$: センサ・アレイの方向ベクトル

$s_{k,t}$: 参照点における入射信号

\mathbf{n}_t : 付加雑音ベクトル

を表す。添字 t , k はそれぞれ時刻および到来信号の番号を表す。付加雑音 \mathbf{n}_t は、平均 0, 分散 $\sigma^2 \mathbf{I}$ の複素数値白色ガウス過程とする。方位推定の一意性を保証するために、互いに異なる θ_k , $k = 1, 2, \dots, K$, に対して, $\mathbf{a}(\theta_k)$, $k = 1, 2, \dots, K$ は互いに独立とする。

2.2 最大尤度法の評価関数

ガウス性の付加雑音を仮定しているため、尤度関数は解析的に導かれ、定数項を除いて次式で表される [2]。

$$\begin{aligned} L(\Theta) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\mathbf{P}_{A(\Theta)} \mathbf{x}_t\|^2 \\ &= \text{tr}[\mathbf{P}_{A(\Theta)} \mathbf{R}] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{A}(\Theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_K)] \quad (3)$$

$$\Theta = \{\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_K\} \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{A} \{\mathbf{A}^H \mathbf{A}\}^{-1} \mathbf{A}^H \quad (5)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^H \quad (6)$$

ここに、肩文字 H は、行列の共役転置を表す。

3 交互射影法

式 (5) の射影行列は、次のように直和分解できる。

$$\mathbf{P}_{A(\Theta)} = \mathbf{P}_{A(\Theta_k)} + \mathbf{b}(\theta_k) \mathbf{b}^H(\theta_k) \quad (7)$$

$$\Theta_k = \{\theta_1 \ \dots \ \theta_{k-1} \ \theta_{k+1} \ \dots \ \theta_K\} \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{a}}(\theta_k) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{A(\Theta_k)}) \mathbf{a}(\theta_k) \quad (9)$$

$$\mathbf{b}(\theta_k) = \hat{\mathbf{a}}(\theta_k) / \|\hat{\mathbf{a}}(\theta_k)\| \quad (10)$$

θ_k 以外を固定して、 θ_k に関して $L(\Theta)$ を最大化することを考える。このとき、 $L(\Theta)$ の最大化には、 $\mathbf{b}(\theta_k)$ のみが関与し、

$$l(\theta_k) = \mathbf{b}^H(\theta_k) \mathbf{R} \mathbf{b}(\theta_k) \quad (11)$$

を最大化することに等価である。このとき $\mathbf{P}_{A(\Theta_k)}$ は、一度だけを計算しておけば、式 (9), (10) によって $\mathbf{b}(\theta_k)$ が求められるので、式 (2) を直接計算するのに比べ、計算量が大幅に減少する。

交互射影法 (Alternating Projection Algorithm, AP 法) [2] は、 K 個の未知パラメータのうち $K-1$ 個を固定し、残りのパラメータに関する最大化を

式 (11) に従う次元探索によって行い、探索パラメータを順番に替えて探索し、すべてのパラメータが収束した時点で探索を終了するものである。このアルゴリズムの初期化は、始めに 1 個の信号を仮定し θ_1 を求め、求められたパラメータを固定し、次に信号数を 1 増加させて、次のパラメータを求めるという操作を、信号数が K になるまで繰返して行う。

計算上、 $\theta_k \simeq \theta_l$ において、式 (5) 中の逆行列の計算が数値的に不安定になるため、 $\theta_k \simeq \theta_l$ を除くように次元探索を行う。 θ_k の探索時における $\theta_k \simeq \theta_l$ の判定は、適当な正定数 ϵ を用い $\|\hat{\mathbf{a}}(\theta_k)\| < \epsilon$ によって行うことができる。

3.1 AP 法の収束性

理想的な場合として逆行列の計算が安定に行われるものとして、 $\theta_k = \theta_l$ ($k \neq l$) の時の評価関数について考える。この時、式 (5) における逆行列は存在しないが、 $\mathbf{A}(\Theta)$ の列ベクトルの張る空間 $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}_{\theta_k=\theta_l}$ は $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta_k)\}$ に一致するので、射影行列は $\mathbf{P}_{A(\Theta)} = \mathbf{P}_{A(\Theta_k)}$ となり、評価関数 $L(\Theta)|_{\theta_k=\theta_l}$ が求められる。

一方、 $\theta_k \rightarrow \theta_l$ ($k \neq l$) の極限を考えると、

$$\mathbf{a}'(\theta_l) = \lim_{\theta_k \rightarrow \theta_l} \frac{\mathbf{a}(\theta_k) - \mathbf{a}(\theta_l)}{\theta_k - \theta_l} \quad (12)$$

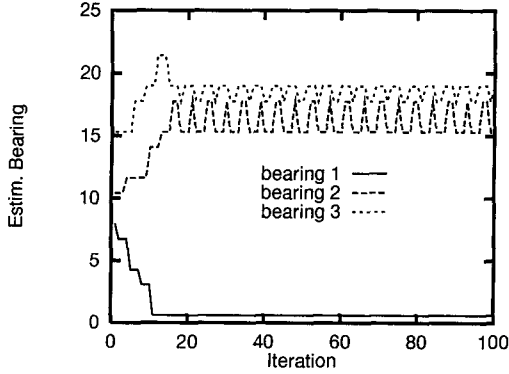
は、 $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}_{\theta_k \rightarrow \theta_l}$ に属する。一般に式 (12) の極限 $\mathbf{a}'(\theta_l)$ は、 $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}_{\theta_k=\theta_l}$ には属さないため、 $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}_{\theta_k=\theta_l} \subset \text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}_{\theta_k \rightarrow \theta_l}$ となり、 $L(\Theta)|_{\theta_k=\theta_l} < L(\Theta)|_{\theta_k \rightarrow \theta_l}$ が成り立つ。すなわち、 $\theta_k = \theta_l$ は評価関数の $L(\Theta)$ の不連続点であり、 $L(\Theta)|_{\theta_k=\theta_l}$ の値は、その近傍の値より小さい値を示す。

このような解空間の構造上、極限操作なしでは $\theta_k = \theta_l$ は決して解となり得ない。

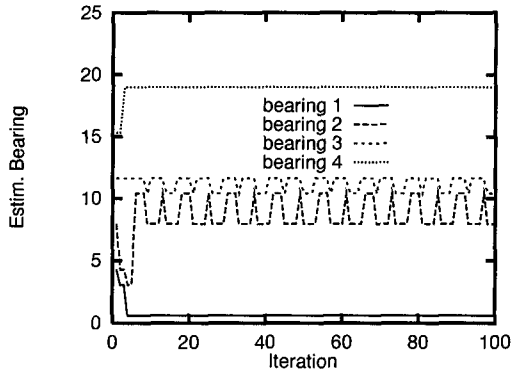
$\theta_k = \theta_l$ における評価関数の不連続性と $\theta_k \simeq \theta_l$ における数値的不安定性のために AP 法の解が振動して、収束値が得られないことがある (図 1)。

図 1 (a) では、入射信号は互いに独立であるとし、方位が分解できない程 SNR が低い例である。図 1 (b) では、入射信号はコヒーレントであり、推定方位数が、真の信号数よりも多い場合である。図 1 (b) の設定において推定方位数を 3 とすれば、方位の推定値は -0.612245° , 7.95918° , 18.9796°

となり、信号数さえ既知であれば十分な推定精度が得られる条件である。図 1 (b) の条件は、入射信号数が未知であり、これを推定するために、考えられ得る信号数を指定して、方位を推定しなければならない場合を想定している。



(a) SNR -5 dB, 推定方位数 3.



(b) SNR 30 dB, 推定方位数 4.

図 1 AP 法による収束特性。(等間隔直線アレイ, センサ間隔: 半波長, センサ数: 5, 信号数: 3, 入射方位 $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \epsilon = 10^{-2}$)

4 評価関数の連続化

AP 法における解の振動の直接の原因は、数値的不安定性のために $\theta_k \simeq \theta_l$ ($k \neq l$) を除くように一次元探索を行っていることにある。また理想的な場合でさえ方位が分解できない状況下で $\theta_k = \theta_l$ なる解が得られない。この原因は評価関数の不連続性にある。

一般に方位が分解できるかどうか不明な状況下では、結果的に方位が分解できないならば、そのことが明らかになることが望ましい。このため

には、最大尤度方位推定の評価関数を連続化し、同時に射影行列の数値的不安定性を解消する必要がある。

本章では、等間隔直線アレイの場合について、最大尤度方位推定の評価関数を連続化し、同時に射影行列の数値的不安定性を解消する手法を示す。

等間隔直線アレイの方向ベクトルは、

$$\mathbf{a}(\theta) = [1 \ e^{-j\theta} \ \dots \ e^{-j(M-1)\theta}]^T \quad (13)$$

で与えられる。 θ は、隣り合うセンサ間の位相差であり、入射方位から定まる。

次の多項式を定義する。

$$\begin{aligned} W(z) &= \prod_{k=1}^K (1 - e^{-j\theta_k} z) \\ &= 1 + w_1 z + \dots + w_K z^K \end{aligned} \quad (14)$$

$W(z)$ の係数ベクトル

$$\mathbf{w} = [1 \ w_1 \ \dots \ w_K]^T \quad (15)$$

を用い

$$\mathbf{w}_p = \underbrace{[0 \ \dots \ 0 \ w^T \ 0 \ \dots \ 0]^T}_{\substack{p-1 \\ M}} \quad (16)$$

$(p = 1, 2, \dots, M - K)$

を定義すれば、 $\{\mathbf{w}_p\}_{p=1}^{M-K}$ は次の性質を有する。

- (i) $\{\mathbf{w}_p\}_{p=1}^{M-K}$ は $\{\mathbf{a}(\theta_k)\}_{k=1}^K$ に直交する。
- (ii) $\{\mathbf{w}_p\}_{p=1}^{M-K}$ は線形独立である。

従って、 $\{\mathbf{w}_p\}_{p=1}^{M-K}$ の張る空間は、 $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}$ の直交補空間となり、射影行列 $\mathbf{P}_{\mathbf{A}(\Theta)}$ は、 $W(z)$ の係数を用いて次式で表される。

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}(\Theta)} = \mathbf{P}_W^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_W \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_W = \mathbf{W}\{\mathbf{W}^H \mathbf{W}\}^{-1} \mathbf{W}^H \quad (18)$$

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{M-K}] \quad (19)$$

式(18)における逆行列は、 $\mathbf{W}^H \mathbf{W}$ が Toeplitz 行列になることより、Trench アルゴリズム [10] によって効率的に算出できる。

AP 法の一次元探索で用いる式(11)の評価関数 $l(\theta_k)$ は、式(7), (18) より次式で定まる。

$$l(\theta_k) = \text{tr}[\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{R}] - \text{tr}[\mathbf{P}_{\mathbf{A}(\theta_k)} \mathbf{R}] \quad (20)$$

θ_k による探索の間, 第 2 項目は一定であるので探索のはじめに一度だけ計算しておけば良い.

ここで, $\theta_k = \theta_l$ の場合を考える. この時 $z = e^{j\theta_l}$ は, $W(z)$ の 2 位の零点となるため,

$$\{\mathbf{a}'(\theta_l)\}^H \mathbf{w}_p = j e^{jp\theta_l} W'(e^{j\theta_l}) = 0 \quad (21)$$

が容易に導出される. 従って, 式(16)で定義した \mathbf{w}_p , $p = 1, 2, \dots, M - K$ は, $\theta_k = \theta_l$ の場合に $\mathbf{a}'(\theta_l)$ に直交する. すなわち, $\text{span}\{\mathbf{W}\}$ は, $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}_{|\theta_k=\theta_l}$ の直交補空間ではなく, $\text{span}\{\mathbf{A}(\Theta)\}_{|\theta_k \neq \theta_l}$ の直交補空間となる.

これより, 式(17)に従えば, 最大尤度方位推定の評価関数が連続化される. またこの時, $\mathbf{W}^H \mathbf{W}$ は常に正則であるため数値的な不安定性も同時に解消される. AP法の次元探索の評価関数 $l(\theta_k)$ として, 式(11)の代わりに式(20)を用いれば, $\theta_k = \theta_l$ の場合もアルゴリズムに破綻はきたさない. また, 計算の効率を考えれば $\theta_k \approx \theta_l$ の場合だけ式(20)を用い, それ以外は式(11)を用いるのが良い.

以上では, 固定パラメータ Θ_k のなかに同一値を持つものがないものとした. Θ_k のなかに同一値を持つものがある場合には, $\mathbf{P}_{A(\Theta_k)}$ にランク落ちが生じ, 評価関数が不連続になるので, これについても考慮する必要がある. 上述と同様の考えに基づけば, $\mathbf{P}_{A(\Theta_k)}$ の代わりに以下で定められる $\mathbf{I} - \mathbf{P}_{V_k}$ を用いることにより, 問題は解決される.

$$\begin{aligned} V_k(z) &= \prod_{i=1, i \neq k}^K (1 - e^{-j\theta_i} z) \\ &= 1 + v_1 z + \dots + v_{K-1} z^{K-1} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{v} = [1 \ v_1 \ \dots \ v_{K-1}]^T \quad (23)$$

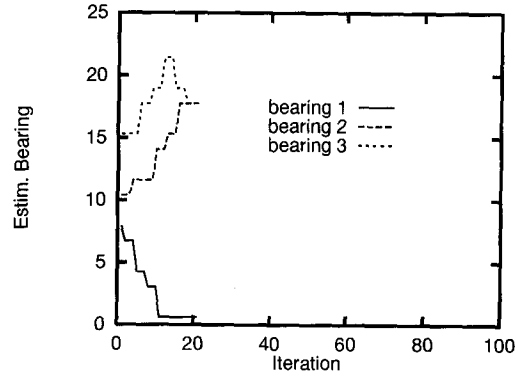
$$\mathbf{v}_p = \underbrace{[0 \ \dots \ 0 \ \mathbf{v}^T \ 0 \ \dots \ 0]^T}_{\substack{p-1 \\ M}} \quad (24)$$

$(p = 1, 2, \dots, M - K + 1)$

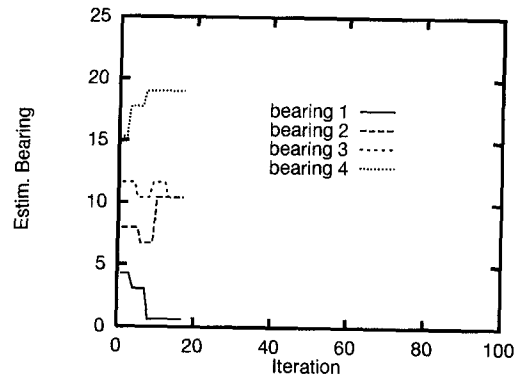
$$\mathbf{V}_k = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_{M-K+1}] \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_{V_k} = \mathbf{V}_k \{\mathbf{V}_k^H \mathbf{V}_k\}^{-1} \mathbf{V}_k^H \quad (26)$$

図 1 (a), (b) と同一の設定の下で, 提案する評価関数の連続化を適用した時の解の収束の様子をそれぞれ図 2 (a), (b) に示す. 指定された個数の方位が分解できない場合にも, 解が振動することなく収束しているのが分かる.



(a) SNR -5 dB, 推定方位数 3.



(b) SNR 30 dB, 推定方位数 4.

図 2 評価関数の連続化による収束特性. (等間隔直線アレイ, センサ間隔: 半波長, センサ数: 5, 信号数: 3, 入射方位 $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$, $\epsilon = 10^{-2}$)

5 効率的な準最適化法

式(14)の多項式係数による射影行列の表現, 式(17), 式(18)を用いれば, 連続化された評価関数は次式で表される.

$$L(\Theta) = \text{tr}\{\mathbf{R}\} - J(\mathbf{w}) \quad (27)$$

$$J(\mathbf{w}) = \text{tr}[\mathbf{P}_W \mathbf{R}] = \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{w}) \mathbf{w} \quad (28)$$

ここに,

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{w}) = \sum_{p,q=0}^{M-K-1} f_{q,p}(\mathbf{w}) \mathbf{R}_{p,q}$$

$f_{q,p}(\mathbf{w})$: $(\mathbf{W}^H \mathbf{W})^{-1}$ の (q, p) 要素

$\mathbf{R}_{p,q}$: $r_{p+i, q+j}$ を (i, j) 要素に持つ $K \times K$ 行列

$r_{i,j}$: \mathbf{R} の (i, j) 要素

$L(\Theta)$ の最大化は $J(\mathbf{w})$ の最小化に等価である。

係数ベクトル \mathbf{w} の定義から明らかなように、 \mathbf{w} の各要素は独立ではなく、 $W(z)$ の零点が全て単位円周上に位置するように拘束されている。この拘束条件の必要十分条件の一つは、「係数ベクトルは

$$\begin{aligned} & [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_K]^T \\ & = [w_K^* \ w_{K-1}^* \ \dots \ w_0^*]^T \end{aligned} \quad (29)$$

を満たし、かつ $dW(z)/dz$ の零点は全て z の単位円周内に位置する」によって与えられる。この必要十分を係数のみで表現することには困難があるので、第一の条件のみを考える。このとき、 $W(z)$ は、単位円周上の零点の他には単位円に関する鏡像対の零点、 $re^{-j\theta}$ 、 $(1/r)e^{-j\theta}$ を持つことがある。鏡像対の零点については、二つの信号が θ で定まる同一の方位を持つものと解釈するものとする。

式(29)を満たす \mathbf{w} は $K+1$ 個の独立な実パラメータ、 u_k 、 $k=0, 1, \dots, K$ 、を用いて以下のように表される。

$$\mathbf{w} = \mathbf{T}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_K]^T \quad (30)$$

(K is odd)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L & j\mathbf{I}_L \\ \tilde{\mathbf{I}}_L & -j\tilde{\mathbf{I}}_L \end{bmatrix}, \quad (L = (K+1)/2)$$

(K is even)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L & \mathbf{0} & j\mathbf{I}_L \\ \mathbf{0} & \sqrt{2} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{I}}_L & \mathbf{0} & -j\tilde{\mathbf{I}}_L \end{bmatrix}, \quad (L = K/2).$$

ここに $\tilde{\mathbf{I}}_n$ は、次の $n \times n$ 行列を表す。

$$\tilde{\mathbf{I}}_n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 1 & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

式(30)の表現を用いれば、評価関数 $J(\mathbf{w})$ は次式で与えられる。

$$J(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \mathbf{u}, \quad (32)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) = \sum_{p,q=0}^{M-K-1} \text{Re} \left\{ f_{q,p}(\mathbf{u}) \mathbf{T}^H \mathbf{R}_{p,q} \mathbf{T} \right\}. \quad (33)$$

$M-K=1$ の時、 $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = 2\mathbf{u}^T \mathbf{u}$ となるため、

$$J(\mathbf{u}) = \frac{2\mathbf{u}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{u}} \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \mathbf{T}^H \mathbf{R} \mathbf{T} \right\} \quad (35)$$

となり、 $J(\mathbf{u})$ の最小値を与える \mathbf{u} は、 $\tilde{\mathbf{R}}$ の最小固有ベクトルとして求められる。

また、 $M-K > 1$ の場合、 $J(\mathbf{u})$ の中間要素 $\mathbf{Q}(\mathbf{u})$ を固定して考えるものとすれば、 $\|\mathbf{u}\| = \text{const.}$ の拘束条件の下で、 $J(\mathbf{u})$ を最小にする \mathbf{u} は $\mathbf{Q}(\mathbf{u})$ の最小固有値に対する固有ベクトルで与えられる。そこで次の繰返し計算を考える。

[アルゴリズム EML (Eigen based ML)]

- i) \mathbf{Q}_0 を次式で定義し、 \mathbf{Q}_0 の最小固有ベクトルを \mathbf{u} の初期値 \mathbf{u}_0 とする。

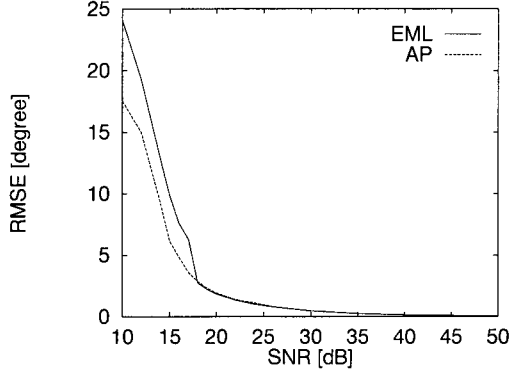
$$\mathbf{Q}_0 = \sum_{p=1}^{M-K} \text{Re} \left\{ \mathbf{T}^H \mathbf{R}_{p,p} \mathbf{T} \right\}. \quad (36)$$

- ii) $\mathbf{Q}(\mathbf{u}_{n-1})$ の最小固有ベクトルを \mathbf{u}_n とする。

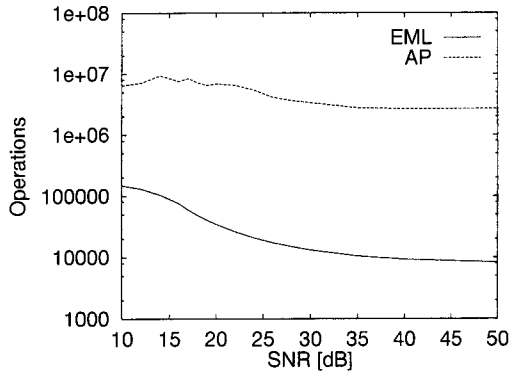
- iii) $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}\| < \epsilon$ ならば、計算を終了し、 \mathbf{u}_n を解とする。そうでなければ ii) に戻る。

M 個のセンサ内の連続した $K+1$ 個のセンサからなるサブアレイを構成すれば、 $M-K$ 個のサブアレイが構成される。 \mathbf{Q}_0 はこれらのサブアレイ上での評価関数の和を与えるものであり、 \mathbf{u}_0 はこの設定の下で正確に評価関数を最小化する解である。

AP 法と EML 法による推定精度 (RMSE, Root Mean Squares Error) と計算量 (四則演算の総和の一推定当たりの平均値) を図3に示す。しきい値領域で推定精度の劣化が見られるが、一定の SNR (図では 18dB) を越えると AP 法と同等の推定精度が得られている。また、計算量は AP 法の 1/70 から 1/250 程度に削減されている。



(a) 推定精度



(b) 計算量

図3 AP法とEML法の比較。(等間隔直線アレイ, センサ間隔: 半波長, センサ数: 5, 信号数: 3, 入射方位 $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$, 試行回数 200.)

6 効率的な最適化法

前章では, 最大尤度方位推定のための効率的な準最適化法, EML法を示した. EML法における繰返し計算の収束値は,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}_\infty)\mathbf{u}_\infty = \lambda\mathbf{u}_\infty \quad (37)$$

を満たす. しかしながら $J(\mathbf{u})$ の最適解は

$$\frac{\partial J(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (38)$$

を満たすものであり, これは一般に EML法による収束値とは異なる. この原因は, 式(34)において中間要素 $\mathbf{Q}(\mathbf{u})$ を固定したことにある. そこで $J(\mathbf{u})$ の \mathbf{u} に関する導関数を求めれば, 次式が得られる.

$$\frac{\partial J(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = 2\mathbf{Q}(\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{r}(\mathbf{u}) \quad (39)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \sum_{p,q=0}^{M-K-1} \text{Re}\{(\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{p,p} \mathbf{w}) \mathbf{e}_{q,p}(\mathbf{u})\} \quad (40)$$

$$\mathbf{e}_{q,p}(\mathbf{u}) = \frac{\partial f_{q,p}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \quad (41)$$

$\mathbf{e}_{q,p}(\mathbf{u})$ は $f_{q,p}(\mathbf{u})$ を求めるための Trench アルゴリズムの全ての式に $\partial/\partial \mathbf{u}$ を作用させることによって得られる以下のアルゴリズムによって効率的に求めることができる. このアルゴリズムでは, $\mathbf{W}^H \mathbf{W}$ の (i,j) 要素 g_{i-j} とその導関数 $\partial g_m / \partial \mathbf{u} = \mathbf{h}_m$ が必要であり, これらは次式で与えられる.

$$g_m = \mathbf{u}^T \Phi_m \mathbf{u}, \quad (42)$$

$$\mathbf{h}_m = \{\Phi_m + \Phi_m^T\} \mathbf{u} \quad (43)$$

$$\Phi_m = \mathbf{T}^H \mathbf{J}^m \mathbf{T}, \quad (44)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

[Trench algorithm combined with its derivatives]

A) Initial Condition I

$$1) a_0^{(0)} = 1, P_0 = g_0$$

$$2) \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{S}_0 = \mathbf{h}_0.$$

B) Recursion I: for $m = 1$ to $s (= M - K - 1)$

$$1) \Delta_m = g_m + \sum_{n=1}^{m-1} g_{m-n} a_n^{(m-1)}$$

$$2) \mathbf{\Gamma}_m = \mathbf{h}_m + \sum_{n=1}^{m-1} (\mathbf{h}_{m-n} a_n^{(m-1)} + g_{m-n} \mathbf{b}_n^{(m-1)})$$

$$3) \rho_m = -\frac{\Delta_m}{P_{m-1}}$$

$$4) \boldsymbol{\mu}_m = -\frac{\mathbf{\Gamma}_m}{P_{m-1}} + \frac{\Delta_m}{P_{m-1}^2} \mathbf{S}_m$$

$$5) P_m = P_{m-1} + \rho_m \Delta_m^*$$

$$6) \mathbf{S}_m = \mathbf{S}_{m-1} + \rho_m \mathbf{\Gamma}_m^* + \boldsymbol{\mu}_m \Delta_m^*$$

$$7) a_m^{(m)} = \rho_m, \quad a_0^{(m)} = 1$$

$$8) \mathbf{b}_m^{(m)} = \boldsymbol{\mu}_m, \quad \mathbf{b}_0^{(m)} = \mathbf{0}$$

9) for $n = 1$ to $m - 1$

$$\begin{aligned} \text{a) } a_n^{(m)} &= a_n^{(m-1)} + \rho_m a_{m-n}^{(m-1)*} \\ \text{b) } b_n^{(m)} &= b_n^{(m-1)} + \rho_m b_{m-n}^{(m-1)*} + \\ &\quad \mu_m a_{m-n}^{(m-1)*} \end{aligned}$$

C) Initial Conditions II

$$\begin{aligned} 1) f_{0,0} &= -\frac{1}{P_s} \\ 2) e_{0,0} &= \frac{\mathbf{S}_s}{P_s^2} \end{aligned}$$

D) Recursion II: for $m = 1$ to $s (= M - K - 1)$

$$\begin{aligned} 1) f_{m,0} &= \frac{a_m^{(s)}}{P_s}, \\ 2) e_{m,0} &= \frac{b_m^{(s)}}{P_s} - \frac{a_m^{(s)}}{P_s^2} \mathbf{S}_s, \\ 3) \text{ for } n = 1 \text{ to } m \\ \text{a) } f_{m,n} &= f_{m-1,n-1} + \\ &\quad \frac{1}{P_s} \{ a_m^{(s)} a_n^{(s)*} - a_{s'-m}^{(s)} a_{s'-n}^{(s)*} \} \\ \text{b) } e_{m,n} &= e_{m-1,n-1} \\ &\quad + \frac{1}{P_s} \{ a_m^{(s)} b_n^{(s)*} + b_m^{(s)} a_n^{(s)*} \\ &\quad - a_{s'-m}^{(s)} b_{s'-n}^{(s)*} - b_{s'-m}^{(s)} a_{s'-n}^{(s)*} \} \\ &\quad + \frac{\mathbf{S}_s}{P_s^2} \{ a_m^{(s)} a_n^{(s)*} - a_{s'-m}^{(s)} a_{s'-n}^{(s)*} \} \end{aligned}$$

where $s = s + 1$.

以上より、式(39)の $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ が求められることが分かった。このに基づき、以下のアルゴリズムを考える。

[局所二次形式近似法 (LAQML, Locally Approximated Quadratic ML)]

- i) 適当な初期値 \mathbf{u}_0 を与える。
- ii) 次式により \mathbf{u}_{n-1} から \mathbf{u}_n を求める。

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{2} \mathbf{Q}(\mathbf{u}_{n-1})^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n-1}) \quad (46)$$

- iii) $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}\| < \epsilon$ ならば、計算を終了し、 \mathbf{u}_n を解とする。そうでなければ ii) に戻る。

$J(\mathbf{u})$ の代わりに次の評価関数を考える。

$$J_v(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{Q}(\mathbf{v}) \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{r}(\mathbf{v}) \quad (47)$$

$J_v(\mathbf{u})$ は、次の性質を持つことは容易に確かめられる。

$$J_v(\mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) \quad (48)$$

$$\left. \frac{\partial J_v(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{v}} = \left. \frac{\partial J(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{v}} \quad (49)$$

すなわち $J_v(\mathbf{v})$ は、 $J(\mathbf{v})$ の $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ における局所的な近似評価関数であると見なされる。

また、 \mathbf{Q} は正定値行列であるので、 $J_v(\mathbf{u})$ は下に凸であり、その最小値は

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}(\mathbf{v})^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{v}) \quad (50)$$

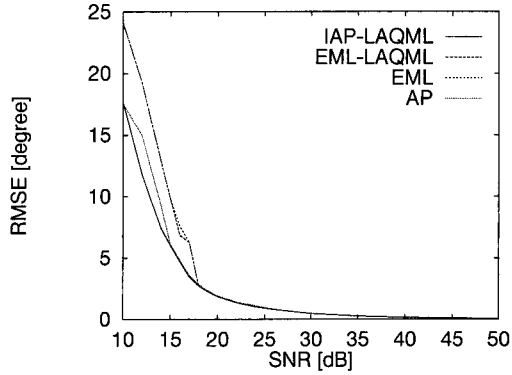
によって与えられる。

したがって LAQML 法における更新式は、参照点 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{n-1}$ における局所的な二次形式近似評価関数 $J(\mathbf{u}_{n-1})$ の最小点を与えており、近似評価関数の導関数が評価関数の導関数に一致することから、LAQML 法の解は $J(\mathbf{u})$ の極小値に収束する。局所解に陥る可能性もあるが、これは初期値の影響が大きい。

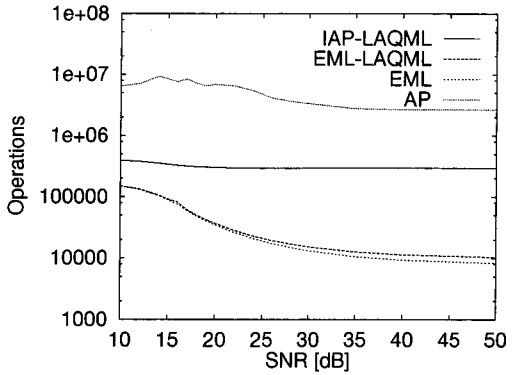
図4に LAQML 法による推定誤差と計算量を示す。IAP-LAQML は AP 法による初期化法にしたがって LAQML 法の初期値を与えた場合である。EML-LAQML は、前章の EML 法の収束値を LAQML 法の初期値とした場合である。IAP-LAQML は、低 SNR で AP 法よりも高い精度が得られている。これは LAQML 法の解空間が AP 法の解空間よりも広いことに起因していると考えられる。EML-LAQML は、IAP-LAQML に比べ低 SNR 時に推定誤差が大きくなっており、局所解に陥っているものと考えられる。計算量に関しては、IAP-LAQML は AP 法の約 1/9 から 1/20 程度である。以上より IAP-LAQML によれば、推定精度が向上し、しかも高速化されることが分かる。

以上より LAQML 法の初期値には、AP 法の初期化法が適していることが分かる。そこで、この初期化法を高速化することを考える。

等間隔直線センサアレイにおいて、行列 $\mathbf{P}_{A(\Theta_k)} \mathbf{R} \mathbf{P}_{A(\Theta_k)}$ の (i, j) 要素を n_{ij} で、また $\mathbf{P}_{A(\Theta_k)}$ の (i, j) 要素を d_{ij} で表し、次の $M - 1$ 次の多項式を定義する。



(a) 推定精度



(b) 計算量

図 4 AP 法, EML 法, LAQML 法の比較. (等間隔直線アレイ, センサ間隔: 半波長, センサ数: 5, 信号数: 3, 入射方位 $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$, 試行回数 200.)

$$N(z) = \sum_{i=0}^{M-1} n_{ii} + \sum_{i,j=0(i>j)}^{M-1} n_{ij} z^{i-j} \quad (51)$$

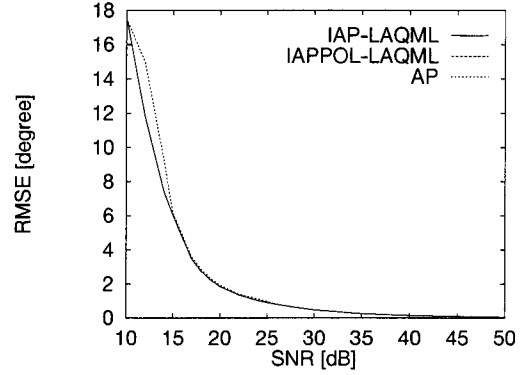
$$D(z) = \sum_{i=0}^{M-1} d_{ii} + \sum_{i,j=0(i>j)}^{M-1} d_{ij} z^{i-j} \quad (52)$$

これらを用いれば $l(\theta_k)$ は

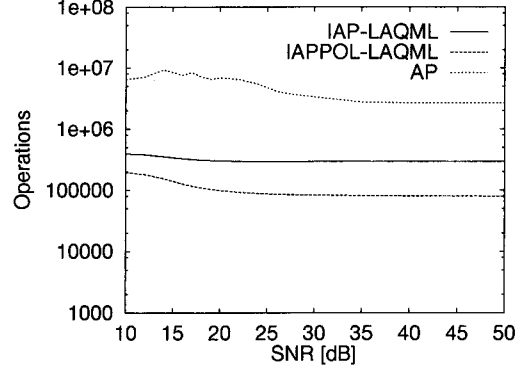
$$l(\theta_k) = \frac{\text{Re}\{N(e^{j\theta_k})\}}{\text{Re}\{D(e^{j\theta_k})\}} \quad (53)$$

で表される. 式 (53) では, 行列とベクトルの積が不要となり, 式 (11) に比べ計算量が削減される.

図 5 に各算法による方位推定の推定誤差と計算量を示す. IAPPOL-LAQML は, 式 (53) に従



(a) 推定精度



(b) 計算量

図 5 LAQML 法の初期化の高速化. (等間隔直線アレイ, センサ間隔: 半波長, センサ数: 5, 信号数: 3, 入射方位 $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$, 試行回数 200.)

う高速化した AP 法における初期化法の結果を LAQML の初期値とする方法である. 図 5 より, IAPPOL-LAQML によれば, より高速化されるのが分かる.

7 むすび

本文では, 最大尤度方位推定の評価関数に不連続点があることに起因し, 解の振動が見られることを示した. 等間隔直線アレイについて, 評価関数を連続化する手法を提案し, これによって解の振動が回避できることを示した. 連続化された評価関数上での準最適解を与える効率的な算法を提案した. 連続化された評価関数上で最適解を与え

る効率的な繰返し算法を提案した。また、この繰返し算法の初期値決定のためには AP 法の初期化

法が有効であることを示した。等間隔直線アレイの規則性を利用した AP 法の高速度化法を示した。

[参考文献]

- [1] F. C. Schwegge: "Sensor array data processing for multiple signal sources," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT, 14, pp.294-305, 1968.
- [2] I. Ziskind and M. Wax, "Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 36, no. 10, pp. 1553-1560, Oct. 1988.
- [3] H. Watanabe, M. Suzuki, N. Nagai and N. Miki, "A bearing estimation procedure based on maximum likelihood method for reducing a calculation cost," *IEICE, Japan, Tech. Rep.*, vol. EA89-40, pp. 21-26, Jul. 1989.
- [4] H. Watanabe, M. Suzuki, N. Nagai and N. Miki, "Maximum likelihood bearing estimation by quasi-Newton method using a uniform linear array," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing (ICASSP)*, pp.3325-3328, May 1991.
- [5] Y. Bresler and A. Macovski, "Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, no. 5, pp. 1081-1089, Oct. 1986.
- [6] J. Capon, "High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis," *proc. IEEE*, vol. 57, pp. 1408-1418, 1969.
- [7] V. F. Pisarenko, "The retrieval of harmonics from a covariance function," *Geophys. J. Roy. Astronom. Soc.*, vol. 33, pp. 347-366, 1973.
- [8] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-34, no. 3, pp. 276-280, Mar. 1986.
- [9] R. T. Williams, S. Prasad, A. K. Mahalanabis and L. H. Sibul, "An improved spatial smoothing technique for bearing estimation in a multipath environment," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 36, no. 4, pp. 425-432, Apr. 1988.
- [10] W. F. Trench, "An algorithm for the inversion of finite Toeplitz matrices," *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 12, no. 3, pp. 515-522, Sep. 1964.
- [11] M. Wax and T. Kailath, "Detection of signals by information theoretic criteria," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-33, no. 2, pp. 387-392, Apr. 1985.
- [12] M. Wax and I. Ziskind, "Detection of the number of coherent signals by the MDL principle," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, no. 8, pp. 1190-1196, Aug. 1989.