高等学校における微積分の初歩としての二次関数の指導過程

大 田 邦 郎

A Program of Instruction for the Quadratic Function as the First Step to Calculus in High School

Kunio Ohta

序　　問題の設定と方法

今世紀初頭の世界的な数学教育近代化運動は，工業の発達を背景に数学教育を科学・技術教育の一環と捉え，中等教育への微積分の導入を中心とする教育内容の改革を主張した。イギリスのJ.ペリーやドイツのF.クライン等の影響のもとに，日本においても小倉金之助らの改良運動が起こり，1941年の中学校教授要目にはじめて微積分が採り入れられ，[1] 現在に至るまで微積分は一貫して中等教育の中にも位置付けられてきた。

しかし，近代化運動が有していた実用主義・経験主義的な限界と，実際に教壇に立つ教員の養成と再教育にかかわる困難等の制約もあり，日本においても微積分の内容から自然科学との関連が弱まるなど，近代化は今日に至るまで十分に実をあげてはいない。ペリーが半世紀以上も前に「アカデミックな数学教授法は，わずか5％ほどの，抽象的推理を好む学生には成功しているが，そのほかの普通の学生には，まったく失敗している」[2] と述べていることは，現在の日本の高校教育にもあてはまらないだろうか？

数学教育近代化の運動は，数学の大衆化運動でもあった。クラインは主張する。「私の考えでは，今日すでに微積分は，関数概念の発展として，すべての人に要求すべき一般的な数学の教養に属しており，将来ますますそうなるだろう。」「それは，現代人として開かれた精神をもって，文化生活の発展に参加しようとするすべての人に必要なものである！」[3] そしてこのことは，高等学校への進学率が90％を越えた現在，ますます重要な課題であるといえよう。教育内容としての微積分を「すべての高校生にわかる」という視点から再編成することが，われわれにもとめられているのである。中等教育の大衆化は，たとえ「差別・選別の」と形容される教育体制のもとにあっても，いやむしろ，そうであればなおさらこの視点からの教育内容の再編成という内実をつくりだしていくことが不可欠であろう。

高校生の「低学力」が問題とされている今日，上述の課題にとりくむ前提としての「基礎学力の回復」の主張もあるが，「低学力」の基本的な要因が学習指導要領や教科書の非科学性にもとめられるとすれば，そこに「回復」すべき学力など見いだすべくもない[4]。むしろ逆に，現在あるがままの姿の高校生に微積分を指導する試みの中で，その前提的な内容も洗い出すという方法がもっとも生産的であると思われる。教育内容としての微積分を，現在の高校生の認識過程を通すことによって再編成しようというのである。ペリーはいう。「抽象的推理をおこなうことのできない普通の少年は，愚鈍だと言われている。だが私は，利口だと一般に言われている少年よりも，このような少年のほうが賢いと思う。」[5]

近代化運動において提起された課題は，まさに現代のわれわれの課題そのものであるとさえいえよう。

本論文の課題は，高等学校における二次関数の指導過程の確定をめざすことにあり，基本的な方法は，仮説としての授業プランの作成と実験授業による検証である。この論文では第1章で既往の指導プランについての検討を行なったあと，第2章において二次関数の基本的な論理的構造についての仮説を設定する。さらに第3章では，この論理構造の仮説にもとづいて，生徒の認識過程を直接的に組織していくための発問，説明，指示等を具体化した「授業書」[6]を作成したい。したがって「授業書」は，対象の論理構造に関する仮説とともに，その認識過程の組織に関する仮説をも反映するものといえよう。

仮説の検証の方法については，まだ定式化のレベルには至っていない。さしあたり，二重の仮説を統一的に対象化した「授業書」に対する評価を第4章で行なうこととしたい。生徒の認識の過程は，基本的には授業過程に反映していると考えられるから，授業過程の分析による「授業書」の吟味が中心的な課題となるが，しかし，授業の表面には現われて来ない部分をも把握し，補足することも必要であろう。ひとりひとりの認識状況を，節ごとの主要な課題に対するアンケートや感想文等を通じての分析も行ないたい。また，計算の指導に関する評価については，計算テストの分析も必要となるだろう。第5章では，評価のまとめを行ない今後の課題を明らかにしたい。

注

1）理数科数学の教授要目において，中学4年で微積分の基礎，5年で力学がとり入れられた。しかし1943年には中学校は4年までとなり，戦争の激化もあってあまり実施されなかった。

2）ペリー「『初等実用数学』序説」（ペリー，クライン，丸山哲郎訳『数学教育改革論』明治図書，1972年）49ページ。なおここでの「抽象的推理」はのちの引用からもわかるように，肯定的に用いられた言葉ではない。

3）クライン「教材としての微積分の問題について」注2），105ページ。

4）大田邦郎「二次関数と微積分」（北海道高教組編集・発行『わかる授業民主的人格づくり』1979年）参照。

5）注2），52ページ。

6）高村泰雄「教授過程の基礎理論」（城丸章夫・大槻健編『日本の教育6教育の過程と方法』新日本出版社，1976年）参照。

第1章　既往プランの検討

中学校・高等学校の学習指導要領・教科書における関数指導は，微積分以前の内容についてはいまだにグラフと代数的な扱いが主であり，変量の解析という視点に欠けている。とくに二次関数は非一様変化を表わすものであり，二次関数を関数指導体系にどのように位置付けるのかということは，重要な問題であると思われる。

1977年の改訂により，中学校の学習指導要領から二次関数は消え，「2乗に比例」が残された。現行の中学校教科書3年生用では，それをたとえば次のように導入している。

高いところから物体を落とすとき，落としはじめてから x 秒後の物体の落ちた距離を ym とする。このとき，x と y の対応を表わす表は次のようになる。

x	0	1	2	3	4	5
y	0	5	20	45	80	125

上の表から，xとyの間にどのような関係があるか調べよう。まず，yとx^2の間の関係を調べるために，下の表を作った。

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
y	0	5	20	45	80	125

この表から$\frac{y}{x^2}$の値がつねに5となることがわかる。このことから，xとyの間には，

$$\frac{y}{x^2}=5 \quad \text{すなわち} \quad y=5x^2$$

という関係があることがわかる。[1)]

ここでは測定値から法則を発見しているかのように見えるが，実はx^2とyの関係に着目することを押し付けているのであり，またyとx^2との「比例」関係にとどまることにより，非一様変化の解析という視点を欠落させているのである。

改訂前の1969年学習指導要領による教科書には「二次関数」があった。

物体を初速20m／秒でまっすぐ上に投げ上げたとき，投げてからx秒後の高さをymとすれば，xとyとのあいだには，およそ次の関係式が成り立つ

$$y=20x-5x^2$$

そして次のように定義する。

yがxの２次式で表わされる関数であるとき，すなわち，変数xと変数yとのあいだに，

$$y=ax^2+bx+c\ (a, b, c \text{は定数},\ a\neq 0)$$

という対応の規則があるとき，yはxの**２次関数**であるという。[2)]

たしかにここには「二次関数」についての誤りのない記述がある。しかし，$y=20x-5x^2$の式が天下りであるばかりでなく，二次関数の内容的特質ではなく式の形によって定義がなされ，あとはグラフと代数的扱いが主となっている。もっとも1969年改訂によって「平均変化率」が導入されたが，これは瞬間変化率との関連抜きに扱われたため，変化を解析する武器として用いられることはなかった。

これに続く高等学校の教科書においても数学Ⅰで二次関数が扱われるが，ほとんど事情は変わらない。

関数$f(x)$で，$f(x)$がxの２次式$ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$であるとき，yはxの**２次関数**であるという。[3)]

このような形式的な定義のあとは，グラフ，最大・最小，二次方程式・不等式などを扱い，変化率を二次関数に即して指導することはないのである。

ところで，数学Ⅱの微分法の導入では二次関数が，例として次のように用いられている。

物体が自然に落下する場合，落ちはじめてからの時間t(秒)と落ちる距離S(m)の間には，ほぼ次のような関係がある。

$$S=4.9t^2$$ [4)]

ここでも，この関係式の内容については触れていない。このあとは平均速度から瞬間速度，さらに微分係数から導関数へと展開していくのであるが，二次関数の特質──等加速度性──に

ついて扱うことはなく，一般的な扱いに終始している。ここでは二次関数はたんなる一例にすぎないのである。すなわち，具体的な特質をもった個別の関数のひとつである二次関数の，解析的な手法による指導は現行の中学校・高等学校の教科書によってはなし得ないのである。

本章では，「量にもとづく数学教育」を主張してきた数学教育協議会におけるいくつかの二次関数指導の実践をとりあげ，検討していきたい。これらの実践は，共通して二次関数を量の変化の法則との関連において指導したものであり，学ぶべきところが多い。

第１節　仙波元氏の実践の検討

近畿地区数学教育協議会（近数協）における集団的研究は，「“解析学の伝統” をすべての国民に！」[5]という目標のもとに解析学指導の内容を「微分法則から積分法則を見出すこと，すなわち微分方程式を解くこと，そのためのすべての学習」[6]と規定し，「量にもとづく数学教育」を関数指導において展開してきた。仙波元氏の中学校における実践[7]もその中に位置付けられる。

仙波氏の実践の特徴は，なによりも近数協の主張である「微分方程式を解く」方向，すなわち，

加速度一定 → 速度∝時間 → 位置変化∝時間^2

という順序で指導することにあり，さらに微分法へと展開していくのである。

仙波氏の実践記録のアウトラインをフォローしていこう。まず，瞬間速度の存在を，図１のように斜面の途中に水平な板を置いたときに得られる速度としておさえたあと，時間と距離についての数値を与え，何か法則性がありそうだと認めさせる。このあと，水の出方が一様な水道栓（図２）を考えて，正比例関数と一次関数，およびその面積シェーマを扱い，「いよいよ２次関数を作ります」(傍点筆者) ということになる。

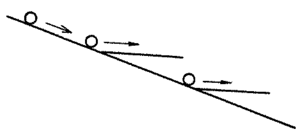


図 1

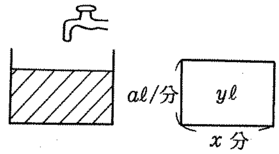


図 2

このプランにおいては，二次関数を「区分的一次関数の極限法則」として捉える立場が採用され，図３のような水道栓をひとつずつ開いていく場合から，水の出る速度が連続的に変化する場合へと移っていく。「棒（バルブ）が管の中を 等速度で動くと，速度は規則的に変化します。たとえば１分たつと4ℓ／分だけ速くなるように」と，等加速度変化を定義する。バルブをとめたときに瞬間速度が得られ，

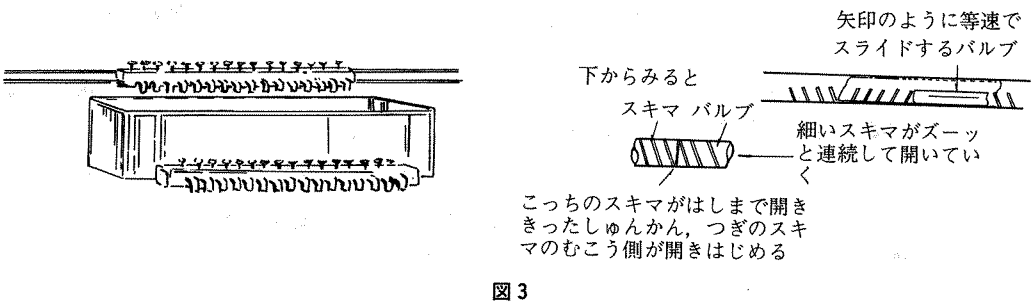


図 3

加速度4ℓ／分^{2}で時間がx分たてば，速度$z\ell$／分は$z = 4x$と求められる。ここで，等加速度変化の実在の現象として落下運動や斜面上の運動がとりあげられるが，「物体は重力の作用によ

って9.8m/秒²の等加速度で落下するという」と，天下りになっている。

次に蓄積量については，「蓄積量は面積で表わされているんだな，ということの確認だけのためにやる，という程度」に扱うが，等速度変化のとき，速度×時間で蓄積量が求められることとを結びつける。「これは等速度変化か？　ちがう。速度×時間は？　等速度変化のとき。この押し問答をくり返していると，あ，平均したらよい，という意見が出るクラスもあります」という展開である。「2分，3分，……と数値を与えて，時間→速度→平均速度→蓄積量を求め，さいごにx分→ $z=4x(\ell/分)$→平均変化率はその$\frac{1}{2}$つまり$2x\ell/分$ ゆえに，$y(\ell)=2x(\ell/分)\times x(分)=2x^2(\ell)$」。ただし，ここで平均変化率の定義はない。そして，加速度・速度・蓄積量の三者関係（図4）をおさえ，蓄積量の式$y=ax^2$から速度の式$z=2ax$を求めさせ，「こうすることを『微分する』というんだ」となる。

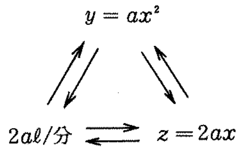


図4

このあと，速度が0になる時刻x_0を基準にした時の時間と蓄積量の関係から，二次関数の

$$y=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

の形へのべき展開を求め，これによって最大・最小問題を考える。

以上がアウトラインであるが，仙波氏の実践は，前述のように二次関数を「微分方程式を解く」すなわち積分法則として指導するという方向の画期的な内容をもっており，この点は高く評価されよう。しかし具体的な展開についてはいくつかの重要な問題点を有していると思われる。主要な点について検討していこう。

第一の問題としては，二次関数が区分的一次関数の極限として導入されることがあげられる。二次関数は，一次関数とは本来質的に異なった性格をもつ関数であり，まず，二次関数があって，これを分析する際に局所一次化の方法がとられるのである（これが微分法であった）。

第二には，加速度の概念が前提されたものであるという問題がある。仙波氏の「2次関数を作る」という表現にも端的にあらわれているように，「1分毎に水道栓を開」いたり「棒（バルブ）が管の中を等加度で動」いたりすると速度変化はどうなるか，という問題設定では，等加速性は，その中にすでに前提されているのである。生徒が具体的な対象にはたらきかけてこれを導くことなどありえず，これは押し付け以外の何物でもない。このことは，等加速度変化の指導を水道栓モデルに依拠して展開すること自体に問題があることを示している。またこのモデルには，速度は1分あたりの水量，加速度はそれが1分間にどれだけ増すか，というように，本来内包量であるべき量を，外延量におきかえて捉えるという欠陥もあり，典型的なモデルとはいいがたい。さらに，斜面上の運動が例として出されても，水道栓モデルとは何ら結びつけられず，運動の分析もなされていないのである。

第三の問題点は，速度$z=ax$から蓄積量$y=\frac{1}{2}ax^2$を求める際，「平均速度」という概念を用いることにある。平均速度は，時刻$t_1\sim t_2$においては$\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}$で与えられるが，位置$S(t)$に関するデータ（それを今，もとめようとしているのであるが）抜きに平均速度を考えることはできない。たしかに結果的には，等加速度運動の平均速度は$t_1\sim t_2$においては

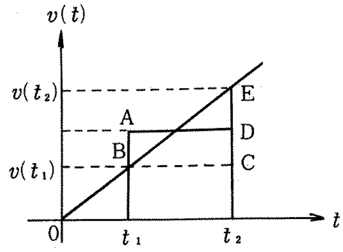


図5

$\frac{v(t_1)+v(t_2)}{2}$であり，このことは時間と速度のグラフ（図5）の三角形BCEと長方形ABCDの面積が等しいことにも表わされている。しかし，位置変化がグラフの下の面積で表わされることを認めること自体が積分法の内容でもあり，必ずしも直観的に捉えられるものでないことは，仙波氏の授業記録からも明らかであろう。ここは実質的に積分の考えが不可欠なところであり，この場面ではじめて区分的一次関数の極限として考えるべきであろう（図6参照)。

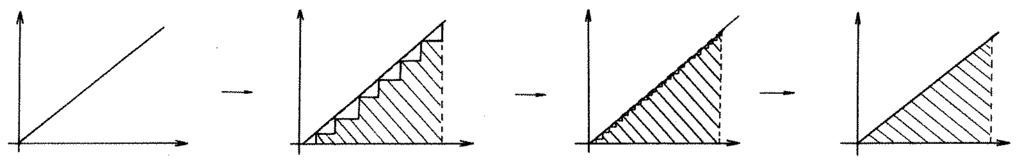


図6

第四の問題点にうつろう。微分法にかかわる問題であるが，微分法が局所一次化の方法を抜きに扱われている。このことは，実は第二の問題点の帰結でもある。加速度を与えてしまった以上，速度＝加速度×時間を求めてしまえば本来の意味での微分法など必要ではなくなるのである。しかし，距離から導かれる以前の速度・加速度概念は，それらが求めうると仮定してのものであり，距離が求められたのちあらたに定義されなおされるものに他ならない（ただし，だからといって距離→速度→加速度という展開はあり得ない。距離から速度を求めるためには，距離は時間の関数として表わされていなければならないからである)。

仙波氏の実践における以上のような弱点の克服には，まず，モデルとして運動そのものをとりあげることが必要と思われる。実際，速度・加速度といった運動学の用語を使用しているのであり，これらの概念を本来の意味において指導することができると同時に，第一，第二の問題点も克服されよう。さらに第三，第四の問題点とかかわって，より積極的に微分・積分の方法をとり入れることが課題となるだろう。そしてこれらによって微分方程式を解き，得られた関数をまた微分するというこのプランに内包された積極性が，より生きたものになると思われるのである。

第2節　小野良高氏および榊忠男氏の実践

つぎに，数学教育協議会における典型的な二次関数指導の例として，小野良高氏および榊忠男氏の中学校における実践[8),9)]について検討していこう。

小野氏は，二次関数の指導を二つに分けて考えている。ひとつは「2次関数とはどんな関数で，どんな特徴をもっている関数なのか」を知ることであり，もうひとつは「どのようにして学習した関数の概念をもって，現実にある2次関数を求めてみるか」ということである。ここには明確にひとつの数学論がある。すなわち，小野氏にあってはまず数学的概念としての二次関数が存在し，それが現実に適用されるのである。[10)] そして数学的概念の起源は，明らかにされてはいない。

小野プランのアウトラインを示そう。まず二次関数の「典型」として図7のような「三角水そう」により，水の高さxと水量yの関係を，

$$y=f(x)=ax^2+3x+3$$

と求めさせる。三角水そうは,「2次関数の式化が容易にできて,2次関数の意味をある程度明らかにしたい」という理由で用いられている。式化のあと，平均変化率が区間によって異なること，そして,「第2階差が一定である，一定値はaの2倍値である」ことを「帰納的な法則」としておさえる。このようにして「2次関数の性質を一応おさえ」たあと，等加速度運動の分析に移っていくのである。「現実にある2次関数」として落下運動を扱うのであるが，これ以降は榊氏の実践の方がより豊かな内容をもっているのでここでは省略し，三角水そうモデルについて検討しよう。

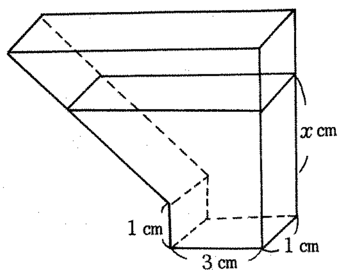


図7

この水そうは，たしかに式化のうえでは便利である。法則性の認識抜きに二次式が得られる。そしてこの式から平均変化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$を量的な裏付けなしに考え，第2階差一定という「2次関数の性質」が得られるが，これらの操作が，すくなくとも三角水そうのどの側面を表わすのかということさえ指導されていない。

実はこの問題は，三角水そうそれ自体のうちにふくまれているのである。三角水そうは，等加速度運動における速度一時間グラフ(図8)と全く同型であり，したがって，等加速性という性質は，問題設定のうちにすでに前提されているばかりか，水量を求めるという問題の中に，距離が面積で表わされるという積分法に相当する内容が解消されているのである。したがって，三角形の面積として求めた二次式について，第2階差一定の「法則」を導き，これを現実の世界に「適用」するといっても，第2階差を調べて式化するだけの貧弱なものにしかなり得ない。[11)]

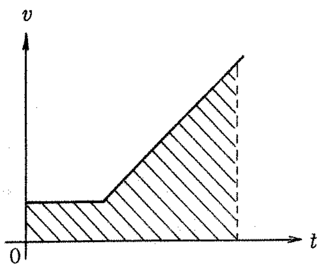


図8

つぎに，榊氏の実践記録の検討であるが，このプランの特徴は等加速度運動の分析からはいるところにある。物体に紙テープを付け，等時間ごとにタイマーで打点をうつようにして落下させると，打点の間隔はだんだん広がっていく(図9)。
このデータ(紙テープ)の処理方法について生徒に考えさせると，


図9

① 一定時間ごとにテープを切って，各時間ごとに進んだ距離をグラフに表わす
② 一定時間ごとまでの物体の位置変化をグラフに表わす

という，二通りの方法が出されるという……(図10)。

①のグラフのたて軸は，速度を表わしていることから，速度が時間に比例 ── 速度のふえ方が一定でこれを等加速度運動と定義する。②のグラフについては，生徒から「はじめから落ちる距離は，かかった時間の2乗に比例する」と出てくる。

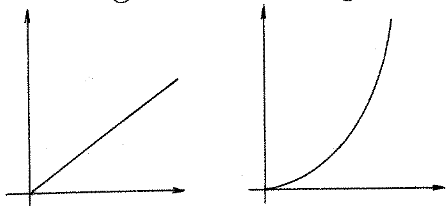


図10

ところで,「オモリの重さと速くなり方に関係があるのか」という疑問が生徒から出される。そこで，実験によって落下運動は重さと無関

係であることが確認される。

このあと，三角水そうについて指導されるが，この部分は小野氏のものとほぼ同様であり省略する。そして$y=f(x)=x^2$について平均変化率を扱い，瞬間変化率，導関数と展開していく。なお,「『瞬間』についての子どもたちの考えや,『瞬間速度』についての『あるのかないのか』といった議論はおもしろかった」とあるが，具体的には紹介されていない。

さて，この授業の評価であるが，等加速性をあらかじめ前提するのではなく，運動そのものを分析させるという点では「押し付け」的でなく，生徒も関心を示している。しかし第一に，分析の視点を持たないままデータが与えられるため分析できない班もあり，また，データの誤差を「実験誤差によるものであるとは思わない傾向がつよかった」という結果にもなっている。

第二に，①のグラフのたて軸は，速度を表わしてはいるがやはり，進んだ距離という外延量的な把握にとどまっている。②のグラフのたて軸を「それはほんものの距離」という発言はこのことを逆に示しているといえよう。

第三に，②のグラフについて，時間と距離の関係を求める手だてがとられていない。生徒から一応は「2乗に比例」と出て来たが，授業の展開からは，この発言の出てくる必然性をよみとることはできない。時間と距離の間の法則は，やはりストレートに捉えることはできず，速度を媒介に考えなければならない。

また，生徒の発言からくみとるべきものが，この実践記録には見られる。落下運動と質量の関係に着目することは自然であり，アリストテレス的な発想を持っていないとも限らない。したがって，運動学的な分析に限定することなく，力と運動の関係をもある程度指導するべきであろう。「瞬間」および「瞬間速度」についても，ガリレイがくぐり抜けた問題であるばかりでなく，運動の矛盾とかかわる問題であり，アプリオリに存在するものとして指導するわけにはいかない。何らかの手だてが必要とされるところであろう。

なお，高等学校においては，量の変化の解析という視点からの二次関数の系統的な指導実践はほとんど見られない。[12] このなかで，黒田俊郎氏の高校生むけの著書『微分のひ・み・つ』および『積分のい・ず・み』[13]は，微分法と積分法をそれぞれ独立させてまとめており，等加速度運動と二次関数も素材のひとつとして扱われている。とくに積分法においては，速度一時間グラフの下の面積から二次関数を求める点など検討に値するが，微分法では接線の傾きを“測る”ことが主で，微分計算は「付録」でしかない。また積分法を微分法から独立させた積極性は，逆にこれらを相互の関連において捉えることの不十分さにもつながっている。二次関数を中心とした微積分の総合的な指導が考えられて良いだろう。

注

1）河口商次，原弘道，吉田耕作監修『中学校数学3年』教育出版，1980年，72～73ページ。
以下，教育出版の教科書から引例するが，学習指導要領による制約などもあり，他社の教科書についてもほぼ同様のことがいえる。

2）河口商次，原弘道，吉田耕作監修『中学校数学3年』教育出版，1978年，86ページ。

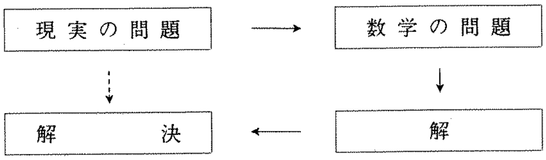
3）小林善一監修『高等学校数学Ⅰ』教育出版，1976年，124ページ。

4）小林善一監修『高等学校数学ⅡB』教育出版，1977年，108ページ

5）山口昌哉，中原克己編『関数指導現代化入門1初等関数』明治図書，1970年，7ページ(山口氏執筆部分)。

6）注5)，10ページ（中原氏執筆部分)。

7）仙波元「２次関数の指導」(『数学教室』国土社，1971年10～12月号)，以下，とくに断らないかぎりここからの引用。
8）小野良高「２次関数の指導」(『数学教室』国土社，1974年11月増刊号)，以下，ここからの引用。
9）榊忠男「『２次関数』の授業」(『数学教室』国土社，1974年８月号)，以下，ここからの引用。
10）現実の問題と数学との関係について，数学を使って現実の問題が解決されるとする数学観のひとつの展型として，銀林浩氏の図式（下図）がある。銀林「数学でなぜ授業が問題になるか？」(数教協会員誌『研究と実践』第43号，1975年）31ページなど。



これは逆立ちした議論であって，数学的認識の起源が実在の量的諸関係にもとめられるということは，「問題を解く」こともふくめて数学的活動が総体として実在の反映であるということに他ならない。
11）仙波氏の「等加速水栓」モデル，および小野氏の「三角水そう」モデルに限っていえば，これらは等加速性を約束のうちに前提していることから，二次変化の法則をはじめて解明していく手段とはなり得ない。しかし，数学教育におけるモデルの役割については今後検討していく必要があるだろう。「三角水そう」については，われわれは速度―時間グラフとして積分法の指導に位置付くと考える。
12）東数協２次関数グループによる研究も，いくつかのおもしろい問題を体系化しようと試みているが，まだ一貫した論理構成をとるまでには至っていない。同グループ「落体と２次関数」(『数学教室』国土社，1980年８月号）参照。
13）ともに，三省堂，1977年。

第２章　二次関数指導の論理構造

二次関数の指導において，等加速度運動の解析と微積分の方法の導入が不可欠であることを，前章ではインプリシットに主張してきた。本章では，二次関数指導過程における論理的脈絡を明らかにするために，ガリレイの等加速度運動論およびニュートン力学と二次関数との関連について，若干の検討を加えていきたい。

第１節　ガリレイの等加速度運動論と二次関数

数学における文字の一般的な使用はヴィエタ，さらにはデカルトを待たねばならなかったが，それにもかかわらずガリレイは，『新科学対話』における等加速度運動の考察の中で，実質的に二次関数を導いている。そのプロセスを検討していこう。

（定義）

静止から出立して，等しい時間内に等しい速さの増加を得べき運動を等加速（一様に加速された）運動という。[1]

時刻を t，速さを v，距離を S とすれば，定義はしたがって「Δt＝一定のとき，Δv＝一定の運動を等加速運動という」となる。この定義をめぐる対話の中で「等加速運動とは，その速さが通過する距離に比例して増加していく運動をいう」[2]との誤りが出される。これは，$v \propto S$，したがって $\dfrac{dS}{dt} \propto S$ と，距離が時間の指数関数ということになるのであるが，ガリレイもまた最初はこのように考えたことが示唆されている。また，「加速度が運動の継続する限り時間に比

例する」[3]と速度を加速度ととりちがえるなど,『新科学対話』においても距離と速度,速度と加速度の区別はまだ厳密ではないことからも,これらの概念の指導にあたってはそれぞれの関係について細かな配慮が必要とされよう。さて,$\Delta t=$一定$\Longrightarrow \Delta v=$一定から,$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=$一定,ここで初速が0であれば,$v=at$($a$は加速度)と,速度が時間に比例するのであった。

命題1 定理1

物体が静止から出立して,一様に加速される場合,それが任意の距離を進むに必要なる時間は,同じ物体が同じ距離を,その速さが加速運動の始まる直前の速度と,最高の速度との平均値に等しい等速運動を行なう場合の所用時間に等しい。[4]

ガリレイはこの定理を,ある時間に進む距離がこの二つの運動について等しいことを示す方向で証明しようとする。そのためにガリレイは,図1のような,速さと時間についてのグラフともいうべき図を用いた。すなわち,ABが時間軸,BEが等加速運動の終速の大きさを表わしている。AEを結んで三角形をつくり,「AB上の等距離にある諸点からBEに平行に引いたすべての直線は,瞬間Aに始まり,次第にその増加していく速度を示すであろう」とガリレイは述べているが,「速度」としての「平行線」は,このあとの証明の中では「運動量〔momenta〕」を表わすものとされている。

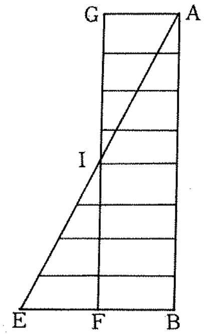


図1

運動体の有する運動量〔momenta〕は,加速運動の場合には三角形AEB内の増大する平行線によって,また等速運動の場合には矩形GB(長方形ABFG ── 引用者)内の平行線によって表わされる。何となれば,加速運動の最初の部分において不足なはずの運動量(この運動量の不足は三角形AGI内の増大する平行線によって表わされている)は,三角形IEF内の平行線によって償われるからである。[5]

この部分は『新科学対話』よりも6年早く出版された『天文対話』の中でも扱われているが,『天文対話』においては「運動量」という概念は使用されず,そのかわりに,三角形の面積は「通過される速さをすべて集めたもの,合計したもの」[6]という説明がなされている。

ここで着目すべきことは,『天文対話』においては三角形の面積が無限個の速さの総和で表わされると述べていたのに対し,のちの『新科学対話』においては,等加速運動をする物体の進む距離が,三角形の面積で表わされるとは述べていないということである。実はこのことを説明するためには積分法の考えが必要なのであり,ガリレイはほとんど積分法に近い考え方に到達しつつも,明確には述べることができなかったものと思われる。

命題2 定理2

静止から等加速運動をもって落下する一つの物体によって通過さるべき距離は,それらの距離を経過するに要する時間間隔の平方に比例する。[7]

定理1はある時間内に進む距離を,等速運動の場合におきかえて求めようとするものであったが,定理2は一般の時間間隔についての命題である。定理1より $S(t)=\dfrac{v(0)+v(t)}{2}\times t$ であり,初速 $v(0)=0$ であるから $S(t)=\dfrac{1}{2}v(t)\cdot t\propto\dfrac{1}{2}t^2$ となるが,数式を用いていないとはいえ,実質的には二次関数について論じているものといえよう。ガリレイはこの命題を,等速運動においては距離の比が速度の比と時間の比との複比に等しいことを用い,定義と定理1より,速度の比が時間の比に等しいことにより証明している。

系1

ゆえにもし運動の端初からかぞえて任意の等しい時間間隔，たとえばAD，DE，EF，FGをとり，それらの時間内にHL，LM，MN，NI，だけの距離を通過するものとすれば，これらの距離は相互に，1，3，5，7等の奇数列の比を成す。[8]

これは，定理2より$0^2:1^2:2^2:3^2:\cdots$の階差をとれば，ただちに奇数列が得られる。そして，この奇数列の法則を仮説として，実験が行なわれたのであった。[9]

以上，ガリレイの等加速度運動論について，二次関数との関連を中心にみてきたが，ガリレイはほとんど積分法に到達しつつあったといえよう。一次関数の積分，すなわち$v-t$グラフが直線の場合は一般性がないともいえるが，しかし一般の不等速運動の場合は$v-t$グラフが図2のような曲線になり，距離を求めることと面積を求めることの区別がつかない。むしろ，面積が既知であることに依拠しうる等加速度運動の場合について，距離と面積との関係を考えることに意味があることを，ガリレイの等加速度運動論は示唆しているように思われるのである。

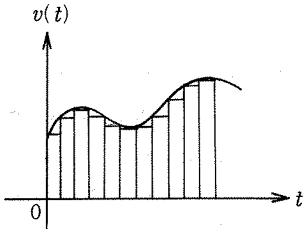


図2

第2節　ニュートン力学と二次関数

ガリレイの運動論が，力学ではなく運動学とよばれるのは，運動に変化を引きおこす原因の追求を保留していることによる。『新科学対話』において「加速度の原因が何であるかについて研究することは適当でないと思います」[10]というのは，アリストテレス流の実証的でない自然学に対する批判からでもあるが，当面の問題を彼は「その原因は何であれ，加速運動のいくつかの本性を研究し，説明するにある」[11]としたのである。もっともガリレイは，加速度の原因が力であることに気付いてはいたと考えられる。「ある者はこれを中心への引力であるとし，ある者は……」[12]との記述の中にこのことを読みとることができるのである。しかし原因の追求は運動学的レベルでの法則の発見には役立たない。

変量間の依存関係の考察にとどまらず，運動の「原因」としての力の役割を明らかにし，マクロなレベルにおける物体の運動の本質論的な把握に到達したのは，ニュートンの段階においてであった。ニュートン力学の第2法則は，次のような命題のかたちで与えられる。

運動の変化は，及ぼされる起動力に比例し，その力が及ぼされる直線の方向に行なわれる。[13]

ここで，「運動」は現在でいう運動量，「起動力」は力と解される。したがってこの第2法則は，

$$F=\frac{dmv}{dt}\qquad (F=\text{力},\ m:\text{質量},\ v:\text{速度},\ t:\text{時間})$$

と表わすことができる。すなわちこれは，微分方程式にほかならない。つまり，ニュートン力学は「力と運動との矛盾を絶えざる瞬間において把握」[14]するものといえよう。武谷三男氏は，自然認識の「本質論的段階において，その認識に固有なる論理的性格があらわれるのである。たとえばニュートン力学における微分方程式の如きである」[15]と述べている。

さて，微分方程式$F=\dfrac{dmv}{dt}$は，質量mが運動の過程で不変であれば，$F=m\cdot\dfrac{dv}{dt}=m\cdot\dfrac{d^2S}{dt^2}$となり，$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2S}{dt^2}$は加速度を表わすからこれを$a$とおけば，$F=ma$とも表わされ

る。この最も単純な場合が，力Fが一定,したがって加速度aも一定＝等加速度運動の場合である。そしてまた,これは$\dfrac{d^2S}{dt^2}=a$（定数）という,線型2階微分方程式の最も単純な形でもある。初速度$v(0)=0$のとき，$v(t)=\dfrac{dS}{dt}=at$，そして初期条件$S(0)=0$のとき，$S(t)=\dfrac{1}{2}at^2$と，ガリレイが導いた等加速度運動の法則から二次関数を導く基本的なすじみちが得られる。ニュートン力学で最も単純なもの，そしてまた微積分学における最も単純なものが等加速度運動論であるということができるが，ガリレイの運動学（およびケプラーの天体運動論）の段階を媒介して，ニュートン力学が成立したとすれば，等加速度運動論は，力学および微積分学のひとつの典型であるとさえいえよう。

ところで，本質論的段階における運動法則が，積分された式の形 ── 積分法則ではなく，微分方程式によって示される微分法則で表現されるのは，どのような根拠があるのだろうか。遠山啓氏は，複雑な運動の場合「はじめから積分法則は知られていない」が,「微分法則なら微分方程式によって簡単に表わすことができる」[16]という。しかし，どちらが簡単かというレベルの問題にとどまるものではないだろう。ガリレイの段階において等加速度運動は，式表現すれば$S=\dfrac{1}{2}at^2$と積分法則で表わされるが，ニュートンの段階では$F=ma$から$\dfrac{d^2S}{dt^2}=a$（定数）と微分法則で表わされる。そして微分方程式を解けば積分法則が得られるわけであるが，一般には$S=\dfrac{1}{2}at^2+C_1t+C_2$と，積分定数$C_1, C_2$が現われるのである。すなわち力によって規定された「本質的な微分方程式の諸関係は，積分常数の偶然性を媒介して現象する」[17]わけである。ガリレイにおいても，等加速度運動論の展開は，いわば微分方程式を解く形式になっている。本質的な関係を微分方程式で表わし，これを解いて量の法則を導くという方法は，自然認識においてもっとも重要な方法のひとつである。

微積分学の形成にとって，加速度概念の成立をその大きなモメントと考えるボホナーの見解も，注目に値しよう。彼はいう。「ニュートンには動点の動いた道のりを示す関数$x=x(t)$が必要だったばかりでなく，二次導関数を作るために，速度$v=\dfrac{dx}{dt}$自身を，もう一度tの値に依存する関数とみなさねばならなかった。」[18]つまり，加速度を考えるために，微分係数にとどまらず，導関数の概念が必然的なものになったときボホナーは主張するのである。微分法のひとつの源泉である接線法においては，導関数を考える必然性は弱い。微積分学は運動の解析において必然的になること，とりわけ速度・加速度概念の認識が，微積分学の理解のうえで重要な位置を占めるといえよう。

以上から微積分学は，マクロなレベルにおける物体の運動法則を解明するための数学として形成されてきたが，その核心は等加速度運動を表わす関数＝二次関数にあるということができる。等加速度運動を解析するだけで，微分方程式，積分，導関数といった，微積分学において基本的な内容と方法が必要となるのである。二次関数こそ，微積分への入口である。

第3節　二次関数の指導過程 —— その基本構造

前節までに検討したように，二次関数は微積分の方法による等加速度運動の分析を通じてこそ，ゆたかに理解することが可能となる。そして，その論理的順序構造は，基本的にはガリレイの等加速度運動論にもみられるように，いわば「微分方程式を解く」方法で，加速度から速度，速度から距離を求める，という順序になるだろう。

具体的には，まず加速度概念の前に，力の作用によって物体の運動に変化が生じることの把握が必要であり，さらに作用する力の大きさが一定であるときに速度変化も一定となること，そして，速度変化の割合を表わすものとしての加速度の概念が必要となるのである。加速度が一定であれば，速度は時間に比例し $v(t)=at$（v：速度，t：時刻，a：加速度）と表わされる。

このとき，物体が運動をはじめてから時刻 t_0 までに進む距離 $S(t_0)=\int_0^{t_0} atdt$（S：位置変化）は，図3のように速度—時間グラフ（$v-t$ グラフ）の下の三角形の面積で表わされる。しかし，このことはガリレイでもそうであったように決してアプリオリではなく，積分の考え方——細かく分けてかけて加え極限をとる——が必要とされる。[19] したがって，階段関数による近似から無限移行によってはじめて，三角形の面積が運動体の進む距離と対応していることが認められるのである。さらに，この定積分の段階から一般の時刻までに進む距離を変数を用いて表わす不定積分 $\int_0^t atdt$ によって，二次関数 $\frac{1}{2}at^2$ が得られる。不定積分が理解されると，定積分の計算が簡単にできるようになるのである。

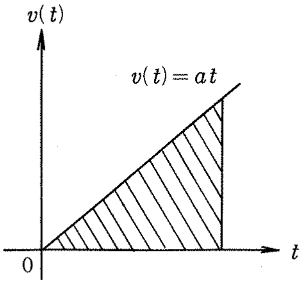


図3

ところで，加速度から速度，速度から距離を求める過程において，速度の概念については明確な規定をしないままに用いてきたが，不定積分によって距離が関数で表わされたことから速度の概念を導くことが可能となった。すなわち，不等速運動における速度 —— 瞬間速度は，時間間隔を小さくしたときの平均速度の極限値であるが，これには任意の時刻における位置を確定できることが必要なのである。ある時刻における瞬間速度から微分係数の概念が得られ，さらに一般の時刻における速度は，導関数 $\frac{dS(t)}{dt}$ によって表わされる。

速度から距離を求める方法が積分法で，距離から速度を求める方法が微分法であれば，これらの演算が互いに逆の演算であることはほとんど自明であろう。実際 $S(t)=\int_0^t atdt=\frac{1}{2}at^2$ であるが，$S'(t)=at$ となるのである。

注

1）ガリレイ，今野武雄，日田節次訳『新科学対話（下）』岩波文庫，1948年，16ページ。
なお，かなづかいを改めた——以下同様。
2）注1），25ページ。
3）注1），25ページ。
4）注1），35ページ。
5）注1），36ページ。

6）ガリレイ，青木靖三訳『天文対話（上）』岩波文庫，1959年，343ページ。
7）注1），36～37ページ。
8）注1），38～39ページ。
9）この追実験が，板倉聖宣『ぼくらはガリレオ』岩波書店，1972年，199～220ページ，等に見られる。
10) 注1），24ページ。
11) 注1），25ページ。
12) 注1），24～25ページ。
13) ニュートン，河辺六男訳「自然哲学の数学的諸原理」（河辺編『世界の名著26ニュートン』中央公論社，1971年）72ページ。
14) 板倉聖宣『科学と方法』季節社，1969年，163ページ。
15) 武谷三男『弁証法の諸問題』勁草書房，1968年，92ページ。
16) 遠山啓『数学入門（下）』岩波新書，1960年，220ページ。
17) 注15），115ページ。
18) ボホナー，村田全訳『科学史における数学』みすず書房，1970年，193ページ。
19) この前提として，等速運動する物体の進む距離が，$v-t$ グラフの下の長方形の面積で表わされることの認識が必要である。

第3章　授業書「二次関数と微積分」

前章までの検討をふまえ，二次関数の指導過程に関するわれわれの仮説としての授業プログラムを作成することが，本章の課題である。前章第2節で，指導過程の基本的な論理構造を設定したが，これはまだ一時間ごとの授業過程まで規定するには至らない。そのためには，生徒の認識活動を組織するための，発問，作業の指示，説明等のレベルにまでおりて，仮説を具体化しなければならないのである。すなわち，概念や法則の論理構造に関する仮説は，それを指導するための手だてに関する仮説と統一的にしか検証され得ないということができる。そして，両レベルの仮説を検証可能なかたちで客観的に対象化したものとしての「授業書」の作成が課題となるのである。

授業書「二次関数と微積分」は，さきに設定した指導過程の基本構造に即して，以下の4つの章に分かれる。

§0　　力と運動
§1　　等加速度運動
§2　　距離を求める ── 積分法と二次関数
§3　　速度を求める ── 二次関数の微分法

授業書にもとづく実験授業は，主要には論理的脈絡の当否の検証が目的であるから，さしあたっての今回の授業書においては，枝葉末節的な内容，発展的な内容，あるいは煩雑な計算問題等は極力はぶくこととし，指導過程の基本構造に関する仮説をできる限りストレートに表わすようにしたい。

それでは，授業書「二次関数と微積分」とその解説にうつっていこう。

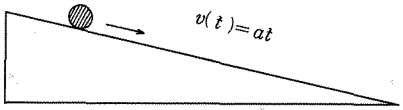
授業書　高校生のための解析学序説

二次関数と微積分

— 等加速度運動の解析を中心に —

（改 訂 版）

$$S(t)=\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + S(t_0)$$



$v(t)=\dfrac{d}{dt}S(t)$　　$S(t)=\dfrac{1}{2}at^2$

1980年　北星学園余市高等学校

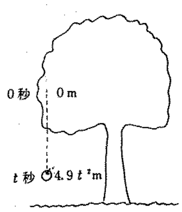
はじめに

自由落下運動する物体が，運動をはじめてから t 秒後までに落下する距離を Sm とすると，

$$S=4.9t^2$$

という式が成り立つ。

では，落下運動がなぜこの二次関数で表わされるのだろうか？このことを正しく解明したのは，アイザック・ニュートン（1642～1727）である。



地球がリンゴを呼んでいる！

そして，ニュートンのこの研究は，彼が生まれた年に亡くなったガリレオ・ガリレイ（1514～1642）の研究を基礎においたからこそ，ゆたかに実ったのである。

そしてまたガリレイは，2000年以上も昔の大哲学者である，アリストテレス（紀元前384～322）の学説にたいして疑いをもち，正しいと信じられていることでも，実験して自分の目で確認するという方法で，アリストテレスの誤りを正し，科学の新しい時代をきりひらいたのであった。

この授業書「高校生のための解析学序説—二次関数と微積分—等加速度運動の解析を中心に」は，落下運動の法則から二次関数 $S=4.9t^2$ を導くなかで，微積分の方法について研究することが目的である。ガリレイの研究の方法にまなび，実験を通して自然の法則を解明していこう！

－ 1 －

〈はじめに〉において，この授業書の目標とするところをあらかじめ生徒に知らせておく。たんに「これから二次関数に入ります」というだけでは，二次関数は中学校でも一応扱われているので，中学校の復習であるかのような印象をもたれかねない。とりくむ意欲を高めるためにも，高校数学のひとつの目標である微積分の内容であることを強調したい。

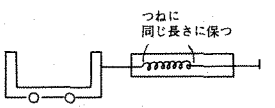
§ 0　力と運動

問題 0 － 1

力学台車を，決まった方向に，つねに一定の力で引っぱると，台車はどのような運動をするか。

ア　速度はどんどん増加する
イ　速度はつねに一定
ウ　速度はどんどん減少する
エ　その他

実験　バネを使って，バネの長さがつねに一定に保たれるようにして引っぱる。

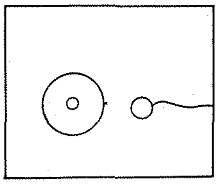


実験の結果，正解は＿＿＿＿

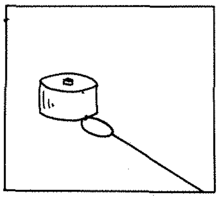
－ 2 －

問題 1 の実験で確認したように，物体に対して一定の方向に一定の力を加えつづけると，物体の速度はどんどん増加する。

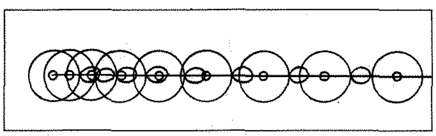
参考までに，同様の実験のストロボ写真をのせておこう。



パックにひっかける前の伸びていない輪ばね。



伸びた輪。輪が一定量だけ伸びているときにはいつでも，同じ力が働いているとみなしうる。



パックを右の方へ引っ張り，それを 10/24 秒間隔で撮った写真。輪がいつも一定量だけ伸びているようにパックには一定の力を加えている。フラッシュが光った各時刻のあいだのパックの変位は写真でわかる。

－ 3 －

問題０－１は，力の連続的な作用が速度の連続的な変化をひきおこすという事実を把握させるための問題である。多くの生徒はここで誤るものと思われるが，常識的な予想をくつがえしてこのことが認識されれば，このイメージが授業書全体を通じてのベースとなろう。実験道具は，教材用の力学台車と，やはり教材用の筒が透明なバネばかりに輪ゴム等の目印を付けたものを用いる。バネの長さの調節もかねて，あらかじめ練習しておけば速さが増加していくことがわかるようにできるだろう。実験の前に予想をたてさせ，それぞれの予想の理由を明らかにしたうえで，できれば討論させたい。[1]実験で結論を出すのであるが，実験を見ただけでは納得しない生徒がいたときのために，同様の実験のストロボ写真[2]を３ページに用意しておいた。なお，速度と速さは別の概念であるが，「加速度」という用語も使用するため，あえて「速度」で通した。

問題０－２

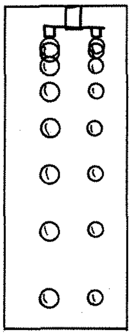
自由落下運動も，速度がどんどん増加する運動であることは，次のストロボ写真からもわかる。自由落下する物体にはそれぞれ重力という力が，地球の中心の方向に，一定の大きさで働いているからである。

さて，右のストロボ写真のように，２kgの物体も，１kgの物体も，同じ落下運動をするのはなぜか。

ア　２kgの物体と１kgの物体に働く重力の大きさは同じだから

イ　２kgの物体に働く重力の大きさは，１kgの物体に働く重力の大きさの２倍だが，２kgの物体を動かすには，１kgの物体を同じように動かすときの２倍の力が必要だから

ウ　その他



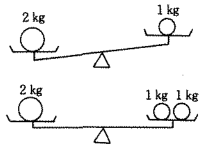
質量の異なる２つの球の同時落下

正解は次のページ＿＿＿＿＿

－４－

問題０－２の正解は イ である。

まず，アが誤りであることは，右図のように２kgの物体に働く重力は１kgの物体に働く重力の２倍であることからわかる。



次に，物体の質量と，物体に加えられる力と，物体が得る速度変化の関係を次の図で説明することができる。力の大きさと方向は矢印で表わされている。

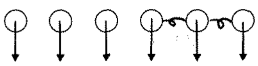
質量：等しい
力　：等しい
同じ運動

質量：２倍
力　：等しい
重い方が遅い

質量：等しい
力　：２倍
力の大きい方が速い

質量：２倍
力　：２倍
同じ運動

したがってイが正しいのであるが，別ないい方をすれば，物質のどの１ｇに対しても働く重力は等しく，同じ運動をする物質をいくらよせあつめても落下運動のしかたは変わらない。



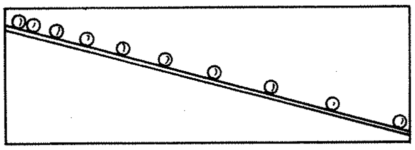
（同じ運動をする物体をひもでつないでも同じ）

－５－

つぎに，自由落下運動もまた力の作用による運動であることを確認したいのであるが，たんにそのことのみを扱うよりも，むしろ問題０－２で，なぜ同時に落下するのかということについて考える中で，重力という概念をより深く捉えることができるのではないだろうか。二次関数とは直接的にはつながらないので，深入りする必要はない。授業では一応同時落下を見せて考えさせる。５ページの説明は，力学台車１台の場合と２台の場合で実験してみるのも良いだろう。重力が作用しつづけることによって落下速度が大きくなっていくことに着目できれば十分である。

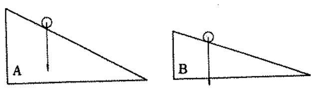
問題０－３

斜面上にボールをおくと，ボールはどんどん速度の増加する運動をする。これもやはり，ボールに力が働いているからである。



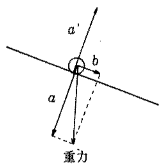
ボールに働いている重力が矢印で示されている。ボールの進行方向に働いている力は斜面Ａ上と斜面Ｂ上とではどちらが大きいか。

ア　斜面Ａ上の方が大きい
イ　等しい
ウ　斜面Ｂ上の方が大きい



注意　面の上にある物体には，物体が面を垂直に押しつけている力と同じ大きさの力が，反対方向に面から加えられている。

正解は次のページの説明より＿＿＿

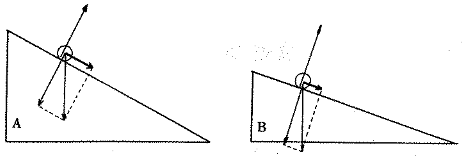


斜面上のボールに加えられている重力は，左図のように斜面に垂直な方向aと，斜面に沿った方向bの２つの力に分解して考えることができる。そして（注意）で述べたように，斜面に垂直な方向の力aは，同じ大きさで反対方向の力a'が斜面から加えられることによって打ち消される。

結局，ボールには斜面に沿った方向の力bだけが働くことになり，この力によってボールは，速度が増加する運動を行なうのである。

力bは，図からもわかるように重力よりも小さいので，自由落下運動よりも，斜面上の運動の方がゆるやかになる。

斜面に沿った方向の力は，作図すればわかるが，斜面の傾きが大きいほど大きい。



したがって，問題０－３の正解は ア。

さらに，斜面上の運動も重力によって速度が増加する運動であることを確認する。そして斜面に沿った方向に作用する力の大きさが重力よりも小さいことから，自由落下運動よりもゆるやかな運動になることに気付かせる。問題０－３は，力の作図が既習でなければ作図の指導に切り替えてもよい。

散策路その０ ── 2000年もまちがっていたアリストテレスの話

紀元前３世紀といえば，キリストもまだ生まれていなかった頃，今からおよそ2300年も昔のことである。ギリシアのアテネに，アリストテレスという哲学者がいた。ものすごい博識家でもあって，世界中のありとあらゆることに関して（と，本人は思っていたのだろう）学説をうちたてた。

ラファエロ作「アテネの学校」
中央右がアリストテレス

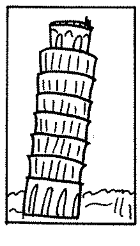
日本でも，数年前に『アリストテレス全集』が刊行されたが，「宇宙論」だとか「動物誌」だとか，「大道徳学」だとか「詩学」だとか，全部で17巻もあり，壮大な体系をなしている。だから一説には，弟子たちの書いたものまで，自分のものにしていたというウワサもあるが，とにかくアリストテレスの学説はその後長い間，ガリレイの出現までは，絶対に正しいものと信じられてきた。

ところでアリストテレスは，この中で「一定の力を加えつづけると物体は一定の速度で運動する」と考えていた。たしかにわれわれの日常経験からは，たとえば荷車をひくときのように，一定の力を加えつづけなければ一定の速度で動かないこともある。

またアリストテレスは，「物体を自由落下させたとき，重いものほど速く落下する」とも考えていた。たしかに紙と鉄とを同時に落下させると，鉄の方がずっと速く落ちることは，これも経験上よく知られている。それでは10ｇの鉄球と，10kgの鉄球とを同時に落下させるときも同じことがいえるのか？このことに対して疑問をもつ人は少なかった。なにしろ大哲学者アリストテレスの学説は，われわれの経験とも，ぴったり一致しているようにみえるのだから………

自分の目で確かめてみないと気のすまないガリレイは，まず次のように考えた。

「１kgの石よりも，２kgの石の方が速く落ちるとする。そうすれば１kgの石と２kgの石を結びつけたものは１kgの石よりも速く落ちるが，２kgの石よりも遅く落ちるはずである。これはおかしい！結びつけたものは３kgになって，２kgの石よりも速く落ちるはずだ」



ピサの斜塔

ガリレイは，「空気抵抗さえなければ，紙も鉄も，同時に落ちるだろう。空気抵抗があっても，同じ物質であれば，たとえば１kgの鉄球と２kgの鉄球は同時に落ちるはずだ。」こう考えたのである。

イタリアのピサに，いつの間にか傾いてしまった塔がある。ガリレイは，この上から質量の異なる物体を同時に落下させる実験を行なったと伝えられている。しかし，自由落下運動は，分析するには

しかし，アリストテレスは まさつ力を考えに入れていなかったのだ。まさつが小さいとき，したがって加える力の方が大きいときには，問題0－1の実験で確認したように，速度はどんどん増加する（加速する）のである。

－ 8 －

ベッゾーリの描いた絵　ガリレイを中心に斜面上の運動の実験を行なっている。中央やや左の背の高い人がガリレイ。

少し速すぎる。そこでガリレイはかわりに斜面上でいろいろな実験を行なったのである…

－ 9 －

このような読み物[3]は，生徒における概念の形成や法則の発見にとって直接的な役割を果たすことはできない。しかし，学びつつある概念や法則が歴史的にはどのように形成されてきたのか，またどのような意義をもっているのか，などといったことがらについて知ることは，みずからの学習を客観化するうえで有効であるように思われる。そのことが意欲や興味，関心を引き出すのである。

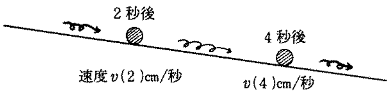
第１節　等加速度運動

§１では，とくに力の作用が常に一定の大きさであるとき，速度変化の割合が一定となることを確認し，加速度概念を指導する。さらに，$v(t)=at$（v：速度，a：加速度，t：時間）と定式化することが課題である。

§１　等加速度運動

問題１－１

斜面上の運動について，２秒後の速度 $v(2)$cm/秒と，４秒後の速度 $v(4)$cm/秒との関係を次の選択肢より選べ。



ア　$v(4)>2v(2)$　（４秒後の速度は，２秒後の速度の２倍より大）

イ　$v(4)=2v(2)$　（４秒後の速度は，２秒後の速度の２倍）

ウ　$v(4)<2v(2)$　（４秒後の速度は，２秒後の速度の２倍より小）

エ　その他　　（　　　　　　　　　　　　　）

＊実験の方法を考えよ

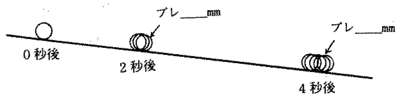
正解は，12ページ＿＿＿＿

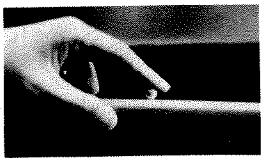
－ 10 －

実　験　風　景

問題１－１は，速度の変化の様子を直接的に考えさせる問題である。実験の方法についても是非考えさせたい。授業では，実験道具として２～３ｍのカーテンレールとパチンコ玉を用意し，２秒後と４秒後のおよその位置を確認し，それぞれを通過する時の（瞬間の）速度を感覚的に比較させればよい。実験の方法を考えさせ，ここでは写真のブレの大きさ[4]で測定することにする。

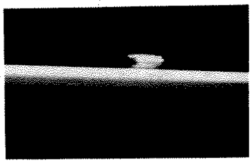
運動する物体を写真にとると，物体の速度の大きさに応じて，写真に“ブレ”が生じる。写真のこのような“ブレ”を利用して，2秒後の速度 $v(2)$ と，4秒後の速度 $v(4)$ を比較してみよう。





○静止の状態
ボールの直径_________mm
ブレの長さ　_________mm

○運動開始2秒後

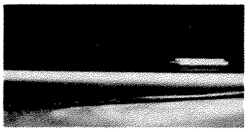


ブレの長さは_________mm

それでは，4秒後にはブレの長さは何mmになっているだろうか？

ア　$v(4)>2v(2)$　の場合………______mm
イ　$v(4)=2v(2)$　の場合………______mm
ウ　$v(4)<2v(2)$　の場合………______mm
エ　その他　　　　の場合………______mm

－ 11 －



○運動開始4秒後
ブレの長さは
_________mm

結局，問題1－1の正解は　イ。

2秒後のボールの“ブレ”は6mm，4秒後の“ブレ”は__mmであった。したがって $v(4)=2v(2)$ であることがいえるが，いいかえればこの運動は，はじめの2秒間の速度の増加と，次の2秒間の速度の増加が等しい。

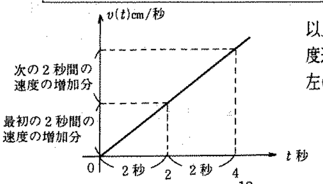
時間 $\Delta t=$　2　2

時刻　t　秒	0……2……4……
速度　$v(t)$　cm／秒	0…$v(2)$…$2v(2)$…

速度変化 $\Delta v(t)=$　$v(2)$　$v(2)$

定義　1

一定時間に一定の速度変化をする（$\Delta t=$一定のとき $\Delta v(t)=$一定である）運動を 等加速度運動 という。



以上のことから，等加速度運動の v-t グラフは，左のように直線になる。

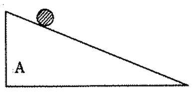
－ 12 －

まず11ページを配り，静止と2秒後のブレを測定させて，4秒後のブレの大きさを予想させる。そのあとで12ページを配るのである。「時間が2倍で速度も2倍」というよりも，「次の2秒間でまた6ミリ分増える」ということを強調したい。後者を等加速度運動の定義に用いるのである。

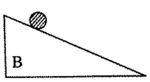
問題 1 － 2

2つの斜面がある。同じボールを使って実験すると，次の結果を得た。どちらが急な斜面といえるか。

斜面A上では，ころがりはじめてから5秒後に，60cm／秒の速度になった。



斜面B上では，ころがりはじめてから4秒後に，50cm／秒の速度になった。



ア　斜面Aの方が急である
イ　斜面の傾きは，どちらも同じ
ウ　斜面Bの方が急である

（計算）

等加速度運動について，速度の増加のしかたの大きさは，単位時間（1秒，1時間など）あたりの速度の増加分で比較することができる。

定義　2

等加速度運動において，単位時間あたりの速度の増加分を 加速度 という。
加速度の大きさを a で表わすと

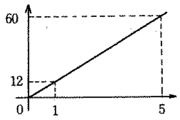
$$加速度=\frac{速度の増加分}{時間の増加分}\left(a=\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}\right)$$

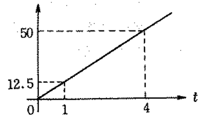
＊ a はacceleration(加速度)の略

したがって，問題1－2で，

斜面A上での加速度　$a=\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}=\frac{60}{5}=12$

斜面B上での加速度　$a=\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}=\frac{50}{4}=12.5$





正解は＿＿＿＿

この場合の加速度の単位は

$$\frac{\text{速度の増加分の単位}}{\text{時間の増加分の単位}}$$

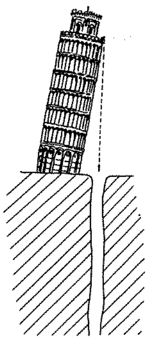
$$=\frac{\text{cm/秒}}{\text{秒}}=\text{cm/秒}\div\text{秒}=\frac{\text{cm}}{\text{秒}}\times\frac{1}{\text{秒}}=\frac{\text{cm}}{\text{秒}^2}=\text{cm／秒}^2$$

＊cm/秒² は，センチメートル毎秒毎秒と読む。

問題１－２は，加速度を定式化するための問題である。はじめから $\text{加速度}=\dfrac{\text{速度変化}}{\text{時間}}$ とするのではなく，単位時間あたりの速度変化を求めることが必要となるように，どちらの斜面が急であるかという問題設定にした。

問題１－３

定義２より加速度とは，単位時間（１秒間など）あたりに増加する速度の大きさであった。



地球上における自由落下運動の加速度（重力加速度ともいう）は，測定により，ほぼ9.8m/秒²であることが知られている。

物体が落下をはじめてから t 秒後の速度を $v(t)$m/秒とすると，

ア　$v(t)=9.8$
イ　$v(t)=t+9.8$
ウ　$v(t)=9.8t$
エ　$v(t)=9.8t^2$
オ　その他（$v(t)=$　　　　　）

正解は＿＿＿＿＿

（注）重力加速度の実測値

東京天文台編『理科年表』1978年版より

札幌	9.8047757m/秒²
東京	9.7976319m/秒²
パリ	9.8092597m/秒²
南極	9.825256 m/秒²
標準	9.80665 m/秒²

０秒後の速度が０m/秒で，１秒ごとに9.8m/秒ずつ速度が増加していくのであるから，下の対応表ができる。

時間の増加分 $\Delta t=$		1		1		1		1				
時刻 t 秒	0		1		2		3		4	…	t	…
速度 $v(t)$ m/秒	0		9.8		19.6		29.4		39.2	…		……
速度の増加分 $\Delta v(t)=$		9.8		9.8		9.8		9.8				

したがって，$v(t)=9.8t$ である。問題１－３の正解は　イ。

加速度を a とすると，定義１より　$a=\dfrac{\Delta v(t)}{\Delta t}$

したがって，$\Delta v(t)=a\Delta t$。

この式は，速度の増加分＝加速度×時間の増加分　を意味しているから，

定理　１

物体が，加速度 a m/秒² の等加速度運動を開始してから t 秒後の速度を $v(t)$ m/秒とすると，

$v(t)=at$

問題１－３で，速度＝加速度×時間 より $v(t)=at$ を導く。生徒の状況に応じて，２秒後，３秒後は？というような補助発問を加えてもよいだろう。また，余裕があれば時刻の基準をずらして $v(t)=at+v_0$ と，一次関数を求めたい。

問題１－４

自由落下運動する物体の，落下をはじめてから t 秒後の速度を $v(t)$m/秒とすると $v(t)=9.8t$ である。

(1)　０秒後の速度 $v(0)$，６秒後の速度 $v(6)$，12秒後の速度 $v(12)$ を，それぞれ求めよ。

$v(0)=$

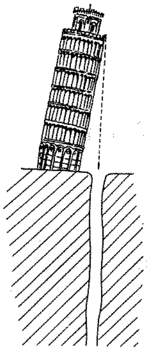
問題１－４は，$v(t)=9.8t$ という式の意味（速度＝加速度×時間）を考えて，

(1)　$v(0)=9.8\times0=0$，$v(6)=9.8\times6=58.8$，
　　$v(12)=9.8\times12=117.6$

(2)　$83=9.8t$，$t=83\div9.8\fallingdotseq8.5$…………… 約8.5秒後

(3)　$300=9.8t$，$t=300\div9.8\fallingdotseq31$………… 約31秒後

散策路その１ ── 力と加速度の話



$v(6)=$
$v(12)=$

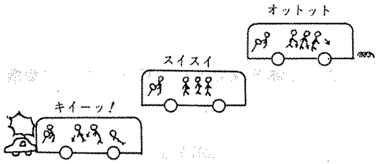
(2) 新幹線ひかり号の最高速度は，約83m/秒(約300km/時)である。落下運動する物体が，これと同じ速度になるのは，落下をはじめてから，およそ何秒後か。

(3) また，ジェット機の速度約300m/秒(約1000km/時）と同じになるのは，およそ何秒後か。

— 17 —

まず，次の問題について考えてみよう。

バスや列車が等速直線運動をつづけているときには，乗っていても力を感じることはないが，エンジンをふかして加速したり，ブレーキをふんでスピードを落としたりして，バスや列車が速度を変化させるときには，乗っている人は，体に力を感じる。



さて，2台のバスが，加速ついての性能くらべをした。
A社のバスは，発車してから12秒後に，27.6m/秒の速度に達した。B社のバスは，発車してから16秒後に，35.2m/秒の速度に達した。ともに，等加速度運動だったとして，加速度をもとめ，加速の性能をくらべよ。

— 18 —

A社のバスの加速度

$$a=\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}=\frac{27.6\text{m/秒}}{12\text{秒}}=2.3\text{m/秒}^2$$

B社のバスの加速度

$$a=\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}=\frac{35.2\text{m/秒}}{16\text{秒}}=2.2\text{m/秒}^2$$

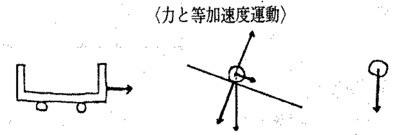
物体に加えられる力が大きいほど，加速度の大きさも大きい。

左の写真は，ロケット出発時の，宇宙飛行士の顔である（訓練時)。
ロケットを宇宙へ送り出すためには，自動車の急発進などとは，比べものにならないほど大きな加速度が必要であり，それだけに大きな力が必要とされるのである。

〈加速度計〉

バスや列車の「つり皮」を注意してみよう。発車や停車のとき，「つり皮」はゆれるが，そのゆれる方向と，ゆれ方の大きさが，加速度の向きと大きさを表わしている。

〈力と等加速度運動〉



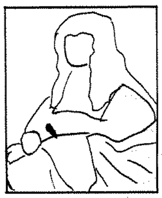
物体に力を加え続けるとき，運動の速度は変化し続ける。とくに加え続けられる力の大きさが一定であるとき，物体は等加速度運動をする。

— 19 —

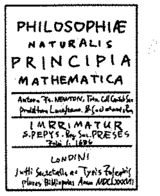
力と加速度の関係については，ガリレイも気づいてはいたが，まだはっきりしたものではなかった。この，力と運動との関係を正しく捉えたのは，ガリレイが亡くなった年（1642年）に生まれたニュートンである。

力の大きさが2倍になれば，加速度も2倍になる。しかし，力の大きさをそのままにして物体の質量を2倍にすれば，加速度は$\frac{1}{2}$になる（5ページ参照)。

逆にいえば，ニュートンは，物体の運動に変化をひきおこすものが力であると考えたのである。それまでは，力ははっきり定義されていなかった。このニュートンの業績をたたえて，1kgの物体に1m/秒^{2}の加速度をひきおこす力の大きさを1ニュートンと決め，これが現在の力の単位になっている。



ニュートン(1642～1727)



ニュートン著『プリンキピア』のとびら

運動の解析は，このあと，力や質量などについては物理で(力学)，加速度，速度，距離については数学で（微積分）研究していくことになる。

さて，問題1－4で，物体が落下運動をはじめてから約31秒後には，ジェット機の速度にほぼ等しい速度となることがわかった。では，そのときまでに物体は，どれだけの距離を落下しているのだろうか？

— 20 —

$v(t)=at$の式から等加速度運動の状態をよみとるためには，少なくとも問題1－4程度

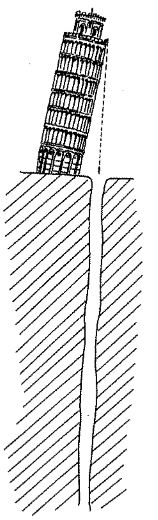
は必要であろう。散策路その１で，力と速度変化の関係を再確認しておきたい。

第２節　距離を求める——積分法と二次関数

等加速度運動をする物体の進む距離を求めるという課題の中で，積分法の基本的な考え方を指導することが§２の目標である。

§２　距離を求める——積分法と二次関数

問題２－０



空気抵抗を無視すれば，自由落下運動する物体は，落下をはじめてから10秒後までに約 500 m の距離を落下する（厳密には約490m）。

それでは，30秒後までには，およそ何ｍの距離を落下すると思うか。

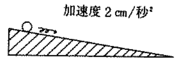
ア　約1500m
イ　約3000m
ウ　約4500m
エ　約6000m
オ　それ以上

－ 21 －

問題２－０は，実験で確認することは困難である。実は，この問題の解法について考えていくのが§２の課題である。まず，次の問題から考えていこう。

問題２－１

加速度２cm/秒² で斜面をころがり落ちる物体は，運動をはじめてから10秒後までに，何cmの距離を進むか。

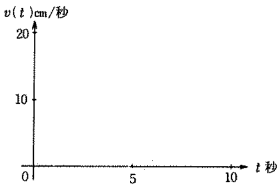


(1)　対応表を完成せよ。また，$v(t)$ を t の式で表わせ。

時刻　t　秒	0，1，2，5，7，7.5，8，10，……………
速度　$v(t)$cm/秒	0，

$v(t)=$

(2)　この運動について，(1)を参考にして v-t グラフを書け。



(3)　この物体が，時刻０～10秒の間にころがり落ちる距離を求めよ。

－ 22 －

問題２－１の解

(1)　加速度が２cm/秒² だから，

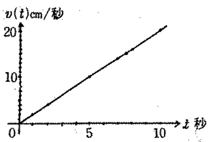
１秒後：２cm/秒²×１秒＝２cm/秒
２秒後：２cm/秒²×２秒＝４cm/秒
５秒後：２cm/秒²×５秒＝10cm/秒
７秒後：２cm/秒²×７秒＝14cm/秒
7.5秒後：２cm/秒²×7.5秒＝15cm/秒
８秒後：２cm/秒²×８秒＝16cm/秒
10秒後：２cm/秒²×10秒＝20cm/秒
⋮　⋮　⋮　⋮

したがって対応表は下のようになる。

時刻　t　秒	0，1，2，5，7，7.5，8，10，…………………
速度　$v(t)$cm/秒	0，2，4，10，14，15，16，20，…………………

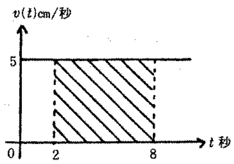
t 秒後の速度を $v(t)$ cm/秒とすると　$v(t)=2t$

(2)　この運動の v-t グラフは下のようになる。

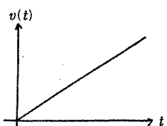


v－tグラフと，物体の進む距離

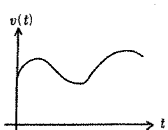
等速運動する物体が進む距離は，v-t グラフと t 軸との間の面積で表わされる。たとえば，5cm/秒の速度で等速運動する物体が，2～8秒の６秒間に進む距離は，右図の斜線の部分（長方形）の面積（５×６＝30）で表わされる。これは，速度×時間＝距離であることによる。



しかし，等加速度運動などのように，速度が一定ではない運動（不等速運動という）の場合は，進む距離を，単純に速度×時間で求めることはできない。



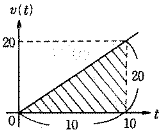
等加速度運動



一般の不等速運動

これらの場合については，問題２－２を参考にして考えてみよう。

(3) 結論を先にいえば，0～10秒の間に進む距離は，0から10までの $2t$ の積分（0から10までの v-t グラフと t 軸の間の面積で表わされている）で，100cmである。
　では，その理由は……………？



－ 23 －

－ 24 －

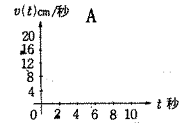
問題２－０は§２全体を通じての課題を知らせることがねらいである。したがってこの段階では，予想をたて，討論するにとどまる。この問題について考えるための素材として，問題２－１では，速度－時間グラフ（v-t グラフ）を提供する。(3)まで理解される必然性はないので，これはわからなくてもかまわない。とりあえず v-t グラフの下の面積が進む距離を表わしていることを知らせ，その理由を考えてみようということにする。24ページでは，等速運動の場合は，速度×時間＝距離　と，たて×よこ＝面積　とが対応していることから，不等速運動の場合も，v-t グラフの下の面積が距離を表わすようだと，類推させたい。しかし，その理由を考えるのが指導目標であるから，まだ結論はださない。

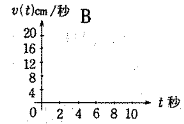
問題２－２

２つの物体が，それぞれ次のような運動をした。

物体 A	物体 B
時刻0～2秒：0cm/秒の等速運動	時刻0～2秒：4cm/秒の等速運動
時刻2～4秒：4cm/秒の等速運動	時刻2～4秒：8cm/秒の等速運動
時刻4～6秒：8cm/秒の等速運動	時刻4～6秒：12cm/秒の等速運動
時刻6～8秒：12cm/秒の等速運動	時刻6～8秒：16cm/秒の等速運動
時刻8～10秒：16cm/秒の等速運動	時刻8～10秒：20cm/秒の等速運動

(1) それぞれの運動について，v-t グラフを書け。





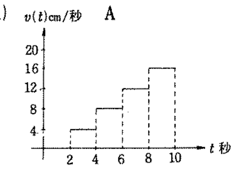
(2) それぞれの運動について，時刻0～10秒の間に物体が進んだ距離を求めよ。また，その距離は，v-t グラフのどこに表わされているか。

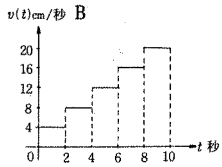
(3) この問題は，問題２－１（23ページ）と，どのような関係になっているか？

－ 25 －

問題２－２の解

(1)





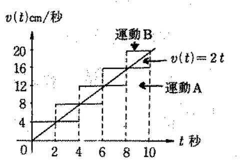
(2)

$0\times2+4\times2+8\times2+12\times2+16\times2$
$=0+8+16+24+32$
$=80$ (cm)

$4\times2+8\times2+12\times2+16\times2+20\times2$
$=8+16+24+32+40$
$=120$ (cm)

v-t グラフの下の階段形の面積が，運動する物体の進む距離を表わしている。

(3) 問題２－１の等加速度運動 $v(t)=2t$ を，小区間ごとの等速運動で，下と上から近似したのが，運動Aと運動Bである。



　各時刻における速度は
運動A≦$v(t)=2t$≦運動B
したがって，同じ時間に進む距離は
運動A≦$v(t)=2t$≦運動B
80cm ≦　　　≦ 120cm
ということがわかる。

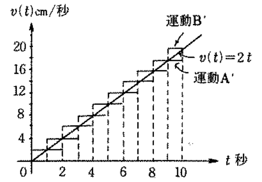
－ 26 －

さらに考えさせるための素材として，問題２－２で小区間ごとの等速運動――階段関数で，不等速運動――連続関数を近似する方法を提供する。80と120の間ということがわかれば，よりくわしく求める方法はないか，考えさせたい。すなわち，時間の間隔を小さくして近似すれば上下の幅が小さくなることに気付かせたいのである。

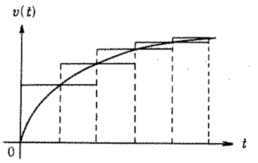
運動Aと運動Bよりも，もっと等加速度運動に近似させるため，時間の間隔をもっと小さく分割してみよう。

練習問題

下の v-t グラフで表わされる運動A′と運動B′について，0～10秒の間に進む距離を計算せよ。



（注意） 等加速度運動の場合は，進む距離は，下からの近似値と上からの近似値のちょうど中間の値になる。
しかし，一般の不等速運動の場合には，かならずしもそうはいかないことが，下のグラフからも推測できるだろう。

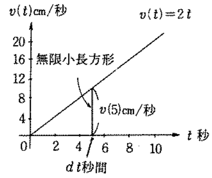


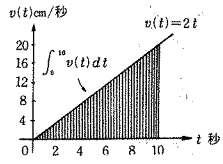
不等速運動は，どんな短い時間の間にも速度が変化するが，それでも，無限に小さい時間の間は等速運動をしていると考えられる（速度の変化も無限に小さいから）。

たとえば，$v(t)=2t$ の等加速度運動で，時刻5秒から無限小時間 dt 秒後までの速度は $v(5)$cm/秒（=10cm/秒）で一定であると考えられる。したがってこの dt 秒間に進む距離は，

$v(5)$cm/秒 × dt 秒 = $v(5)dt$cm

で，この大きさは，図の無限小長方形の「面積」で表わされている。





0～10秒の間に進む距離は，この時間内のすべての $v(t)dt$ の合計（総和 sum）であるから，これを

$$\int_0^{10} v(t)dt$$

と書き，「インテグラル，0から10までの $v(t)dt$」と読む。

$v(t)$ の積分と言っても良い。そしてこれは，無限小長方形の面積の総和＝v-t グラフの下の三角形の面積で表わされている。（＊$\int$ はsum（総和）のSである。昔はSを $\int$ と書いた。）

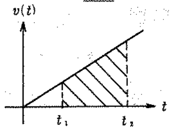
ゆえに，$\int_0^{10} v(t)dt=100$

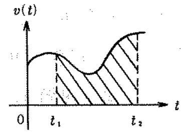
もちろん，$v(t)$ がちがう関数のときは，$\int_0^{10} v(t)dt$ の値もちがってくる。上の場合，$v(t)=2t$ だから $\int_0^{10} v(t)dt=\int_0^{10} 2tdt=20\times10\times\frac{1}{2}$ $=100$ なのである。

27ページの練習問題で，1秒間隔での近似が，90から110の間と求められることなどから，v-t グラフの下の面積が進む距離を表わすことが，ほぼ納得されるだろう。余裕があれば，0.5秒間隔で95～105と求めてもよい。ここで補助発問として，時間間隔をどんどん細かくしていくときの階段形の形，および個々の長方形の形がどのようになっていくか考えさせれば，28ページの説明もわかりやすくなるだろう。この説明では「無限小時間」を実体的なものとして扱っている。極限の指導を前提とせずに微積分を教えるとすれば，入門の段階では積分記号がつくり出された際にもっていた意味を知らせるにとどめるのも，ひとつのあり方と考えるからである。

定義　3

関数 $v(t)$ に対して $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ を，$v(t)$ の t_1 から t_2 までの定積分という（単に積分ともいう）。





計算練習

v-t グラフを参考にしながら，次の定積分の値を求めよ。

計算練習の解

① $\int_0^0 2tdt=0\times0\times\frac{1}{2}=0$

② $\int_0^1 2tdt=2\times1\times\frac{1}{2}=1$

③ $\int_0^2 2tdt=4\times2\times\frac{1}{2}=4$

④ $\int_0^3 2tdt=6\times3\times\frac{1}{2}=9$

⑤ $\int_0^{20} 2tdt=40\times20\times\frac{1}{2}=400$

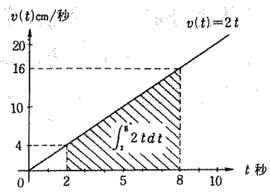
発展問題の解

$\int_2^8 2tdt$

$=\int_0^8 2tdt-\int_0^2 2tdt$

$=16\times8\times\frac{1}{2}-4\times2\times\frac{1}{2}$

$=64 \qquad -4$



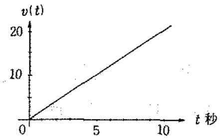
① $\int_0^0 2\,t\,dt=$

② $\int_0^1 2\,t\,dt=$

③ $\int_0^2 2\,t\,dt=$

④ $\int_0^3 2\,t\,dt=$

⑤ $\int_0^{20} 2\,t\,dt=$



発展問題

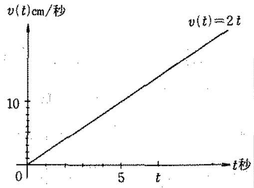
$\int_2^8 2t\,dt=$

― 29 ―

$=60$（台形の面積として求めてもよい）

問題２－３

等加速度運動 $v(t)=2t$ について，一般的に時刻 $0\sim t$ 秒の間に進む距離（これを $S(t)$ cmとする―― S：situation）を求めよ。



$S(t)=\int_0^t 2t\,dt=$

― 30 ―

定積分を定義し，29ページの計算練習で積分記号に慣れさせる。進む距離から定積分の概念を定義したので，ここではまだ距離のイメージを利用して定積分を求めることになる。距離が v-t グラフの下の面積で表わされることが理解できれば，面積として定積分を考えてゆけばよいのである。問題２－３は，定積分の上端を変数とすることにより，不定積分を考えさせることがねらいである。これも，三角形の面積として求めてよい。$\int_0^t 2t\,dt=t^2$ と求めたら，次ページへの橋わたしとして「この結果を使って29ページの計算がもっと簡単にできないだろうか」と問いたい。

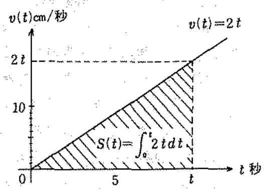
問題２－３の解

t 秒後の速度は，一般的に $v(t)=2t$ であるから，「三角形の面積」は

$2t\times t\times\frac{1}{2}=t^2$

したがって

$S(t)=\int_0^t 2t\,dt=t^2$



この結果を使えば，29ページの計算問題は，いちいち三角形の面積を計算しなくても解は求められる。つまり，

$S(0)=\int_0^0 2t\,dt=0^2=0$

$S(1)=\int_0^1 2\,t\,dt=1^2=1$

$S(2)=$

$S(3)=$

$S(20)=$

また，$\int_2^8 2\,t\,dt=\int_0^8 2\,t\,dt-\int_0^2 2\,t\,dt=8^2-2^2=64-4=60$

計算練習

① $\int_1^2 2\,t\,dt=$

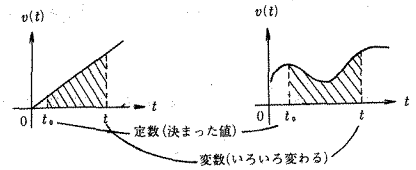
② $\int_2^3 2\,t\,dt=$

③ $\int_3^4 2\,t\,dt=$

定義　４

関数 $v(t)$ に対して，$S(t)=\int_{t_0}^t v(t)\,dt$ を，$v(t)$ の不定積分という。

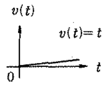
（t_0 は定数）



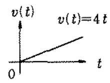
計算練習

問題２－３の解法（31ページ）を参考にして，次の不定積分を求めよめよ。

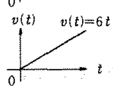
① $\int_0^t t\,dt=$



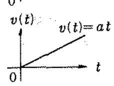
② $\int_0^t 4\,t\,dt=$



③ $\int_0^t 6\,t\,dt=$



④ $\int_0^t at\,dt=$



発展問題

− 31 −

$\int_6^t 2\,t\,dt=$

− 32 −

31ページでは，定積分と不定積分の関係について説明し，実際に不定積分 —— 二次関数に上端の値を代入させる。不定積分を定義し，計算練習①〜③で具体的な正比例関数の不定積分，④で一般の正比例関数の不定積分，さらに発展問題では下端を０でない値として二次関数の定数項のあるものを求めさせる。

計算練習の解

① $\int_0^t t\,dt=t\times t\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}t^2$

② $\int_0^t 4\,t\,dt=4t\times t\times\frac{1}{2}=2t^2$

③ $\int_0^t 6t\,dt=6t\times t\times\frac{1}{2}=3\,t^2$

④ $\int_0^t at\,dt=at\times t\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,at^2$

発展問題の解

$$\int_6^t 2t\,dt=\int_0^t 2t\,dt-\int_0^6 2t\,dt=2\,t\times t\times\frac{1}{2}-12\times 6\times\frac{1}{2}$$
$$=t^2-36$$

正比例関数(一般に一次関数)の不定積分は二次関数になる！

研　究

自由落下運動の加速度は9.8m/秒²であった。したがって，落下をはじめてから t 秒後の速度を $v(t)$m/秒とすると，$v(t)=9.8t$である。

① 落下をはじめてから，t 秒後までに落下する距離を $S(t)$m とすると，
$$S(t)=\int_0^t 9.8\,t\,dt=$$

② 落下をはじめてから，10秒後までに落下する距離を $S(10)$m とすると，
$$S(10)=\int_0^{10} 9.8\,t\,dt=$$

③ 落下をはじめてから，30秒後までに落下する距離を $S(30)$m とすると，
$$S(30)=\int_0^{30} 9.8\,t\,dt=$$

④ ①で求めた $S(t)$の式に，$t=10$，$t=30$をそれぞれ代入して，②および③の結果と照らしてみよ。

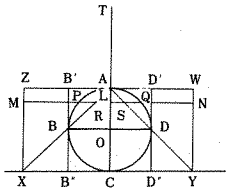
$S(10)=$

$S(30)=$

☆ 問題２−０の正解は ……… ！！！

− 33 −

散策路その２ —— 求積法から積分法へ



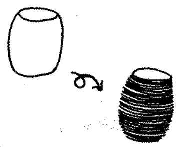
(球の体積が $\frac{4}{3}\pi r^3$ であることの証明にアルキメデスが用いた図)

積分法の起源は古く，ギリシア時代にはすでに，アルキメデス（紀元前287年〜212年）は図形の面積や体積を求める際に積分的方法を用いている。球の表面積や体積を求めたのも，この方法によってのことである。

しかし「無限小の大きさを無限個たしあわせる」という求積法は「無限」についての説明が困難であること。また「無限」に対する恐れなどから，その後の発展はしばらくとだえてしまった。

それは，物質はすべて，それ以上は分割できない粒子から構成されているると主張する「原子論」がなかなかうけ入れられなかったことも関連している。

近代にはいって，自然科学と産業の発展は，数多くの曲線図形の長さ，面積そして体積を求める問題の解決を数学者に要請した。17〜18世紀のことであった。「無限小」の大きさが存在するかどうかなどという議論は何も生みだすことがなく，むしろ，「無限小」を大胆に使用することによって様々な図形の面積や体積が求められた。



たとえば，ケプラー（1571〜1630はぶどう酒樽の体積を求める方法について『酒樽求積法』という本を書いたが，ケプラーは酒樽を「厚さ無限小の円板の集まったもの」と考えることによって体積を求めたのである。

− 34 −

しかし，これだけなら単なる求積法にすぎない。これから，さらに積分学へと発展するには，もうひとつ重要な要素が必要であった。それは，曲線図形の面積を求める方法と，不等速運動する物体が進む距離を，速度から求める方法とが同じものであるということを知ることである。

このことにはじめて気付きかけたのは，

動く物体が持つ運動量〔momento〕もまた，加速度運動の場合には三角形ＡＥＢの増大する平行線によって表わされるし，一様な運動の場合に

§２　計算練習

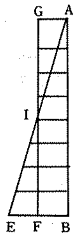
1　$\int_0^t at\,dt=\frac{1}{2}at^2\left(=\frac{a}{2}t^2\right)$であることから，次の不定積分を求めよ。

① $\int_0^t 10\,t\,dt=$　　② $\int_0^t 12\,t\,dt=$

③ $\int_0^t 7\,t\,dt=$　　④ $\int_0^t 2\,t\,dt=$

ガリレイ（1564～1642）であろう。『新科学対話』の中でガリレイは，等加速度運動する物体が進む距離を，苦心して右のように求めている。図は v-tグラフの一種で，文中の「運動量」とは，各瞬間＝無限小時間に進む距離を意味していると思われる。結局，三角形の面積が進む距離を表わしていると言いたいのだが，ガリレイは注意深く，「進む距離＝三角形の面積」と言い切ってはいない。

は，長方形GB〔GFBA〕内の平行線によって表わされる。なぜなら，加速度運動の最初の部分で不足する運動量（その運動量の不足は，三角形AGI内の平行線によって表わされる）は，三角形IFE内の平行線によってつくられる運動量でつくられているからである。従って，2つの物体のうち1つは静止から出発して一様な加速度で動き，他方は一様な速度で，加速度運動のときの最大運動量の半分の運動量で動くとき，両者は等しい距離を等しい時間で通過する，ということは明らかである。



（ガリレオ・ガリレイ『新科学対話』1638年　イタリア）

ガリレイ以後，数学における文字とグラフの使用（デカルト）ケプラー等の求積法の発展，さらに自然科学，とくに力学の発展をふまえて，距離から速度を求める方法＝微分法と結びついて，ニュートンとライプニッツの2人が，それぞれ独立に，微積分学を確立した。

第3章では，いよいよ微分法に入っていく。

－ 35 －

⑤ $\int_0^t t\,dt=$　　⑥ $\int_0^t kt\,dt=$（kは定数）

2　$\int_0^t 6t\,dt=3t^2$であることから，次の定積分を求めよ。

① $\int_0^4 6t\,dt=$　　② $\int_0^3 6t\,dt=$

③ $\int_0^2 6t\,dt=$　　④ $\int_0^1 6t\,dt=$

⑤ $\int_0^0 6t\,dt=$　　⑥ $\int_0^p 6t\,dt=$（pは定数）

3　次の定積分の値を計算せよ。

① $\int_0^5 8t\,dt=$　　② $\int_0^3 2t\,dt=$

③ $\int_0^4 10t\,dt=$　　④ $\int_0^1 14t\,dt=$

⑤ $\int_0^6 t\,dt=$

4　t秒後の速度を$v(t)$cm/秒とすると，$v(t)=4t$となる等加速度運動で，次の時間内に物体が進む距離$S(t)$cmを求めよ。

① 0～t秒　$S(t)=\int$　　② 0～1秒

③ 0～2秒　　④ 0～3秒

⑤ 0～4秒　　⑥ 200cm進むのは何秒後か？

33ページの〈研究〉では計算練習もかねて問題2－0の解を求める。〈計算問題〉は，本来〈研究〉の前に位置付けるべき問題で，一般に正比例関数 $v(t)=at$ について $\int_0^t at\,dt=\frac{1}{2}at$ であること，および $\int_a^b v(t)\,dt=\int_a^c v(t)\,dt+\int_c^b v(t)\,dt$ という法則さえ知っていれば，すべての正比例関数についての不定積分，さらには定積分が求められることを，実際に計算させて確認したい。

第3節　速度を求める——二次関数の微分法

§3においては，速度の概念について微分法を通じて指導することが中心的な課題である。無限小時間における平均速度としての瞬間速度を求めることにより，微分係数や導関数が指導される。

§3　速度を求める——二次関数の微分法

われわれはこれまで，§1では速度から加速度を，§2では速度から距離を，それぞれ求めてきた。§3では，速度を求める方法を考えていくことにしよう。

「速度の求め方」といえば，速度＝距離÷時間　の公式が思い出されるだろう。もちろん，等速運動の場合には，たとえば10秒間に500m進めば

速度$=\dfrac{500\text{ m}}{10秒}=$50m/秒

と求められ，いつでも50m/秒の速度で運動していることがわかる。

平均速度と瞬間速度

不等速運動の場合，3秒後までに進む距離が$S(3)=9$cm，4秒後までに進む距離が$S(4)=16$cmであれば，この1秒間に進む距離は

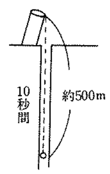
	$\Delta t=1$
時刻　t　秒	0，1，2，3，4，5…
距離　$S(t)$cm	0，1，4，9，16，25
	$\Delta S(t)=7$

16cm－9cm＝7cm

で，等速運動ではないのだが，一応

$\dfrac{進んだ距離}{かかった時間}=\dfrac{7\text{ cm}}{1秒}=7$ cm/秒

と求めて，これを，3秒後から4秒後までの1秒間の平均速度と



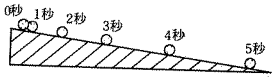
しかし，落下運動する物体は，10秒間に約500m落下するが，1秒後の速度＝9.8m/秒
2秒後の速度＝19.6m/秒………
10秒後の速度＝98m/秒と，速度はどんどん変化しつづける。ここでは，落下運動などの不等速運動について，速度の求め方を考えていくのである。

問題3－0

t秒後までに進む距離を $S(t)$cmとするとき，$S(t)$がtの二次関数 $S(t)=t^2$ で表わされる不等速運動（この場合は等加速度運動）の，ちょうど3秒後の速度を予想せよ。

ア 3cm/秒
イ 5cm/秒
ウ 6cm/秒
エ 7cm/秒
オ 9cm/秒
カ その他（ cm/秒）

$S(t)=t^2$



時刻 t 秒	0，1，2，3，4，5……
距離 $S(t)$cm	0，1，4，9，16，25……

いう。これに対して，3秒後かっきりの速度を3秒後の瞬間速度という。

問題3－0は「瞬間速度」を求める問題であり，この方法を考えるのが§3の課題である。

まず，平均速度から入っていこう。

練習問題

各時間内の，平均速度を求めよ。

(1) 0～3秒

$v=\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=$

$S(t)=t^2$

Δt

時刻 t 秒	0	3	5	8	10 …
距離 $S(t)$cm	0	9	25	64	100…

$\Delta S(t)$

(2) 3～5秒

(3) 5～8秒

(4) 8～10秒

問題3－0は，§3を通じて考えていくことを示すための問題である。したがって問題2－0と同様，すぐに解が得られるわけではない。選択肢は，ア：9cm÷3秒，イ：2～3秒の平均速度，ウ：正解，エ：3～4秒の平均速度，オ：$S(3)$の値（3秒後までに進む距離）として設定した。ウを選ぶ理由としては，イとエの中間値であることしか手がかりはないように思われる。0～6秒の平均速度を思いつかないように対応表は5秒までしか書いていない。いずれにせよ，討論が起これば十分であり，この問題の解法を考えることが§3の課題であることを強調しておく。37ページでは，速度といわれるものには，平均速度と瞬間速度とがあることを説明し，平均速度を求める練習をする。この練習問題は簡単なわり算であるが，$\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}$の記号に慣れさせるという目的ももたせている。次ページへつなげるための補助発問として，3秒後かっきりの瞬間速度の求め方を考えさせるのもよいだろう。

練習問題の解

(1) $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{9\text{cm}}{3\text{秒}}=3\text{cm/秒}$

(2) $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{16\text{cm}}{2\text{秒}}=8\text{cm/秒}$

(3) $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{39\text{cm}}{3\text{秒}}=13\text{cm/秒}$

(4) $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{36\text{cm}}{2\text{秒}}=18\text{cm/秒}$

Δt	3	2	3	2	
t 秒	0，	3，	5，	8，	10…
$S(t)$cm	0，	9，	25，	64，	100…
$\Delta S(t)$	9	16	39	36	

平均速度を使って，3秒後の瞬間速度の，およその値を推測していこう。

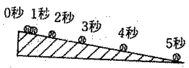
問題3－1

t秒後までに進んだ距離 $S(t)$cmが，

$S(t)=t^2$

で表わされる等加速度運動について，以下の問いに答えよ。

$S(t)=t^2$



問題3－1(1)，(2)の解

(1) 3秒後から3.1秒後までの，0.1秒間の平均速度

$$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\frac{0.61}{0.1}=\frac{0.61}{0.10}=\frac{61}{10}=6.1\,(\text{cm/秒})$$

$S(t)=t^2$

Δt	0.1
t	…3，3.1…………
$S(t)$	…9，9.61…………
$\Delta S(t)$	0.61

(2) 3秒後から3.01秒後までの0.01秒間の平均速度

$$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\frac{0.0601}{0.01}=\frac{0.0601}{0.0100}=\frac{601}{100}=6.01\,(\text{cm/秒})$$

$S(t)=t^2$

Δt	0.01
t	…3，3.01…………
$S(t)$	…9，9.0601…………
$\Delta S(t)$	0.0601

(1) 3秒後から3.1秒後までの，0.1秒の平均速度を求めよ。

	Δt
t	…3，3.1，……
$S(t)$	…　，　………
$\Delta S(t)$	

(2) 3秒後から3.01秒後までの，0.01秒間の平均速度は，(1)で求めた0秒間の平均速度と比べて，どの位か予想せよ。

ア $\frac{1}{10}$より少し小さい
イ $\frac{1}{10}$
ウ $\frac{1}{10}$より少し大きい
エ 同じより少し小さい
オ 同じ
カ 同じより少し大きい
キ その他
（　　　　　　）

正解は＿＿＿＿＿

＊問題3－1 (2)の解は エ

(距離は$\frac{1}{10}$より少し小さくなるが
時間も$\frac{1}{10}$になるので)

(3) 3秒後から3.001秒後までの，0.001秒間の平均速度を求めよ。

$S(t)=t^2$

	Δt
t	……　3，3.001 ……
$S(t)$	……
$\Delta S(t)$	

(4) 2.999秒後から3秒後までの，0.001秒間の平均速度を求めよ。

$S(t)=t^2$

	Δt
t	……　2.999，3 ……
$S(t)$	……
$\Delta S(t)$	

$*2.999^2=8.994001$

(5) 3秒後の瞬間速度は……

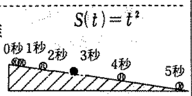
平均速度から瞬間速度への移行は，ひとつの飛躍である。まず微小区間における平均速度を考え，さらにその極限をとるという2段階に分けて考えなければならない。そこで問題3－1は，3～3.1秒の平均速度と3～3.01秒の平均速度との関係について考えさせる問題とする。ここでのねらいは，時間の間隔を小さくしていくことによって瞬間速度に近い値が求められることに気付かせるとともに，時間が$\frac{1}{10}$になって進む距離が同じオーダーで小さくなっても，速度まで同様に小さくなることはないということを示したいのである。したがって(2)は討論をさせたいところである。39ページでは，計算練習もかねて3秒後の瞬間速度が6cm／秒であることは気付かせたい。ただし，(5)ではまだ結論は出さない。

(3)，(4)の解

(3) $\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\frac{0.006001}{0.001}=6.001$(cm/秒)

(4) $\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\frac{0.005999}{0.001}=5.999$(cm/秒)

以上の結果より，t秒後までに進む距離$S(t)$cmが$S(t)=t^2$で表わされる等加速度運動について



3秒から3.1　秒までの0.1　秒間の平均速度……6.1　cm/秒
3秒から3.01 秒までの0.01　秒間の平均速度……6.01　cm/秒
3秒から3.001秒までの0.001 秒間の平均速度……6.001 cm/秒
⋮　⋮　⋮　⋮
3秒から3.000001秒まで0.000001秒間　では………

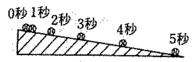
というように，3秒後からの時間をどんどん小さくして0に近づけていくと，3秒後からの平均速度は，どんどん6cm/秒に近づいていくことがわかる。

しかし，3秒後の瞬間速度を6cm/秒とすることについては，哲学上の論争がある。運動する物体は，どの瞬間にも運動しているから，3秒後の瞬間速度は6cm/秒でよいとする考えに対して，ちょうど3秒

	Δt　0
t 秒	……3…………
$S(t)$cm	……9…………
$\Delta S(t)$	0

「瞬間速度」をめぐる対話

哲学者R氏　$S(t)=t^2$の運動において，3秒後の「瞬間速度」は0cm/秒だと思います。なぜなら，運動する物体は，各瞬間には静止しているのですから。
運動は，静止の状態を無限個集めたものと考えるべきです。



哲学者H氏　運動が静止の状態の総和であるとは，私には考えられません。私は，運動する物体はどの瞬間にも運動していると考えます。「物体が，今ここにあると同時にここにない」というのが，運動の本質だと思います。

哲学者R氏　「瞬間」とは0秒間です。0秒間に進む距離は0cmです。「瞬間」には運動をしていないことになります。

数学者L氏　いいえ，「瞬間」とは「無限小時間」のことで，どんな大きさよりも小さいが，0秒ではありません。「無限小時間」に物体は「無限小距離」を進みますから，3秒後の瞬間速度は，無限小時間内の平均速度として，計算で求めることができます。

数学者N氏　L氏のいう「無限小時間」は存在しません。0でない大きさは，それを半分にしても0ではないのですから，どんな大きさよりも小さく，0ではないという大きさはありません。3秒後からの時間の間かくを，0.1秒，0.01秒，0.001

後という瞬間には，時間が0秒で，進む距離も0㎝，したがって，瞬間には物体は静止しているとする考えもある。

質 問

運動する物体は各瞬間にも運動していると思うか（41ページの「対話」参照)。

ア 各瞬間には静止していると思う。

イ 各瞬間にも運動していると思う。

－ 40 －

秒，……と，0秒に近づけていけば，平均速度も6.1㎝/秒，6.01㎝/秒，6.001㎝/秒，……と6㎝/秒に近づいていくだけです。

私は，この近づいていく値の6㎝/秒を，3秒後の瞬間速度としたらいいのではないかと考えます。

哲学者H氏　「近づいていく」というだけでは，どこまでいっても6㎝/秒にはならないじゃありませんか。

－ 41 －

40・41ページでは，瞬間速度の存在をめぐって考えさせることがねらいである。ここではあえて「質問」とし，生徒がどのように考えているのかを調査すると同時に，瞬間速度の概念についてより深く考えさせたい。$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}$について，$\Delta t \fallingdotseq 0$ であれば瞬間速度ではなく，$\Delta t = 0$とすれば$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{0}{0}$となる矛盾に気付かせたいのである。質問に「正解」はない。授業では，できれば40ページまでの範囲で考えさせ，討論してから41ページを読み，再討論させたい。41ページの登場人物は，N：ニュートン，L：ライプニッツ，H：ヘーゲル，R：ラッセルである。この架空の対話は，瞬間における運動の問題と，瞬間速度の問題との二重構造になっており，40ページの質問は前者についてのものである。

40ページの「質問」に「正解」はない。

しかし，坂道をブレーキをかけずに下っていけば，自動車やオートバイなどのスピードメーターの針は，0からはじまってどんどん大きくふれてゆき，どの瞬間にも，0より大きいある値を示すだろう。このような事実などからも，物理学者たちは，運動する物体はどの瞬間にも運動しており，速度をもっと考えている。

さて，$S(t)=t^2$の運動で，3秒後の瞬間速度はちょうど6㎝/秒と考えられているが，これには2通りの考え方がある。

ひとつは，数学者N氏の考えである。

3秒から3.1　秒までの0.1　秒間の平均速度…6.1　㎝/秒

3秒から3.01　秒までの0.01　秒間の平均速度…6.01　㎝/秒

3秒から3.001秒までの0.001秒間の平均速度…6.001㎝/秒

⋮　⋮　⋮　⋮　⋮

というようにずっと続けていっても，平均速度は，ちょうど6㎝/秒には決してならない。しかし，3秒後からの時間を0.0001秒間，0.00001秒間…と，どんどん小さくしていけば，平均速度は6.0001㎝/秒，6.00001㎝/秒…と，いくらでも6㎝/秒に近づく。したがって，この6㎝/秒を，3秒後の瞬間速度としよう，というのである。

もうひとつは，数学者L氏の考えである。たしかにN氏のいうように，3秒後からの時間を小さくいくだけでは，ちょうど6㎝/秒には決してならない。しかし，3秒後からの時間を無限小時間dt秒にしてしまえば，この無限小時間dt秒間の平均速度が3秒後の瞬間速度で，6㎝/秒になるというのである。

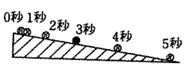
－ 42 －

数学者L氏の考え方で，瞬間速度を求めてみよう。

問題３－２

t秒後までに進む距離$S(t)$㎝が，$S(t)=t^2$で表わされる等加速度運動について，以下の問いに答えよ。

$S(t)=t^2$



(1) 3秒後から$3+dt$秒後までの無限小時間dt秒間の「平均速度」を求めよ。

$S(t)=t^2$

t 秒	…3, $3+dt$, …
$S(t)$㎝	

$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} =$

(2) 3秒後の瞬間速度を，どう考えたらよいか。

－ 43 －

問題3－2の解

(1) $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{6\,dt+dt^2}{dt}=6+dt$(cm/秒)

$\Delta t=dt$

t 秒	$3,\quad 3+dt$
$S(t)$cm	$9,\quad 9+6dt+dt^2$

$\Delta S(t)=6dt+dt^2$

(2) 「dtは無限小だから，$6+dt$は，6と見なすことができる」というのが，L氏の考えである。

3秒後から$3+dt$秒後までの，dt秒間の平均速度は，

$\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{6dt+dt^2}{dt}=6+dt\to 6$(cm/秒)である。

このことを，

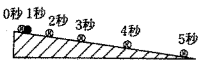
$\dfrac{dS(3)}{dt}=6$　と書くことにしよう。

定義　5

関数$S(t)$に対して，$\dfrac{dS(t_0)}{dt}$を，$S(t)$の$t=t_0$における微分係数という。

計算練習　　　$S(t)=t^2$

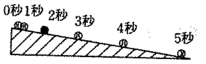
① $S(t)=t^2$の等加速度運動について，1秒後の瞬間速度($S(t)=t^2$の$t=1$における微分係数)を求めよ。



t 秒	$1,\quad 1+dt$
$S(t)$cm	

② $S(t)=t^2$の等加速度運動について，2秒後の瞬間速度($S(t)=t^2$の$t=2$における微分係数)を求めよ。

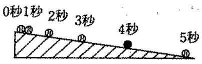
$S(t)=t^2$



t 秒	
$S(t)$cm	

③ $S(t)=t^2$の等加速度運動について，4秒後の瞬間速度($S(t)=t^2$の$t=4$における微分係数)を求めよ。

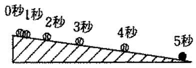
$S(t)=t^2$



t 秒	
$S(t)$cm	

③ 以上の結果から，5秒後の瞬間速度($S(t)=t^2$の，$t=5$における微分係数)を推測せよ。

$S(t)=t^2$



42ページでは，瞬間速度のとらえ方についての，2通りの考え方，すなわち極限法的なものと，「無限小」によるものを，41ページの対話からとり出して説明している。できればここでも「どちらの考えを支持するか」と，質問して討論させたい。ライプニッツにおける微分dxは，「無限小」量であり，$\dfrac{dy}{dx}$の指導にあたっては無限小量のわり算という立場から，問題3－2を考えさせる。(1)では$\dfrac{\Delta S(3)}{\Delta t}=6+dt$となり，$dt$は無限小だから$6+dt\to 6$，したがって(2)では$\dfrac{dS(3)}{dt}=6$と書かせる。微分係数をこのような書き方にするのは，導関数との関連を考慮してのことである。微分係数を定義し，計算練習では$S(t)=t^2$についての微分係数を求める。(4)は計算せずにそれまでの結果から推測させ，導関数へつなげる。

計算練習の解

① $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{2dt+dt^2}{dt}=2+dt\to 2$

$\dfrac{ds(1)}{dt}=2$

dt

t 秒	$1,\quad 1+dt$
$S(t)$cm	$1,\quad 1+2dt+dt^2$

$2dt+dt^2$

② $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{4\,dt+dt^2}{dt}=4+dt\to 4$

$\dfrac{ds(2)}{dt}=4$

dt

t 秒	$2,\quad 2+dt,$
$S(t)$cm	$4,\quad 4+4dt+dt^2$

$4dt+dt^2$

③ $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{8dt+dt^2}{dt}=8+dt\to 8$

問題3－3の解

$\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{2tdt+dt^2}{dt}=2t+dt\to 2t$

$\dfrac{dS(t)}{dt}=2\,t$

$\Delta t=dt$

t 秒	$t,\quad t+dt$
$S(t)$cm	$t^2,\quad t^2+2tdt+dt^2$

$\Delta S(t)=2tdt+dt^2$

この式に$t=5$を代入すると，

$\dfrac{dS(5)}{dt}=2\times 5=10$で，5秒後の瞬間速度は10cm/秒で良いことがわかる。それでは，6秒後の瞬間速度は………？

$\dfrac{ds(4)}{dt}=8$

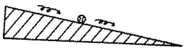
t 秒	$\overbrace{4, \quad 4+dt}^{dt}$
$S(t)$cm	$\underbrace{16, \quad 16+8dt+dt^2}_{8dt+dt^2}$

④ 以上の結果から，$\dfrac{dS(5)}{dt}=10$ と推測されるが，それで良いかどうか，問題３－３を解いて考えてみよう。

問題３－３

$S(t)=t^2$

t 秒後までに進む距離 $S(t)$cm が，$S(t)=t^2$ で表わされる等加速度運動について，一般に t 秒後の瞬間速度を求めよ。



t 秒	t，$t+dt$
$S(t)$cm	

５秒後の瞬間速度は，$\dfrac{dS(5)}{dt}=10$(cm/秒) で良いか？

定義 6

$\dfrac{dS(t)}{dt}$ を，$S(t)$ の導関数という。これを，$S'(t)$ とも書く。

$S(t)=t^2$ のとき

微分係数：$\dfrac{dS(3)}{dt}=6$，導関数：$\dfrac{dS(t)}{dt}=2t$

t がいろいろな値をとるときの $S(t)$ の微分係数は，$S(t)$ の導関数ににｔを代入しても，求められる。

計算練習

① t 秒後までに進む距離 $S(t)$cm が，$S(t)=5t^2$ で表わされる等加速度運動について，t 秒後の瞬間速度を求めよ。($S(t)=5t^2$ の導関数を求める問題)

$S(t)=5t^2$

t 秒	t，$t+dt$
$S(t)$cm	

また，この運動の，１秒後の瞬間速度（$t=1$ における微分係数）２秒後の瞬間速度($t=2$ における微分係数)，３秒後の瞬間速度（$t=3$ における微分係数）を，それぞれ求めよ。

② t 秒後までに進む距離 $S(t)$cm が，$S(t)=3t^2$ で表わされる等加速度運動について，t 秒後の瞬間速度を求めよ。($S(t)=3t^2$ の導関数を求める問題)

$S(t)=3t^2$

t 秒	
$S(t)$	

また，この運動の１秒後の瞬間速度（$t=1$ における微分係数)，２秒後の瞬間速度（$t=2$ における微分係数)，３秒後の瞬間速度（$t=3$ における微分係数）を，それぞれ求めよ。

計算練習の解

① $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{10tdt+5dt^2}{dt}=10t+5dt\rightarrow 10t$

$\dfrac{dS(t)}{dt}=10t$

t 秒	$\overbrace{t, \quad t+dt}^{\Delta t=\ dt}$
$S(t)$cm	$\underbrace{5t^2, \quad 5t^2+10tdt+5dt^2}_{\Delta S(t)=\ 10tdt+dt^2}$

したがって

$\dfrac{dS(1)}{dt}=10\times 1=10$,

$\dfrac{dS(2)}{dt}=10\times 2=20$, $\dfrac{dS(3)}{dt}=10\times 3=30$

② $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\dfrac{6tdt+3dt^2}{dt}=6t+3dt\rightarrow 6t$

$\dfrac{dS(t)}{dt}=6t$

t 秒	$\overbrace{t, \quad t+dt}^{\Delta t=\ dt}$
$S(t)$cm	$\underbrace{3t^2, \quad 3t^2+6tdt+3dt^2}_{\Delta S(t)=\ 6tdt+dt^2}$

したがって

$\dfrac{dS(1)}{dt}=6\times 1=6$,

$\dfrac{dS(2)}{dt}=6\times 2=12$, $\dfrac{dS(3)}{dt}=6\times 3=18$

$\left(*\ \dfrac{dS(t)}{dt}\right.$ は，t 秒後の速度を表わすから，$\left.\dfrac{dS(t)}{dt}=v(t)\text{である}\right)$

問題３－４

二次関数 $S(t)=at^2$(a は定数)の，導関数 $S(t)=\dfrac{dS(t)}{dt}$ を求めよ。

問題３－３は，導関数を求める問題である。$\dfrac{dS(5)}{dt}=10$ で良いかと問うのは，導関数と

微分係数との関連について考えさせるためである。計算練習では導関数を求めると同時に，それに代入することによって微分係数を求めることができることを知らせたい。問題3－4では，より一般に $S(t)=at^2$ の導関数を求める。

問題3－4の解

$a(t+dt)^2=a(t^2+2tdt+dt^2)=at^2+2atdt+adt^2$ より

$\Delta t=dt$

t	t,	$t+dt$
$S(t)$	at^2,	$at^2+2atdt+adt^2$

$\Delta S(t)=2atdt+adt^2$

したがって，

$$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\frac{2atdt+adt^2}{dt}=2at+adt\rightarrow 2at$$

$$\frac{dS(t)}{dt}=2at$$

二次関数の導関数は，一次関数になる！

研　究

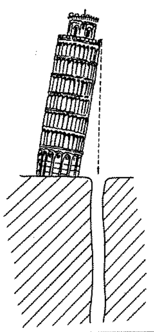
自由落下運動する物体が，落下をはじめてから t 秒後までに落下する距離 $S(t)$m は，二次関数

$S(t)=4.9t^2$

で表わされる（33ページ）。

(1) 導関数を求める（微分法）ことにより，t 秒後の速度 $v(t)$cm/秒を求めよ。

(2) 1秒後の速度 $v(1)$，2秒後の速度 $v(2)$，3秒後の速度 $v(3)$を，それぞれ求めよ。



－ 50 －

散策路その3 ── 微分法についての2つの考え方

ある関数について，その微分係数や導関数を求める方法 ── 微分法 ── には42ページでも述べたように2通りの考え方がある。

$S(t)=t^2$ と表わされる等加速度運動について，3秒後の瞬間速度（$S(t)=t^2$ の，$t=3$ における微分係数）を，6cm/秒とすることにはかわりはないが，その考え方が異なるのであった。このことは，微積分学をそれぞれ独自につくりあげたニュートン（1642～1627，イギリス）とライプニッツ（1646～1716，ドイツ）の考え方の違いから来ている。

ニュートン
Sir Isaac Newton
1642～1727

ライプニッツ
Gottfried Wilhelm Leibniz
1646～1716

現在では，ニュートン流の考え方が採用されているが，実際に微分計算をするときには，われわれが計算してきたように，ライプニッツ流の考え方で行なっている。記号も，ライプニッツ流のものが，現在でも使用されている。

質　問

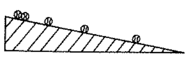
もう一度，41～42ページを読み返して，どちらの考え方に賛成するか。

ア　N氏の考え方に賛成　　イ　L氏の考え方に賛成

－ 51 －

おわりに ── 積分法と微分法

これまで，等加速度運動について，速度 $v(t)$ から積分法によって距離 $S(t)$を求め，逆に距離 $S(t)$から微分法によって瞬間速度



$S'(t)=\dfrac{dS(t)}{dt}$ を求めてきた。

ところで，下の表を見ればわかるように，$2t$の不定積分は t^2 であり，逆に t^2の導関数は$2t$である。したがって

積分法と微分法とは，たがいに逆の演算である

ということができる。

積分法も微分法も，ともに起源は古くギリシア時代に求められるが，逆演算であることが知られるようになったのは近代に入ってからである。そして，17世紀に，ニュートンが，そしてライプニッツが，微積分学を体系化したのであった。

この授業書『二次関数と微積分』は，この大きな体系の，まだほんの入り口にすぎない。

積分法	$v(t)=2t$ ↓ $S(t)=\int_0^t 2tdt=t^2$ （不定積分）	$v(t)=2t$ ↓ $S(10)=\int_0^{10} 2tdt=100$ （定積分）

§3　計算練習

1　$S(t)=at^2$ の導関数が $S'(t)=\dfrac{dS(t)}{dt}=2at$ であることを利用して，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$S(t)=2t^2$　　　$S'(t)=\dfrac{dS(t)}{dt}=$

(2)　$S(t)=t^2$

(3)　$S(t)=\dfrac{1}{2}t^2$

(4)　$S(t)=kt^2$
（kは定数）

(5)　$f(x)=x^2$

2　次の関数について，指定された値における微分係数を求めよ。

(1)　$S(t)=t^2$ の $t=3$ における微分係数 $\left(S'(3)=\dfrac{dS(3)}{dt}\right)$

(2)　$S(t)=3t^2$ の，$t=5$ における微分係数

(3)　$S(t)=at^2$ の，$t=3$ における微分係数

微分法

$S(t)=t^2$ $\quad$ $S(t)=t^2$

$v(t)=S'(t)=\dfrac{dS(t)}{dt}=2t$ $\quad$ $v(3)=S'(3)=\dfrac{dS(3)}{dt}=6$

(導関数) (微分係数)

－ 52 －

(4) $S(t)=2t^2$ の，$t=0$ における微分係数

(5) $f(x)=5x^2$ の，$x=2$ における微分係数

50ページの〈研究〉は，$S(t)=at^2$ について $S'(t)=2at$ であることを用いる問題である。散策路その3は，微分法の歴史的形成過程について，もっと大局的に捉えさせるようなものが望ましいと思われる。〈おわりに〉では，積分法と微分法との関係について確認しておきたい。運動の解析をベースとした以上，それらが互いに逆演算であることはほとんど自明であろう。

注

1）仮説実験授業方式が参考になる。くわしくは，板倉聖宣『仮説実験授業のＡＢＣ』仮説社，1977年など参照。

2）ここで授業書に引用した図版の出典を明らかにしておこう。

3ページの写真：山内恭彦他監訳『PSSC物理(下)第２版』岩波書店，1968年，294ページ。

4ページの写真：高等学校教科書『物理Ⅰ』東京書籍，1975年，39ページ。

6ページの写真：原島鮮監修『ストロボスコープ』講談社，1966年，10ページ。

8ページの写真：渡辺正雄他監修『プロジェクト物理１』コロナ社，1966年，10ページ。

9ページ上の写真：板倉聖宣『ぼくらはガリレオ』岩波書店，1972年，121ページ。

9ページ下の写真：『プロジェクト物理１』コロナ社，1977年，51ページ。

15ページの図：『ぼくらはガリレオ』160ページ。

19ページの写真：武谷三男・星野芳郎『物理の世界』講談社，1963年，54ページ。

20ページの写真：『プロジェクト物理２』125・128ページ。

35ページの図と引用文：大野陽朗監修『近代科学の源流 ── 物理学篇Ⅰ』北大図書刊行会，1974年，38ページ。

51ページの写真：森毅『数学の歴史』紀伊国屋書店，1970年，90・92ページ。

3）散策路その０は，藤岡信勝「中学校理科の授業書『力と運動』の構成と授業過程」(『名寄女子短期大学学術研究報告』Vol. 5，1972年）および板倉聖宣『ぼくらはガリレオ』(注２）を参考にした。

4）カーテンレール上の，出発点からの距離の比が１：４となる２点を通過する時に，シャッタースピード$\frac{1}{30}$秒で撮影した。

第４章　実験授業の展開と評価

はじめに ── 北星学園余市高における実験授業と評価の方法

授業過程に関する仮説は，実験授業によって検証される。この実験授業の実施については，とくに高等学校においては，学校によって，あるいはクラスによって授業の様相が大きく異なるであろうことは容易に推測される。しかしながら，とりわけ自然法則の認識に関しては，何らかの普遍性の存在もまた予測されよう。本論文の課題である二次関数については，その本質的な内容は中学校までの数学教育の中では教えられていないのであり，高校生がこれを認識していく過程に質的な差異は存在しないものと想定したい。すなわち，高校生の認識レベルの多

様性の中をつらぬく一般性を，主要な研究対象とするのである。したがって，実験授業はどの学校のどの学級で実施しても検証が可能であると考えたい。評価は，生徒に対して行なうのではなく，「授業書」に対象化された仮説に対して行なうものであるから。

授業書「二次関数と微積分」は，前章でも明らかにしたように，等加速度運動の解析により，速度から距離を求める方法としての積分法と距離から速度を求める方法としての微分法を理解させることが目的であり，そのための必要最少限の内容にとどめている。すなわち，実験授業はこの必要最少限の論理構造で，生徒の認識過程を組織しうるか否かを検討するものであって，ひとたび指導過程の基本構造が確定されれば，各学校や生徒の実情に応じて，一般の二次関数への拡張，あるいは分数をふくむ計算練習の追加など，変化をもたせることは当然のことである。この授業書は，いわゆる「一流校」むけのものでも，「底辺校」むけのものでもなく基本構造の確定だけをねらったものであることを，くり返し強調しておきたい。

さて，実験授業は余市町にある共学の私立北星学園余市高等学校（馬場達校長，生徒数約600人）2年生を対象に，1980年度の3学期（12～3月）に実施された。[1]この学年は，1年生のときから数学Ⅰの教科書の他に，「無限集合入門」「文字式」「数の拡張と二次方程式」「一次関数」「面積と積分」などの授業書類による指導がなされている。2年生4クラスを，2人の教諭がA・B，C・Dと2クラスずつ担当していたが，このうちB，D両クラスで基本的に大田が授業を行ない，この2クラスを分析の対象とした。これは，授業書の完成度がまだ十分ではないことによるものであり，先行のD組における授業の結果をふまえ，授業書の不備な点に対して臨機応変に対処しつつ，若干の修正を加えながらB組での授業にのぞむこととなったのである。

実験授業に対する評価は，授業書にもとずく授業で生徒の認識過程が仮説通りに組織し得たか否かにつきる。したがって，授業過程の分析が評価においてもっとも基本的である。しかし，とくに高校生の場合はみずからの考えを発表することを嫌う傾向が強いため，必ずしも認識過程はストレートに授業過程に反映されるとは限らない。これを補うために，アンケート形式で各§の主要な内容についての考えや感想を書くための〈課題〉プリントを作成し，各§の終わりに書かせることにした（ただし§3については，学年末試験の期日が迫り実施できなかった)。この両者の分析から，授業の中での生徒の認識状況を総合的に把握し，授業書の積極性および弱点を明らかにしていくことが評価の基本的な方法となろう。

もちろん，授業書「二次関数と微積分」は，基本的な計算ができることをも目標の一部としているのであるから，授業書のこの側面にかかわる評価はテストによって行なわれる。§2と§3の終了後，計算練習をさせたうえで評価テストを課すこととした。

なお，授業時数は表0の通りである（〈課題〉をふくむ)。

表0　授業時数

	§0	§1	§2	§3	計
D組	2	5	9	9	25
B組	3	4	7	8	22

第0節　力と運動

1ページの〈はじめに〉を読んでいくと，「$S=4.9t^2$という式が成り立つ」というところ

で，B組では早速「えっ，どうして$4.9t^2$なの？」と疑問が出された。それを解明していくのがこの授業書の目的のひとつであるが，教科書式に$y=4.9x^2$を与えて微分法から入るよりも，積分法から入ることの意義が，はじめから浮きぼりにされたように思われる。

§0にはいり，問題0―1の予想分布は表1のようになった。基本的にはアとイの対立である。D組では，アの理由としてはじめから十分なものが出された。

表1　問題0―1（p.2）

	D組	B組
㋐速くなる	9人	10人
イ 一定	31人	31人
ウ 遅くなる	0人	2人
エ その他	1人	1人

「自転車こいでいればだんだん速くなってくる。一定の長さになるようにバネを引っぱると，まず台車うごくでしょ。そしたらバネ引っぱらさって，そしたらまたそれを引っぱらなければならないから，バネが伸びて，だんだんそれが繰り返されて少しずつ速くなっていく」(工藤)

「増加の理由はね，めもりがここまであるでしょ。それをおとさないようにさ，ぐっとひっぱるでしょ。輪ゴムがここまであって，それ以下にならないようにぐうっと引っぱる。だいたい力が一定でしょ……」(志賀)

これに対してイを選択した側からは，「一定の力だから速度も一定」という以上には説明されなかった。B組もほぼ同様で，アについては「加速度がつく」，イの方は「力が一定だから」という理由が述べられたが詳しい説明はされなかった。なおD組では，討論の中で「はじめはだんだん速くなって，それから一定になる」と，イからその他へ変更する者が一人いた。

実験を見て，D組では「速くなる」と「はじめは速くなるがあとは一定」に結論がわかれ，B組では「やっぱり一定だ」という者もいた。やはりB組で「先生，スピードガンで測ればいいのによ」という声も上がり，3ページの写真を見せて一応納得してもらい，さらに摩擦や空気抵抗についても触れ，一定の速度に達するとあとは一定になることも説明した。

問題0―2については，録音操作のミスでB組の授業記録をとることができなかったが，D組では，ア：41人，イ：4人という分布となった。アの理由については「同時に落ちるから」イについては「なんとなく」という程度で討議にはならなかった。B組もほぼ同様であったが5ページの説明のところでは，D組で読みながら口答で解説しただけではよく理解されなかったように思われたので，B組では力学台車を2台用いて説明した。すなわち，台車を2台重ねて，1台のときと同じ運動をさせるためには2倍の力が必要であり，したがって物体を落下させるときも，質量が2倍の物体には2倍の力が必要であるが，実際，重力は2倍かかっているので同時に落下する，ということである。5ページの説明も，このように書き替えたい。

問題0－3もD組の記録だけであるが，ア：22人，イ：0人，ウ：12人とわかれた。しかし理由を述べる者がなく，力の合成，分解の説明と作図の指導に終わった。これらの内容は既知ではないため，問題の設定自体に再検討の必要があるだろう。

§0の終了後〈課題0〉で認識状況の調査を試みた。1は問題0－1の認識状況について，授業過程にはあらわれて来なかった部分をもできるだけ把握するための設問である。生徒にとっては，力と速度変化の関係を再確認する機会ともなろう。問題0－1の当初の予想は表2の通りで，とく

〈課題0〉　　2年　組

1　問題0－1で，あなたは最初どの予想をたてましたか。その理由は何でしたか。実験で確認したあと，あなたの考えはどのように変わりましたか。感じたことでも良いですから書いて下さい。

(最初の予想)　　ア，イ，ウ，エ（○をつける）

表2 問題0－1(P.2)後

	D組	B組
㋐ 速くなる	16人	9人
イ 一定	25人	30人
ウ 遅くなる	0人	3人
エ その他	1人	1人

にD組は授業のときと大きく異なっている。これは，授業の際には多数になびいたことが主な要因と思われる。したがって現時点ではこのように書かせることがやはり必要であろう。

さて，授業過程にあらわれなかった生徒の思考過程について，ここから補足していこう。アの理由が詳しく述べられなかったB組にも，つぎのようなものが見られた。

(その理由)

(実 験 後)

2 §0（2～9ページ）をふりかえって，内容についての感想を書いて下さい。

「一定にひっぱっても車に加速がついて増加してくる。それを一定にしようとばねを一定にひっぱり，それをやるごとに速度は増加する」(吉田)

「最初は力学台車はとまっているが，動かすとだんだん増加すると思った」(神戸)

「いくらバネを一定に保たれるよう引っぱっていっても，力がはいってだんだん速度が増加していくと思ったから」(飯野)

「物体を一定の力を加えて引っぱると，加速がつくと思ったから」(和田，玉谷，清野，和知)

このように，授業中の発言となってあらわされない部分がゆたかに書かれているのである。このことは発言の多かったD組においても同様であった。

一方，イを選んだ理由は，授業中の発言と変わらず，「力が一定だから速度も一定」と書いているものが圧倒的多数で，それ以外には「速度がつくものはなんでも一定だと思った(車も)」というのが見られた。

つぎに，実験後の考えの変化は，授業過程からは発言などで直接的に知ることは困難であり，述べさせる以外にはない。ここに書かれた内容は，「一定の力で引っぱると速度は増加した」「予想通りだった」など，実験の結果を記したものが多いが，実験の結果をみとめながらも，

「やっぱり速度はどんどん増加したけど，ちゃんとした理由はまだわからない」(B清野)

などと，その理由がわからないという者が両クラスとも3名ずつあった。〈散策路〉でもアリストテレスが摩擦を考慮に入れなかったことは書かれているが，しかし速度が増加する「論理」については触れていない。これは授業書の不備であった。

もっとも，この授業書の不備をこえて納得している生徒もいる。

「実験後は，私の予想はだめでした。そしてアが正解でした。しかし私は，それは実験のミスなのではないかと考えました。しかし良く考えて見るとその意味がわかりました。やはり，速度は増加していくのです」(D亘)

「やっぱり同じ力を加えていくと速度はふえていくと思った（上から物を落とすのを見てそう思った)」(D本郷)

「慣性の法則で，ある物体に力を加えると他から力を加えないかぎりいつまでも等速直線運動をすることがいわれているから，とうぜんそれ以上の力（一定の力で引っぱりつづけること）で引っぱると加速していくことがわかった」(B水野)

また〈散策路〉を読んでの感想もふくまれていると思われるが，次のような文章もあった。
「ふだん，別に気にもかけないような簡単なことでも，よく考えてみると自分の考えはまちがっているということに気づいた。ひろい目でみると，この他にもあたりまえだと思っていることでも，まちがって考えていることがたくさんあると思う」(B 八反田。B 山下も同様)

つぎに §0の感想の分析にうつろう。表3のように，一般的な感想も多いがとくに問題0―2について触れた者が多かった。授業過程ではまったく討議がなされなかったこの問題について，生徒がどのように考えたのかを見ていこう。B組には，質量の異なる物体が同時に落下することをはじめて知ったと記している生徒が5名あった。
「ぼくは，小中学校時代からおもいほうがさきにおちると思っていた。しかしやっぱりちがっていた。おれは，このしょうにはいってからかなりのものをまなんだと思う。たぶんこのもんだいは，中学校のときにやったと思うが，その時はききもしなかった。しかしこのもんだいは，最初にやる人は，ぜったいにおもいほうがさきにおちる，とこたえると思う。ふつうの人間だったらそうかんがえると思う」(B 石川)
また，重力の大きさが物体によって異なるとは思わなかったという者がD組に3名，B組に1名いる。

表3 §0 の感想

内　　容	D組	B組
問題0―1にふれた者	2人	7人
問題0―2にふれた者	11人	18人
問題0―3にふれた者	3人	3人
わかりやすい・良い	11人	12人
実験が良い	1人	6人
図，写真が良い	1人	6人
読みものが良い	9人	6人
授業書形式が良い	0人	5人
やさしいがむずかしい	2人	3人
もっとわかりやすく	0人	2人
わからない	6人	2人
理科のようだ	2人	2人
その他	3人	0人
無記入・感想なし	8人	1人
計（重複あり）	42人	43人

「2 kgと 1 kgの物体が同じく落ちるので，それに働く重力の大きさがちがうのが，初め同じ大きさだと思っていた」(D 長尾)
「P 5の図を見て，あれ，と思った。たしかにてんびんを使えば重さはちがう。重力も同じようなものである」(D 山下)
さらに「同じ運動をする物質をいくらよせあつめても落下運動のしかたはかわらない」と授業書通りに書いた者や，問題0－2のイの選択肢の内容を書いた者など，あらかじめ持っていた知識に差はありつつも，それぞれのレベルから一歩ずつ進んでいるといえよう。なお，D組でこの問題に触れた11名のうち，5名が「よくわからなかった」と書いている。これは前述のように，5ページの説明不足をD組では補足しなかったことによると考えられる。

このように問題0－2は，授業過程における反応とは逆に，個々の生徒においては大きな関心を持って受けとめられているということができる。したがって，選択肢の設定の仕方や5ページの説明を再検討することによって，授業の中で活発な議論を引きおこす可能性は十分にあるといえよう。

全般的な感想については，表3に分類した通りである。D組に否定的な感想をもつ者が多いのは，やはり問題0－2の不十分さからくるものであろう。それにもかかわらず，D組においても積極的な感想が出されている。いくつかを紹介しよう。
「物理の授業のような感じがした。普通の授業よりもおもしろい」(D 山田)
「簡単なようでけっこうひにくれた問題だったみたいです。計算問題よりずーとおもしろかった！」(D 中村)

「今のうちなら簡単だけど，これからが不安。 But ，やっぱり教科書よりわかりやすい。長い文章も興味をひくような面白い書き方をしているので，楽しくやれる。集中的にその問題だけでなく，他にそれを発見した人のことを書いたりしているのがよい」(D平野)

〈散策路〉に関しては，次のような感想もある。

「アリストテレスのまちがった学説が2000年以上も信じられていたのでびっくりした」(B水野)

「アリストテレスの考えは，おしかったと思った。まさつ力を考えにいれたらよかったのにと思った」(B飯野)

古い誤った考え方を克服していくプロセスを，生徒に追体験させるだけではなく，科学史上の話題を取り入れて彼らの到達点を示すという方法は，予想以上に効果があったと思われる。

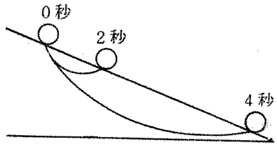
第1節　等加速度運動

問題1－1では，問題文を読んだあとカーテンレールの上にパチンコ玉をころがして見せた。2秒後と4秒後の位置を確認し，そのうえで2秒後と4秒後の速度がどの程度異なるかという視点から観察させて，予想をとった。表4のような分布となり，理由も両クラスともほぼ同様で，イを選んだ者は「2倍に見えたから」「なんとなく」というにとどまった。これに対し，アの方からは理由の説明が次のようになされた。

表4　問題1－1 (P.10)

	D組	B組
ア　2倍より大	36人	35人
イ　2倍	7人	11人
ウ　2倍より小	0人	0人

「0から2までの間の長さと，0から4までの間の長さとは2倍になっていない」(D久保田――図参照)



「2秒までの距離の長さはここ（図を示す）で，その加速にさらに加速がついてくるでしょ。4秒になるとそうとうな加速がついて距離が長くなるからア」(D加藤)

「最初から最後まで同じスピードだったら，2秒後の距離が1ｍだったら4秒後の距離は2ｍで2倍になるけど，加速しているから倍以上になるから」(B水野)

これらの考え方に共通していることは，速度を進んだ距離におきかえて考えているということである。すなわち，距離が2倍以上だから速度も2倍以上であるとの主張に他ならない。そしてこの誤りは第2章第1節で触れたガリレイの初期の誤り――等加速度運動において，速度は通過した距離に比例する――と共通する面をもっているともいえよう。

ところが，実験の方法を問うと「距離を測って時間で割れば良い」としか出されない。速度＝距離÷時間という公式は知っていても，距離が2倍になれば，時間で割ることを忘れて速度も2倍であるとするのは，速度概念がまだ生徒の中には確立していないこと，逆にいえば速度概念は微分法によってはじめて捉えられることを示しているともいえるだろう。さらに，生徒には平均速度と瞬間速度の区別もついていないのであるが，これもまた微分法の課題であろう。

授業では，速度が刻々と変化しているので，単純に距離÷時間では求められないことを説明し，ある時点での速度を測定する器具として自動車のスピードメーターや，野球でボールの速さを測定するのに用いられているスピードガンなどがあることを紹介してから，ここでは写真のブレの大きさで比較するとして，11ページを配布した。2秒後のブレの長さが6㎜であることを確認し，4秒後のブレの大きさを再予想してから12ページを配り，ブレが12㎜であるこ

とから，イの「$v(4)=2v(2)$」が正解であることを確認していった。なお，B組では「なんでブレるのか」という質問があとで出されて詳しく説明したが，あらかじめもっと詳しく説明しておいた方が親切であろう。距離が2倍以上であるからといって，速度も2倍以上とは限らないことを最後に強調しておいた。

問題1—2の予想分布は表5のようになった。「予想」というほどの問題ではないが，B組でイの「同じ」が多かったのは予想外であった。水野が，5：60＝4：xの比例式をたて，$x=48$と求めて「だいたい同じ（50に近い）」というと，「だいたいじゃだめだ」という声が出て，結局「60を5でわったら…」と，ねらい通り両クラスとも単位時間あたりの速度変化で比較することになった。

表5　問題1－2（P.13）

	D組	B組
ア A	0人	1人
イ 同じ	0人	27人
ウ B	全員	8人

問題1—3も「予想」とはいいがたいが，分布は表6のようになり，エの$v(t)=4.9t^2$を選ぶ者が多かった。しかし，ア，イ，エを選択した者からは理由は出されず，ウの者だけが理由を述べた。

表6　問題1－3（P.15）

	D組	B組
ア 9.8	0人	7人
イ $t+9.8$	1人	7人
ウ $9.8t$	4人	5人
エ $9.8t^2$	34人	31人
オ その他	0人	0人

「0秒後の速度が0m/秒で，1秒ごとに9.8m/秒ずつ速度が増加していくんでしょ。で，時間を0から1，2，3，4，5，6，7とずっと続けていくと，速度の方も0から9.8，19.6，29.4とそういうふうにやっていくと，9.8から19.6ってそういうふうに変わっていくから$9.8t$」（D加藤）

「aが9.8で，14ページの公式の$a=\dfrac{\Delta v(t)}{\Delta t}$で$a$が9.8だから，$v(t)=9.8t$みたいだ」（B小松）

B組では，小松がこのように発言したところで授業終了のチャイムが鳴ったので「実は正解はエではありません」というと「エーッ！」とおどろきの声があがった。

多くの者がエを選んだ理由としては，主に，授業書のタイトルが「二次関数と微積分」であること，また〈はじめに〉で$S=4.9t^2$と書いてあることなどが考えられよう。しかしいずれにしてもこの問題は選択肢をたてることとはなじまない問題であり，9.8m/秒²の意味を説明したあと直接的に「$v(t)$をtの式で表わせ」とするべきであった。その際の手がかりとして$v(1)$，$v(2)$，$v(3)$，……を求めさせたり，対応表を作るなどの補助手段も必要であろう。

問題1－4は，「問題」というよりは，「練習問題」であり，とりたてていうべきことはない。

§1の終了後，前節と同様の目的で〈課題1〉による認識状況の調査を行なった。まず，§1の中心的な問題であった問題1－1の当初の予想は，表7のようにやはり授業の際とは少し異なっている。授業中，少数派は意見を述べさせられることが多いため，どうしても他の生徒の様子をうかがいながら，挙手する者が，まだ多いのである。

さて，授業中に聞くことのできなかった生徒の考えについて見ていこう。アを選んだ理由は，授業の際にも出された「距離が2倍以上になるから」がD組7名，B組1名で，「速くなるから，加速されるから」

〈課題1〉　2年　組

1　問題1－1で，あなたは最初どのような予想をたてましたか。その理由は何でしたか。実験（写真のブレの測定）で確認したあと，あなたの考えはどのようになりましたか。感じたことでも良いですから書いて下さい。
（最初の予想）ア，イ，ウ，エ（○をつける）

が両組13名ずつであった。もっともこれらは,「距離だと思ったから,2秒後よりも4秒後の方が加速がついて,その間が長くなると思ってアにした」(D菅原)などというように,結局は距離が2倍以上だからということに帰着するのである。

表7 問題1－1(P.10)後

	D組	B組
ア 2倍より大	30人	25人
㋑ 2倍	12人	18人
ウ 2倍より小	0人	0人

(その理由)

(実験後)

2 §1(10～20ページ)をふりかえって,内容についての感想など,何でも良いですから書いて下さい。

イの方は,授業では出されなかった理由がいくつか見られる。

「速度の増加する量は同じだと思ったから」(D工藤)

「きまった加速度でころがっていくと思ったから」(D和田)

「“等加速度運動”ということが頭にあったため」(D平野)

「斜面に走らせるとだんだん加速度が増していくにつれてボールの走らせる速度が速くなり2倍になる」(D黒石)

「ボールが運動開始してからだんだんとボールが早くなってくる」(D葛西)

また,「イ」を選んだ理由として次のようなものもある。

「物体は同じ速さでうごいていると思った」(B井内)

「2秒後も4秒後も一定の速度で走ると思ったから〔イ〕にした」(B田原)

これらは,「加速度一定」のことを「速度一定」と述べているものと思われる。

実験後考えたことについては,まず,ブレで測るという実験の方法に対していくつかの意見が出された。

「ボールの直径,ブレが関係してくるとは思わなかった」(D武井)

「まさかブレというものを利用してその長さをはかるなんて思ってなかったヨ!!」(D菅原)

「あのブレで正確なスピードが計れるのか!」(D渡辺)

この他にもブレに対する賛否3名ずつあり,前述のように速度とブレについての説明不足を十分に補うことによって,もっと理解は深まるものと思われる。なお,渡辺の疑問については,たしかにブレは瞬間速度を表わすものではないのであり,この疑問を微分法へ発展させる方向で積極的に受けとめ,微分指導に生かす方向も考えられよう。

さらに内容とかかわっては,最初アを選んだ者の中に自分の誤りを客観的に捉えて書いているものが見られた。いくつか紹介しよう。

「やっぱりぼくの考えはまちがっていた。それは,距離はかんけいないんだなあー」(B吉田)

「きょりではなく,速度と時間だった」(D谷地中)

「(『2秒と4秒の間の長さだと思ったから』ア) 正解はイだった。問題をかんちがいしていた」(D木村)

一方,「なんとなく不思議」(B清野。D駒形も同様) というものや,

「見た時2倍にはなってないのにどーしてか?」(D竹内)

「実験の結果では2倍になることがわかったけれど,速度は増加すると考えればまだ良くわか

らない」(D高山)
「答えは④だったけど，どうしてそうなるのか今だにわからないけど，実験をみてもどうしてもそう思えない」(B中辻)
などというように，速度と距離の区別がまだついていないもの，あるいは，
「答えはイでしたが，でもどうしてかよくわからない」(D若松。B水野，D武井も同様)
というものなど，速度変化の仕方の認識状況は様々なレベルにわかれている。

これらの「底上げ」のためには，以上の検討から，第一に速度と距離との混同を整理することが必要であろう。そのためにはガリレイもまた，初期においては速度が距離に比例すると誤って考えていたことを，散策路その1の中で紹介するなどの手だてが考えられる。もっとも本質的には微分法の指導の中で解決されるのであるが。第二には，速度の増加の仕方について，実験結果がそうであるからという現象論的レベルでの把握にとどまらず，「論理的」なレベルでの説明が要請されているといえよう。この点に関しては，慣性運動との対比もふくめ，力の作用の一様性によって速度変化の一様性が保障されていることを書く必要がある。散策路のニュートンに関する記述は，このあたりの内容を強調するようにしたい。

さて，§1についての感想であるが，表8のように分類される。問題1—1に関しては先の検討につきているが，とくに問題1—3は，a＝一定から $v(t)=at$ を求める重要な問題であるにもかかわらず，印象がうすい。生徒に対しての十分な問題提起たりえていないといえよう。前述のような改訂が必要である。

表8　§1の感想

内　容	D組	B組
問題1—1にふれた者	5人	13人
問題1—2にふれた者	4人	2人
問題1—3にふれた者	0人	0人
問題1—4にふれた者	0人	1人
わかりやすい・簡単だ	9人	6人
実験が良かった	2人	9人
読み物が良かった	5人	1人
やさしいがむずかしい	0人	6人
もっとわかりやすく	4人	2人
わからない	12人	12人
その他	1人	3人
無記入・感想なし	12人	3人
計（重復あり）	42人	43人

全般的な感想については，§0の場合にくらべて否定的なものが多くなっている。単に「むずかしくてわからない」というものがほとんどで，他に「何をやっているのかわからない」(D組3名)
「進み方がはやい」(D組1名)
肯定的なものでは表8の内容の他に，
「おもしろい問題があっていいと思う」(D駒形)
「等加速度運動について理解しやすくなっている。また，かんしんをひきつけるように書かれている」(D谷地中)
「自分で予想をたてるところがおもしろい」(D平野)
「教科書に出ていないことをやっているので良いと思う」(B山下)
「等加速度運動っておもしろいナと思った」(B森)
などと，様々な角度から授業書が評価されている。前述のような視点からの改訂によって，「むずかしい」「わからない」という部分を，もっと取り込んでいく余地は十分にあるものと思われる。

散策路その1等に関しては，積極的な評価が多かったが注文も出された。
「ロケット発射時の顔やニュートンの話などそうゆうような話がおもしろくて好きだ。これからもそうゆう数学の昔話を載せてほしい」(B山田)

「P 15で札幌と東京では加速度がちがうことがわかった。はじめは，札幌と東京どちらも重力はおなじだと思っていたが。宇宙ロケットの飛行士は，出発時に何Gぐらいの力をうけるのかしりたかった」(D和田)

「説明や問題をくわしく書いてあるのはいいけれど，文が長すぎるのでもうすこしまとめてわかりやすくしてほしい」(D工藤)

散策路その1は内容が多いので，ガリレイの初期の誤りとニュートンによる力と運動の関係の把握に関する内容にとどめ，他の内容はそれぞれの問題の解説の中に組み入れるようにしたい。

第2節　距離を求める — 積分法と二次関数

まず，授業過程から見ていこう。問題2—0の予想分布は表9のように大きく異なった。もっとも，各選択肢を選んだ理由はほぼ共通で，アを選んだ者は単純に500mの3倍で1500mとしたのである。これに対してイ，ウ，エを選んだ者は，一応500m×3＝1500mと求めたうえで，

「落ちれば落ちるほどスピードが増していくから」(B山本 — エ) などと，それを2倍ないし4倍しているのである。ただし，1500mを何倍するかという点については理由を述べるものはなかった。

表9　問題2－0 (P. 21)

	D組*	B組
ア 1500m	10人	32人
イ 3000m	20人	2人
㋒ 4500m	5人	5人
エ 6000m	5人	2人
オ それ以上	0人	0人

* D組は概数

B組では，当初の予想はアを選んだ者が多かったがイ，ウ，エの理由を聞いていくうちに「あっ，まちがえた」などとの声が上がり，予想変更をとったところア：8人，イ：0人，ウ：25人，エ：3人となった。ここでは，一応速度の増加があることからアは誤りであることだけを確認しておいた。[2]

次に問題2—1であるが，(1)は§1の問題1—3を再度提示したものに他ならない。にもかかわらずD組では，対応表を作成してから$v(t)=2t$を確認するまでに次のようなやりとりがなされた。

T　じゃ，t秒のときの速度は$v(t)$だけれども，いくら？

P_1　$v(t)$は，20かける……

T　$v(t)$イコール，何て表わす？

P_1　イコール，cm/秒，あっ，ちがうのか。

T　これはどういうことかというと，10秒後の速度が20だから$v(10)=20$でしょ。このとき（$t=t$のとき）は？

P_2　$v(t)=t$

T　$v(t)=t$か？，tじゃないでしょ，これ。

P_2　ああ，$v(t)=2$か。

P_3　t^2だべや。

T　t^2かな？，tか，t^2か，別か。

P_4　$2t$。

T　うん，$2t$だね。

このように，文字の使用にあたっての弱さ，とりわけ変数のとり扱いの困難が随所にあらわれてくる。これは，それぞれについての以前の指導にかかわる問題ではあるが，それに依拠し

なくとも，この授業書の中でも文字や変数の使用についてここで必要な限りでのとりたて指導を工夫することも考えられよう。ここでは応急的に $v(1)=2\times1=2$，$v(2)=2\times2=4$，…，$v(t)=2\times t=2t$ で，t^2 ではないことを説明した。

(2)のグラフは，点をプロットして結べば直線になるので，相談しながらの作業でほとんどの生徒ができていた。そしていよいよ本題の(3)にすすみ，両クラスとも少し時間を与えて考えてもらった。「距離はグラフの下の面積で表わされていて，100cm」という一応の結論を導くまでには様々な考えが出されたので要約して紹介しよう。

D組ではまず，55cmというのが出された。これは，10秒後までということで1から10まで加えたものである。さらに，20cm/秒×10秒＝200cmと出てきて，20cm/秒の等速運動ならこれで良いが，多すぎるのではないかと言うと，5秒ずつに分けて150cmと答える者がいた。これは，10cm/秒×5秒＋20cm/秒×5秒という計算である。55cmといい，150cmといい「分けてかけて加える」という積分の発想に近いものが出されたが，石川が「わかった」とうれしそうな表情をしていたので聞いてみると，「$20\times10\times\frac{1}{2}=100$」という。$\frac{1}{2}$ にした理由を聞くと，「三角形だから」ということであったが，それ以上は答えてくれなかった。

B組でも，はじめに20cm，30cm，200cmと出され，20cmは 2×10，30cmは理由不明，200cmは20×10の他に，水野がディメンジョンの計算について論じた。

「2は加速度で，cm/秒^{2}でしょ。10は秒だから，これを2回かけると距離になる」

すなわち，2cm/秒^2×10秒×10秒＝200cmとすれば距離が求まるというのである。ここで，「最初からずっと速度20だったら20×10＝200で良いが，最初は0で，まん中辺で10，最後に20だから，もっと少なくなるんじゃないか」と問うと，熊本が「半分で100」と言い，ここで終了のチャイムが鳴った。休み時間に熊本に理由を聞くと，

「1秒後の速度が2で，2秒後が4で，3秒後が6で，……だから半分じゃないかと思った」

とのことであった。次の時間は，この説明のあと以下のようなやりとりになった。

小松　あれ，三角形だから半分じゃないか？

T　　え？，三角形？，何の半分？

小松　その四角形が200で，10×20。

T　　この四角形，何を表わしてる？　つまり，最初から速度20の等速運動したら，速度が20で時間が10，そしたら200。

小松　だけど，そうじゃないから半分。

T　　半分で100，実はこれが正解なんですね。これでみんなしっかりわかった？

P　　わかんない。

T　　じゃどうしてこの100でいいのかってことをこれから考えてみよう。

倉島　なんで面積，関係あるの？

T　　じゃ小松くん，面積っての，もうちょっと聞かせて。

小松　速度×時間が距離で，距離が出るんだよ。

T　　速度×時間が距離，これはいいかい？　これはわかるね。でもこれがどうして面積なのか。

小松　とにかく距離は面積なんだよ。

このあと24ページで，等速運動の場合は「速度×時間＝距離」と，v-t グラフの「たて×よこ＝面積」の両辺がそれぞれ対応していることを，授業書の書き方は不十分であったが確認し，

不等速運動の場合も同様ではないかと推測させた。

問題2－2は(1)の階段グラフを直線にした者が多かった。中間の値も入れた対応表を先につくっても良かったと思われる。(2)の距離については，すぐに求めた者もいたが，多数は「かけてたす」ことに気付かせることが必要であった。(3)についてはD組で「穴うめ」，B組で「Aをひっくり返してBとあわせれば長方形になる」などと，$v(t)=2t$の，上下からの近似であることには気付いたようである。しかし，ここから27ページの練習問題へ，さらに28ページの無限小への移行にあたって「もっとくわしく求める方法はないか」との問いに答える者がいなかった。このことはもちろん，詳しく求める必要性を十分に示し得ていないことによるが，この点についての認識状況を把握すると同時に，生徒に考えさせるうえでも，ここでより詳しく求める方法について書かせることが有意義ではなかったかと思われる。

29ページの計算練習問題を指導したあと，問題2－3はすぐに答を求めた者もかなりいたが，t秒後の速度が$2t$で，これが三角形の高さにあたることを確認すると，ほとんどの者が計算していた。ここでD組では七田がおもしろいことを言いだした。

「なんだ，簡単じゃないか。(29ページの発展問題は）暗算でできるよ。t^2だべ，$8\times8=64$，$2\times2=4$って，引けばいいべや」

すなわち，七田は定積分と不定積分の関係が理解できたのである。これは31ページで説明する内容に他ならない。そしてまたこのことは，変数としての文字の意義のひとつであり，中学校でも出てくる内容を，積分法を学ぶなかで，いわば高いレベルから捉えなおすことになっているともいえよう。

§2の終了後，やはりこれまでと同様に〈課題2〉について書いてもらった。まず，この節の中心的テーマである問題2－0についての予想分布は表10の通りで，B組については当初の予想と変更後の予想が混ざっていると思われる。予想の理由については，ほぼ授業過程で出された通りであると思われたので，理由を書く欄を設けず，その後の考えの変化を主に見ようとしたのであるが，結果的には理由だけしか書いていない者も多く，やはり両方の欄が形式的にでも必要であった。

表10　問題2－0(P.21)後

	D組	B組
ア 1500 m	6人	23人
イ 3000 m	22人	4人
ウ 4500 m	6人	14人
エ 6000 m	1人	1人
オ それ以上	1人	0人
無記入	2人	0人

〈課題2〉　2年　組

1　21ページの問題2－0で，あなたは最初どの予想をたてましたか。また，討論や授業のあと，考えはどう変わりましたか。
○最初の予想　ア，イ，ウ，エ，オ（○をつける）
○討論や授業のあと

2　§2（21～35ページ）の内容について，思ったことを何でも良いですから書いて下さい。

アを選んだ理由については，授業と同様「0秒から10秒間までが約500として，30秒間は3倍のきょりになるから答えはアになった」(B星）などというものばかりであった。

イ，ウ，エの理由についても変化はない。

「はじめは10秒で500 mおちるから30秒で1500mで，加速がつくから3000mかと思ったけれど，計算で4500mにもなるとは思わなかった」

（D本郷――イ）
「最初からウかエのどちらかだと思っていたが，エはあまりにもおおきすぎるのでウだと思った。自分のかんがえがあっていてうれしい」（B石川――ウ）
「時間がたつにつれて速度が速くなるのだから，㋐3000m（ママ）でないことは見当がついたけど，㋒か㋓か迷って多い方が正しいと思い，㋓に○をつけたが，授業をやっているうちに中学校の科学で習ったのを思いだしたのでだいたいわかった」（B水野――エ）
オの「それ以上」は授業のときには0名であったが，ここではじめて1人あらわれた。
「10秒後までに500ｍ落下する実験なんてできるわけないし，ましては30秒後のきょりなんてそうぞうがつかないから……オだと思った」（D栗原）

授業後の考えの変化については，結論だけ書いた者が多かったが，内容を書いたものもいくつか見られた。
「いわれてみて，アッそうかと思った。とうぜんながら落下速度は時間がたつにつれて速度は増すのはあたりまえだった。しかしそのあたりまえのことがわからないんだから」（D山下――ア。B鳥瀬，D高山――ア，D藤田，若松――イも同様）
「ちょっとむずかしかったけど簡単なものからやっていったら理解できてきました」（D石川――ウ）

また，授業書の弱点をついた記述も見られる。
「ほかの問題をやっている時，ぜんぜんこの問題のことを意識して考えていなかったので，ただ最終的に，答えがウであって，予想がはずれたという感じ」（D小林――イ）
実際，21ページの問題２－０の解は，33ページの〈研究〉まで明らかにされていないのであり，なかなか目標に達しないうちに忘れてしまった者も少なくないだろう。問題２－１を，この問題に直接続けた方が良いかも知れない。

さらに，「結局落下していくにかわって，早さが早くなってばいになっていく」との誤解，また，「どうしてウか良くわからない」などと書いた者も計10名あり「距離が時間の２乗に比例する」ということをはっきりと定式化する必要があると思われる。このためには，問題２－０でk倍のk倍であることをより印象づけるうえでも，30秒間程度の落下距離ではなく60秒間程度，すなわち６倍の６倍となるような問題で，選択肢も，3000m，6000m，9000m，12000m，15000m，それ以上（正解は18000m）などというようにしたい。散策路その２も，ガリレイの「三角形の面積」，２乗に比例の法則を中心にした方が良いだろう。もちろん，ガリレイにおいては不十分であった無限小についても，ライプニッツ等につながる話題として加えたい。

つぎに，§２の感想についてであるが，感想文も回を重ねるごとに書く量が減りつつある。
「このようなものを何回も何回もやると，みんなまじめにかかなくなると思います」（D石川）
と，きびしい指摘もあり，何らかの工夫が必要であろう。それでも，感想の分析からいくつかのことは見いだすことができる。個々の内容について記した者は少

表11　§２の感想

内　　容	D組	B組
問題２―０にふれた者	2人	0人
問題２－１にふれた者	0人	0人
問題２－２にふれた者	1人	0人
問題２－３にふれた者	3人	3人
わかりやすい・簡単だ	2人	13人
やさしいがむずかしい	2人	5人
わからない・むずかしい	9人	12人
計算はわかる	8人	6人
計算がややこしい	1人	0人
その他	3人	2人
無記入・感想なし	7人	2人
計（重復あり）	38人	42人

ないが，問題2－3の不定積分については「あまり良くわからない」が1名のほかは，5名とも積極的な評価を下している。

「不定積分の所など，tを2乗したら答えが出ることなど，かんたんな方法もわかり楽しかった」(D崎野)

「三角形の面積を計算でやるよりも，$S(t)=\int_0^t 2tdt$を計算した方がかんたんに解ける。」(B星)

などで，これらは先に授業過程の分析の際に紹介した七田の発言とも対応している。

全般的な感想については，D組で肯定的なものが少ない。これは，授業が毎回D組を先行させていること，またD組では欠席者が多いことなどに関連していると思われる。もっとも，両クラスともわからない内容を具体的に書いているものは少なく，つぎの4名だけであった。

「25ページの時刻0～10秒の間に進んだ距離を求めよというところで，どうして面積を出してぜんぶをたしたら距離になるのかあんまりわからない」(1名)

「不定積分の求め方があまり良くわからない。」(1名)

「33ページの問題がわからない」(2名)

階段関数の積分については，それ以前の等速運動する物体の進む距離と長方形の面積との関係についての説明が，D組では不十分だったようである。33ページの〈研究〉は，三角形を用いる方法と公式による方法がともに生徒から出されたので混乱したものと思われる。

注目されるのは，多くの生徒にとって考える問題よりも計算の方が得意であるという傾向である。

「最初のうちはまったく何をどういうふうにやったらいいかわからなかったけれど練習や問題をやったら，なーんだ，こんなことかと思った」(B武田)

「最初グラフの時はよくわからなかったけど，だんだんわかってきた」(D太田)

「29ページあたりの計算問題なら簡単だったけど，その前の方は良く理解できなかった」(D高山)

この傾向は，これまでに受けてきた数学教育の結果として身についてしまったものであろう。

最後に，積極的な感想の中からひとつ，原文のまま引用しておこう。

「やっぱりさいしょはだれでもむずかしいと思うがやればやるほどやさしくなる。さいごのもんだいになるとさいしょからみるとむずかしいが，こう式をおぼえてしまうとなんぼおうよう問題でもこう式にあわせるとかんたんになる。2年生になってやったなかで一ばんむずかしかったと思う」(B石川)

第3節　速度を求める――二次関数の微分法

§3の目標を示す問題3－0の予想分布は，表12の通りである。両クラスの傾向は似ているが，D組では多様な考え方が出され，討議が深まった。アを選んだものは，9cm÷3秒と，3秒間の平均速度を求めたのであり，イの理由は「2秒から3秒間に進むのが5cmだから5cm/秒」。またオについては「tが3のとき$S(t)$が9だから9cm/秒」と，それぞれの理由が出されたが，これに対してウを選んだ者の中から思いがけない意見が発表されたのである。

表12　問題3－0 (P.36)

	D組	B組
ア 3cm/秒	21人	14人
イ 5cm/秒	1人	0人
ウ 6cm/秒	6人	8人
エ 7cm/秒	0人	0人
オ 9cm/秒	5人	11人
カ その他	0人	0人

「落下運動は10秒間に約500m落下すると書いてあるから，500

m÷10秒＝50m/秒となるけど，10秒後の速度が98m/秒というから50の約2倍でしょ。だから9m÷3秒＝3cm/秒，3cm/秒×2＝6cm/秒」(佐藤功)
佐藤は，t秒後の瞬間速度＝0〜t秒の平均速度×2という法則を，授業書の記述の中から発見したのである。また，「瞬間」の矛盾に気づいて，その他へ変更する者も現われた。
「速度ってのは，何秒から何秒の間で求めるけど，これはどこからって書いてないから，求められない」(七田)[3]

一方，B組でもアとオについての理由は同様で，ウを選んだ者の理由は，2秒〜3秒の平均速度の5cm/秒と，3〜4秒の平均速度の7cm/秒の中間で，6cm/秒ということであった。B組では予想変更が多く，結局は，ア：23人，ウ：13人，オ：2人となった。ここでは結論は出さないが，オの理由は距離を速度と混同していること，またアの3cm/秒はこの3秒間の平均の速度であって，3秒後の速度ではないことについて説明しておいた。

これまでに何度も見られた距離と速度の混同について，この誤りをうきぼりにしたのが問題3－1であった。もっともB組にはD組から情報が流れたらしく，期待通りにはいかなかったが，このことは，彼らのこの授業に対する関心の大きさを示しているともいえよう。(1)で3〜3.1秒の平均速度を6.1cm/秒と求めてから，(2)を予想させたところ，表13のような分布となった。カを選んだ理由としては
「少しずつ増加するんじゃないかと思った」(高山)
エの理由を述べる者はなかった。これに対してウを選んだ者は，
「時間が$\frac{1}{10}$だから速度も0.61になるけど,0.1秒は0.01秒より多いからやっぱり距離は進んでいる」(谷地中，他)

表13　問題3－1(2)(P.38)

	D組	B組
ア $\frac{1}{10}$より小	0人	1人
イ $\frac{1}{10}$	0人	0人
ウ $\frac{1}{10}$より大	34人	0人
エ 同じより小	5人	6人
オ 同じ	0人	7人
カ 同じより大	3人	23人
キ その他	0人	0人

というように，時間が$\frac{1}{10}$になれば距離も約$\frac{1}{10}$になることから，多くの者は速度も$\frac{1}{10}$程度になると考えているのである。一通り意見が出たあと，「ウはまちがいです」と言うと，「あれっ，まちがいなの？」と不思議そうであった。計算の結果──小数の乗除算を黒板でていねいに説明しなければならなかったが──6.01cm/秒と求められ，エが正解であることが確認された。B組へは誤った情報が伝わったようで，カが多く計算してエが正しいことを説明するにとどまった。

ところで(4)の計算のとき，D組では七田がつぎのように言っていた。
「これ，2.999999……ってずっとやっていったら3秒後の瞬間速度になるんじゃないか」
(5)でもD組では約6cm/秒というものと，ちょうど6cm/秒というものがあり，とくに加藤は
「だって絶対6にはならない。どうやっても」
と，強く主張した。B組でもまた，(5)では「0.000000……秒でやれば……」との声も出たり，ちょうど6cm/秒か，約6cm/秒かの論争にもなった。
「6.001は，0.001をひけば6になるし，こっちは5.999に0.001をたせば6になるからちょうど6cm/秒」(八反田)
「物体は常に動いているから，ちょうどにはならない」(村田)
B組では，どちらを選ぶか聞いてみると，ちょうど6cm/秒が21人，約6cm/秒が8人となった。

40ページの質問に対する分布は，表14のように分かれた。瞬間における運動と瞬間速度の存在を前提に指導するよりも，

表14　(P.40)の質問

	D組	B組
ア ニュートン	5人	16人
イ ライプニッツ	25人	24人

哲学的矛盾とかかわる問題である以上，生徒間の議論を通じて認識を深めさせることに意義があると思われるし，実際議論になるのである。D組では

「ぱっと見ると止まって見えるから」

との，アの意見に対して，

「止まってるのはなんぼたっても動かないべや」

と，すぐに反論が出され，B組でもはじめアを選んだ小松が，

「カメラで写真をうつしたら……ブレるよな。あっ，まちがえた」

とイに変更するなど，楽しい授業になった。つづいて，

P　瞬間っていえばなあ，時間があるべや。

T　あ，瞬間に時間ある？

P　瞬間ちゅうのには時間がないのか？

T　じゃあ，どれくらい時間がある？

P　わからないけど，なんぼか時間がある。

このようにして，瞬間速度を「無限小時間における平均速度」として微分法へと続けていった。

問題3―2の(1)は，文字計算の復習もかねて，ていねいに $\dfrac{6dt+dt^2}{dt}=6+dt$ と求めていったのであるが，$\Delta t=3+dt-3=dt$ と求めるところで，D組では佐藤功が「0。ずれてないべや。」つまり，3から $3+dt$ の間は，ずれていない，差が0であるという。ここのところで $dt=0$ とすると $\dfrac{0}{0}$ となってしまうわけでまだ早いのであるが，(2)の瞬間速度を考えるところでは，この考えが生かされた。ここから先は，計算は繁雑になるが考え方は基本的には変わらない。

45ページの計算練習⑤から問題3―3にかけて，微分係数から導関数へ移行するために計算する前に予想させたが，多くの者はどんどん機械的に計算を続けて行った。問題3―4は，§3の中で最も面倒な計算で，あとはこれを公式として用いれば微分計算は不用となるが，ここでは $\dfrac{2atdt+adt^2}{dt}=2at+adt$ の，adt の扱いが質問として出された。無限小を有限個加えてもやはり無限小で，ほとんど0であることを確認した。

表15は，51ページの質問に対する意見分布を示すものである。すでにライプニッツ流の計算を行なってきているので，ライプニッツの方がなじみやすいのであろう。ほとんど討論はできなかった。

表15　質問(P. 51)

	D組	B組
ア ニュートン	1人	13人
イ ライプニッツ	多数	19人

〈課題3〉を課す時間が前述の通り不足して，認識状況をより詳しく把握することはできなかったが，授業過程の分析からいえることをみていこう。まず，あらかじめ明らかであったことであるが，§3においては§2における $v-t$ グラフにあたるイメージが欠落している。$v-t$ グラフの使い方や接線の有効性などもふくめて，検討する必要があるだろう。これが欠けているために，「計算の意味」が忘れられがちであった。

さらに，微分計算における「無限小」の位置付けを極限概念との関連もふくめて，より明確にする必要があると思われる。41ページの「対話」や散策路その3，2つの質問なども，新たな視点から統一的にまとめる必要があるだろう。

第４節 評価テストと感想文

評価テストは，主として基本的な計算に関する理解の状況の分析から，授業書のこの側面に対する評価を行なうために，§１，§２については３学期中間試験（２月16日），§３については学年末試験（３月19日）の一環として実施された。

§１，§２ 評価テスト

（Ｂ組42名，Ｄ組37名）

1 等加速度運動の速度と加速度について，次の問いに答えよ。

(1) 下の対応表は，ある等加速度運動における，時刻と速度の関係を示したものである。この等加速度運動の加速度を求めよ（単位も付けること）。

時刻 t 秒	0,	3,	6,	9,	12,	…………
速度 $v(t)$ cm/秒	0,	15,	30,	45,	60,	…………

正答：5 cm/秒²

	Ｂ 組	Ｄ 組
○ 5 cm/秒²	22名(52.4%)	21名(56.8%)
5 cm/秒	9名(21.4%)	7名(18.9%)
45cm/秒	2名(4.8%)	2名(5.4%)

(2) 次の対応表に表わされた等加速度運動について，$v(t)$をtの式で表わせ。

時刻 t	0,	5,	10,	15,	20,	…………
速度 $v(t)$	0,	20,	40,	60,	80,	…………

正答：$v(t)=4t$

	Ｂ 組	Ｄ 組
○ $v(t)=4t$	14名(33.3%)	12名(32.4%)
$v(t)=4$	8名(19.0%)	6名(16.2%)
$v(t)=4t^2$	2名(4.8%)	

(3) 加速度 3 cm/秒²の等加速度運動をする物体の，運動をはじめてからt秒後の速度を$v(t)$cm/秒とする。$v(t)$をtの式で表わせ。

正答：$v(t)=3t$

	Ｂ 組	Ｄ 組
○ $v(t)=3t$	12名(28.6%)	17名(45.9%)
$v(t)=3$	3名(7.1%)	1名(2.7%)
$v(t)=3t^2$	4名(9.5%)	2名(5.4%)

2 自由落下運動する物体の，落下をはじめてからt秒後の速度を$v(t)$m/秒とすると，およそ次の式で表わすことができる。

$$v(t)=10t$$

（より正確には $v(t)=9.8t$ であるが，計算を簡単にするため，$v(t)=10t$ とする。）

この物体の落下する距離について，次の問いに答えよ。

(1) この物体が，落下をはじめてからt秒後までに落下する距離を$S(t)$mとする。$S(t)$を積分計算により求めよ。

$S(t)=\int \quad dt=5t^2$ （$4.9t^2$も可）

§１，§２の評価テストの問題と生徒の解答の状況は左に示した通りである。なお，この範囲の授業時数はＢ組が11時，Ｄ組が14時であり，原則として２時以上の欠席者については６問以上正答の者以外は除外（Ｂ組５名，Ｄ組10名）して集計した。これは授業書に対する評価のためであり，欠席の多い者に対する指導はまた，別の問題であろう。

１は§１の問題であるが，(1)については単位のミスを見のがせば正答率は７割をこえる。しかし，(2)，(3)の正比例関数を求める問題は授業の場合と同様にできていない。もっとも，問題練習はしていないのであり，授業書の中でも扱った方が良いかも知れない。

２よりも３，４の単純な計算問題の方が正答率が良いのは自然なことともいえるが，逆に２の正答率の低さは，距離を求めることと積分計算とが十分に結びついていないともいえる。計算以前の積分の意味にかかわる授業書の弱点の現われと考えられる。

３，４の正答率は十分なものであろう。４の(3)は計算が複雑だからやむを得ない。

５は，どれだけ自分のことばで説明できるか試す設問であ

	B　組	D　組
○$5t^2$, $4.9t^2$	25名(59.5%)	16名(43.2%)
$\frac{1}{2}t^2$	3名(7.1%)	
$10t^2$, $9.8t^2$	2名(4.8%)	5名(13.5%)

(2)　この物体が10秒後までに落下する距離 $S(10)$ を求めよ。

$S(10)=$ $\boxed{\text{500 m　(490も可)}}$

	B　組	D　組
○ 500, 490	22名(52.4%)	20名(54.1%)
100, 98	7名(6.7%)	8名(21.6%)
50	3名(7.1%)	4名(10.8%)

(3)　この物体が20秒後までに落下する距離 $S(20)$ を求めよ。

$S(20)=$ $\boxed{\text{2000m (1960も可)}}$

	B　組	D　組
○2000, 1960 △計算ミス	16名 2名 (42.9%)	14名 1名 (40.5%)
200, 196	4名(9.5%)	5名(13.5%)
400, 392	3名(7.1%)	7名(18.9%)

3　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int_0^t 12\,t\,dt=6\,t^2$

	B　組	D　組
○ $6\,t^2$ △計算ミス	34名 2名 (85.7%)	29名 2名 (83.8%)
$3\,t^2$	3名(7.1%)	

(2) $\int_0^t t\,dt=\frac{1}{2}\,t^2$

	B　組	D　組
○$\frac{1}{2}\,t^2$ △計算ミス	33名 3名 (85.7%)	28名 2名 (81.1%)
t^2	2名(4.8%)	

(3) $\int_0^t\ gt\,dt=\frac{1}{2}\,gt^2$ (g は定数)

	B　組	D　組
○$\frac{1}{2}\,gt^2$ △計算ミス	34名 3名 (88.1%)	27名 1名 (75.7%)
$9\,t^2$		3名(8.1%)

4　次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^5 4\,t\,dt=50$

	B　組	D　組
○50 △計算ミス	31名 1名 (76.2%)	27名 1名 (75.7%)
100	2名(4.8%)	
$50t$		2名(5.4%)

り，高い正答率は期待していないが時間不足のためもあってか，無答もＢ組25名，Ｄ組21名（集計除外者もふくむ）と多い。また，「ムムこれは頭のもんだいだー。」との走り書きも見られ，このような問題に対してとまどう者も多かったと思われる。いくつかの解答のパターンがあり，それぞれ典型的なものを紹介しよう。

「普通の等速度運動の進む距離は速さ×時間ででるが，この等加速度運動を同じ計算で出すこはできない。しかしこのような不等速運動でも，無限に小さい時間の中では等速運動をしていると考えられる。すなわちグラフの $v(t)=2\,t$ の直線上で，無限に小さい時間×速度を０から10まで順番にもとめて行き，最後にたしあわせるとおおよそ

$\int_0^{10} 2\,t\,dt$と等しい値になるはずである。したがって，等速運動を求める時に出来る四角形を２等分にした三角形の形であらわせられる」（Ｄ山田）

「$v(t)\times 1$ と長方形の面積をだすと１秒間の進んだ距離がでる。そこで１秒の間で10秒間たすと物体が10秒間で進んだ距離がでる。でも $v(t)=2\,t$の式から長方形のかどがすこしでる。そこで t の１秒間を0.5秒ずつにするとかどはなくなり，10秒間をたしたかたちが三角形にちかずく。こうやっていくと $v(t)$のあたい×t のあたいで大きな長方形を作り，２でわると三角形のかた

(2) $\int_0^6 2\,t\,dt = 36$

	B　組	D　組
○36	30名 (73.8%)	27名 (75.7%)
△計算ミス	1名	1名
36 t		2名 (5.4%)
6		2名 (5.4%)
72		2名 (5.4%)

(3) $\int_3^5 2\,t\,dt = 16$

	B　組	D　組
○16	20名 (57.1%)	24名 (67.6%)
△計算ミス	4名	1名
25	4名 (9.5%)	
8		3名 (8.1%)

5　t 秒後の速度 $v(t)$ が，$v(t)=2t$ で表わされる等加速度運動で，0～10秒の間に物体が進む距離 $\int_0^{10} 2\,t\,dt$ は，なぜ，0～10までのv-tグラフの下の三角形の面積で表わされるのか，説明せよ。

	B　組	D　組
◎階段形の極限 ◎無限小長方形の総和	3名 (7.1%)	11名 (29.7%)
○等速運動の場合面積だから	6名 (14.3%)	2名 (5.4%)
三角形の面積で表わされる	5名 (11.9%)	3名 (8.1%)

ちであらわされることができた」（D本郷）

「物体が進む距離というのは，たて×横，つまりたてが速度で横が時間というので，距離＝速度×時間というぐあいに出される。しかし等加速度運動というのは図でかくと $v-t$ グラフのように三角形が出来る。だからその三角形の面積を出すとA（答 ―― 引用者）がでる。距離＝速度×時間では長方形になるので，それを三角形にするにはそれを半分にするとAがでる」（B斉藤敦）

無限小長方形の総和が三角形ととらえるタイプと，階段形の極限として三角形をとらえるタイプがそれぞれ出てきたのは興味ぶかい。斉藤のように，「$v-t$ グラフが三角形だから」などと積分の考えを使わずに直観的に説明する者も少なくない。

つぎに§3に関する評価テストの結果をみていこう。§3の授業時数はB組が8時，D組は9時であり，ここでも2時以上の欠席者および前回のテストの集計除外者については，5問以上正答の者以外は除外（B組4名，D組9名）して集計した。

1の微分計算は，授業書だけでもかなり練習になったためか，計算の繁雑なわりには良くできているといえよう。逆に，2，3は公式さえ知っていれば積分計算同様の7～8割の正答率となっておかしくない。D組の正答率が低いのは，授業書の問題3－4以降，これを公式として適用する練習問題のないことと対応していると思われる。B組では若干これを補足したが，導関数を求め，さらに微分係数

§3　評価テスト

（B組42名，D組38名）

1　t 秒後までに進む距離 $S(t)$ cmが，$S(t)=t^2$ で表わされる等加速度運動について，次の問いに答えよ。

(1)　3秒後の瞬間速度を，微分計算 $\left(\dfrac{\Delta S(3)}{\Delta t}\text{ から }\dfrac{dS(3)}{dt}\text{ を求める}\right)$ により，求めよ（単位はつけなくてよい。以下同じ）

t　秒	3　，	3 + dt
$S(t)$ cm		

$\dfrac{dS(3)}{dt} = 6$

	B　組	D組
○6	37名 (73.8%)	21名 (57.9%)
△計算ミス	4名	1名
6×3＝18		4名 (10.5%)

(2)　t 秒後の瞬間速度を，微分計算により求めよ。

t　秒	t　，　$t+dt$
$S(t)$cm	

$\dfrac{dS(t)}{dt}=2t$

	B　組	D　組
○2 t △計算ミス 2	26名 4名 } (71.4%)	14名 8名 } (57.9%) 3名　(7.9%)

(3)　t 秒後までに進む距離 $S(t)$cmが，$S(t)=3t^2$ で表わされる等加速度運動について，t 秒後の瞬間速度を微分計算により求めよ。

t　秒	t，　$t+dt$
$S(t)$cm	

$\dfrac{dS(t)}{dt}=6t$

	B　組	D組
○6 t △計算ミス 6	20名 9名 } (69.0%)	11名 9名 } (52.6%) 2名　(7.9%)

2　次の関数について，導関数 $S'(t)=\dfrac{dS(t)}{dt}$ を，それぞれ求めよ。

(1)　$S(t)=7t^2$

$S'(t)=14t$

	B　組	D　組
○14 t	35名　(83.3%)	18名
△計算ミス		1名 } (50.0%)
14	2名　(4.8%)	6名　(15.8%)

(2)　$S(t)=2t^2$

$S'(t)=4t$

	B　組	D　組
○4 t	35名　(83.3%)	21名
△計算ミス		1名 } (57.9%)
4	2名　(4.8%)	7名　(18.4%)

3　次の関数について，与えられた t の値における微分係数をそれぞれ求めよ。

(1)　$S(t)=3t^2$の，$t=4$ における微分係数 $\left(S'(4)=\dfrac{dS(4)}{dt}\right)$

$S'(4)=24$

	B　組	D　組
○24	27名	19名
△計算ミス	2名 } (69.0%)	1名 } (52.6%)
8	2名　(4.8%)	4名　(10.5%)
12	4名　(9.5%)	

(2)　$S(t)=4t^2$の $t=5$ における微分係数 $\left(S'(5)=\dfrac{dS(5)}{dt}\right)$

を求める練習が不足したため，3の正答率が2よりも低くなっている。

4は，積分法の場合と同様，速度を求めることと微分計算との関係の把握が弱いことが，2，3よりも正答率の低いことに現われている。

ここでも，5はどれだけ書けるかを見るための設問であるが，やはり無答がB組25名，D組22名と多い。しかし積分法のときよりも詳しく書いている者が多かったように思われる。このような「書く問題」は，授業書の中にもとり入れたい。これについてもまた，いくつかの解答のパターンがある。典型的なものを引用しておこう。

「……(前略) そして $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}$ にしてわってやると，そうすると $6+dt$ になる。この dt は無げんしょうだからけしてもよい。おわり。これでおれはわかるから○をくれ」(D佐藤功)

「3秒後から，0.1……6.1，0.01……6.01，0.001……6.001，0.0001……6.0001，0.00001……6.00001，とだんだんこのように近づけていったら6cm/秒になるということが，数学者N氏の言うことです。つまり無限小が起こることによって6cm/秒に近くなる。ようするに倍率をさげていったら6cm/秒にはならなくてもそのふきんには近づく。」(B鳥瀬)

「$S(t)=t^2$の運動の3秒後の瞬間速度は，まず初めに3秒後

$S'(5)=40$

	B 組		D 組	
○40	26名	(64.3%)	17名	(50.0%)
△計算ミス	1名		2名	
10	3名	(7.1%)	4名	(10.5%)
80	2名	(4.8%)	2名	(5.3%)

4 自由落下運動する物体が，落下をはじめてから t 秒後までに落下する距離 $S(t)$ mは，およそ

$$S(t)=5t^2$$

と表わされる（より正確には $S(t)=4.9t^2$ であるが，ここでは計算を簡単にするため $5t^2$ とする)。

(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

$v(t)=10t$

	B 組		D 組	
○$10t$，$9.8t$	16名	(42.9%)	15名	(42.1%)
△計算ミス	2名		1名	
$5t$，$4.9t$	6名	(14.3%)	5名	(13.2%)
10，9.8	5名	(11.9%)	4名	(10.5%)

(2) 3秒後の速度 $v(3)$ を求めよ。

$v(3)=30$

	B 組		D 組	
○30	18名	(45.2%)	12名	(44.7%)
△計算ミス	1名		5名	
15	2名	(4.8%)	5名	(13.2%)
6	3名	(7.1%)		

5 1の(1)…… $S(t)=t^2$ の運動で，3秒後の速度を微分計算により求める問題を例にして，瞬間速度を求める方法を，わかりやすく説明せよ。

	B 組	D 組
◎平均速度の極限 ◎無限小時間の平均速度	16名(38.1%)	9名(23.7%)
○計算方法の説明	3名(7.1%)	2名(5.3%)

から3＋dt（無限小）秒後までにすすんだ距離をもとめる。すなわち3秒後から3＋dt秒後までの平均速度を計算すると6＋dtとなる。dtは無限小だから無視して考えると瞬間速度は6となる。

t	3………3＋dt
$S(t)$	9…9＋6dt＋dt^2

本当は3秒～3＋dt秒後までの平均速度は6にはならないのだが，dtが小さければ小さいほど6にちかづくので，この値＝6を3秒後の瞬間速度という」(B水野)

佐藤タイプは無限小時間における平均速度として，鳥瀬タイプは平均速度の極限としてそれぞれ瞬間速度をとらえたものである。水野はこの両者を説明している。また，計算方法だけ説明したものもあった。

さて，評価テストの結果については，全体的にすでに授業過程の分析の項で明らかにされた授業書と授業過程の弱点を反映しているということができるが，特徴的な誤答の傾向などはほとんど見られず，評価に付け加えるべき内容はとくにない。

つぎに感想文であるが，これは§2の評価テストのあとに書いてもらったものである。分類すると表16のようになった。個別の内容に対する評価ものべ42人あったが，12の項目に対して異なる評価がなされ，特定の傾向は見られない。感想も，52ページの授業書に関する，3か月余り20数時の授業を対象としたためか，一般的なものがほとんどであった。そして，両クラスともほぼ同様の内容であることが表からも読みとることができる。

ここでは，いくつかの展型的な感想文を紹介しよう。

「内容についてはおれ自身こういう問題や速度をもとめながら考えていくものにきょうみがあるのでおれ自身よかったと思う。また内容もこくてまたきょうみをさそうものもあったのでわかりやすかったし，また出題された問題をとくこともたのしくなってきたので今までの数学よ

りもとてもよかった。そして速度についてのこともわかるようになった」(D谷地中)

「今までの中で一番むずかしかったよーな気がする。だからもっとわかるよーに，くわしく説明などを書いてほしかった……。それと，計算問題をもっとふやしておぼえるようにしてほしかった――。やっぱ，計算問題をたくさんやれば，少しは頭に入るのじゃないかと思う。ちょびっこ理解できたナーと思ったらすぐ新しいのにいくから，中途半ぱで終わってしまうよーなかんじ……。もっとわかりやすく，みんなができるよーにくわしく授業のときでもおしえて下さい」(D菅原)

表16　全体の感想

内　　容	B　組	D　組
ある内容についてわかった	5人	12人
ある内容についてわからない	13人	12人
わかりやすい・良い	16人	12人
だんだんわかってきた	2人	4人
やさしすぎるのでむずかしく	1人	1人
かんたんなようでむずかしい	1人	1人
わかりやすく・くわしく	16人	10人
むずかしい・わからない	17人	12人
問題をふやしてほしい	7人	1人
くどい，もっと短く	1人	2人
その他	1人	1人
無記入	0人	1人
計(重複あり)	47人	46人

「私は授業中話をしてたり，さわいだりしてたので内容もよく知らないし，だから今回のテストも全然できませんでした。内容としては友達は『かんたんだ！』と言ってました。私もすこしおぼえやすい内容だな！と思います」(D追立)

「『二次関数と微積分』の授業を受けたがぜんぜんわかんなかった。これは先生の指導が悪いと思います」(B中上)

「dt (無限小) というものが出てくるし，計算がややこしいのでわかりにくかった。本をみるとなんとなくわかるんだけどそのかしょを終わってしまうと次から次へとわすれていく感じがする。とにかく難しかった」(B水野)

「等加速度運動の $v(t)=at$ のやった授業では1度中学校にやった時の等加速度運動とはやはりむずかしい記号などはあまり出てこなかったが，そこのところがちがう。微分・積分は高校の数学には絶対に出てくるところなのでとても関心がありました。でもファイル授業と普通の教科書と比べてみると時々思います。それは大学入試などの数学ができるのかと思うのです」(B鳥瀬)

注

1）これに先行する「二次関数と微積分」第一次プランが，1978年に同校の1年生を対象に実施されている。大田邦郎「解析学の基礎としての連続概念の指導――二次関数と微積分の関連を中心に」(北海道大学修士論文，1979年) また，大田「二次関数と微積分」(北海道高教組編集・発行『わかる授業民主的人格づくり』1979年)。

2）帰りの列車にたまたま乗りあわせたTは，授業中にみずから発言することがない生徒のひとりであるが，顔をあわせるなり「あの答，本当は何なの？」と話しかけてきた。ひとりひとりの生徒の認識状況は，とても授業の場面だけで捉えきれるものではないことがここからもうかがえる。

3）この授業については，鈴木秀一，大田邦郎「高等学校における授業の成立」(『現代教育科学』明治図書，1981年5月号) で別の視点から検討した。

第5章　まとめと今後の課題

本論文において作成した授業書「二次関数と微積分」は，実験授業とその結果の分析を通じて，いくつかの積極性と，いくつかの弱点が明らかになった。本章ではそれらについて整理

すると同時に，今後の授業書の改訂の方向などについてさぐっていきたい。

まず，積極的な面については，第一に等加速度運動の解析をベースとしたことがあげられよう。この点は，感想にも見られるように多くの生徒に歓迎されたばかりでなく，微積分の意味を理解するうえでの足がかりとして，授業過程全体を通じて位置付いていたことが，授業記録の中によみとられる。そしてこの第一の点とも関連するが，第二に，積分法の先行があげられる。B組の第一時で「なぜ $4.9t^2$ か」との疑問も出されたように，微分する対象となる関数を求めることを先に位置付けることは自然な発想であり，この順序で何ら混乱することなく授業が展開されたのである。第三の積極的な点は，積分法の指導に v-t グラフを用いたことであろう。発問や説明の不十分さから，距離と面積との対応関係をよく捉え切れていない生徒も少なからずいたが，それでも積分計算のシエーマとして活用されていた。

つぎに，授業書の弱点であるが，これについては積極面の裏返しでもある。第一に，運動の解析を足がかりとした微積分の諸概念が，力学から完全に自立していないという問題が残されているのである。個別の量的関係から出発したあと，一般の量的関係を反映した概念として自立した段階で，はじめて数学といえるのであり，この段階の指導まで射程に入れることが必要であろう。第二には，再三くり返すが積分法における v-t グラフにあたるシェーマが，微分法の指導に用いられていないことなどがあげられよう。

各§ごとにみていくと，§０は問題０－２，０－３の設定の仕方などの検討が小さな課題として残されている。

§１では，写真のブレと速度との関係についての説明の他に，問題１－３の発問の検討，さらに，多くの生徒の誤り（速度と距離の混同）の中にガリレイの初期の誤りとの共通性が見られることや，力と速度変化の関係についての論理的レベルでの説明を入れて，全体の論理構成を明確にすることが課題である。

§２については，物体の進む距離と v-t グラフの面積との関係について，とりわけ無限移行の必要性を示すような手だてをとる必要があった。「書かせる」問題の導入などもふくめて検討したい。また論理構成については，問題２－０の解は問題２－１で得られるようにすること，距離が時間の２乗に比例することが明確になるようにすることなどが必要であった。

§３は，シェーマの導入，導関数と微分係数の関係についての記述と計算練習の充実などのほか，無限小にかかわる問題について，よりコンパクトにかつ論点が明確になるように，発問と説明を工夫したい。

実験授業の評価の方法については，とくに高等学校における科学的な授業研究は着手してまだ日が浅く，さしあたっては本論文の第４章で展開したように，授業書の内容に即して，認識過程の分析を追求していくことが課題となろう。ここでいえることは，今回の実験授業でもそうであったように，授業過程にあらわれる発言などは生徒の認識状況のごく一部の反映にすぎないということである。書かせることによってかなり補足することはできても，文章にも表わされない認識状況まではいまのところ把握しがたい。むしろ，「書く」ことと，対象に対する「思考」との一定の相互規定性に依拠して，適切な発問を与えて書かせることを授業の中にもっと採り入れたい。これにより認識過程の組織とその評価とがある程度統一的に可能になると思われるのである。[1)]

さて，「二次関数と微積分」の改訂は当然の課題として，高等学校における解析学の指導は

これにつきるものではない。あくまでも二次関数は「入門」であり，さらに微積分の本格的な展開として「指数関数」の指導過程の研究，さらには「微分方程式」の初歩の指導の試みが課題として浮かびあがる。また，二次関数の前の「等速運動と一次関数」に関してもいくつかの問題が残されている。[2] そしてなによりも，解析学をつらぬく背景に「実数論」が横たわっており，さしあたっては「数とはなにか」というテーマを，解析学指導の中に位置づけていきたい。

最後に，この論文の作成にあたって北大教育学部教授学研究室を中心とする研究スタッフの皆さんの，長期にわたる指導と援助を得たことを，謝意とともに記しておきたい。また，この論文は数学教育協議会をはじめ，民間教育研究運動の成果に多くのものを負っている。さらに北星学園余市高の数学科の先生方はじめ，同校の教職員の皆さん，そしてだれよりも実験授業に全面的に協力し，率直な意見を述べてくれた同校の生徒の皆さんに心から感謝したい。

注

1）鈴木秀一，大田邦郎「授業研究と子どものノート」（『授業研究』明治図書，1980年11月号）参照。

2）われわれの研究室では等速運動の解析による「速さ」「正比例関数」「一次関数」の授業書が須田勝彦氏を中心につくられてきた。「二次関数と微積分」はこの延長上にあるとともに，高校数学への手がかりともなっている。