仮説の験証と「最尤法」の原理について

——M・G・ケンダールの「最尤法」論——

是永純弘

一、はしがき

英米派数理統計学の代表者たるR・A・フィッシャーが、数理統計学の推定論における母数推定の数理的手続として展開した「最尤法」は、最近、とくに英国の王立統計協会に属する著名な数理統計学者たちによつて、統計的推理論上の重要な問題として、とくに、科学的研究一般における仮説（「作業仮説」）の験証という科学方法論上の重要な問題との関連において、とりあげられている。

この問題についての有力な見解の一つとして、われわれは、「最尤法」の原理を「作業仮説」採択の基準としたR・A・

フイッシャーの「採択手続」(acceptance procedure) 論[1]、この原理の記号論理による定式化を試みた・G・Aバーナードの「見込み」説 (odds or lodds)[2]、R・カルナップの確率論的帰納論理学の統計的推理論への適用を試みたG・ティントナーの主張[3]とならんで、M・G・ケンダール（ロンドン大学経済学院）の「最尤法」論に注目しなければならない。けだし、ケンダールは、その論文「最尤法について」[4]において、「最尤法」の原理の数学的性格[5]ではなく、その論理的性格をあきらかにすることを目的にしつつ、とくに科学一般の仮説の験証においてこの原理がはたす役割をしめそうとしているからである。

本稿は、ケンダールのこの論文によつて、そのいわゆる「最尤法」とは何か、またそれは科学の仮説験証にとつていかなる意義をもつかという問題に対するケンダールの見解をあきらかにし、かつこれを吟味せんとするものである。ところで「最尤法」の原理を、統計的推理論の問題、とくに仮説験証の問題として考察することによつて、われわれは、数理統計学における統計的研究の論理的意義、とくに、自然及び社会の科学的研究において重要な役割を演じている科学的な仮説の構成とその実践的験証にとつて、数理統計学における統計的推理がいかなる意義をもつかをあきらかにすることができるであろう。

二、ケンダールの「最尤法」論

ケンダールによれば、最尤法 (Methdo of Maximum Likelihood) とは、「一推定値のとりうるいくつかの可能な値のうち、観測された事実に最大の確率を与えるものをとる」方法である。記号であらわすと、つぎのようになる。すなわち、観測値 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ を母数 θ なる母集団からの標本の実現値とすれば、連続度数分布 $f(x, \theta)\,dx$ において、右の観測値がえられる確率は、

$$f(x_1,\ \theta)f(x_2,\ \theta)\cdots\cdots f(x_n,\ \theta)\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n$$
$$=\prod_{n=1}^{n}f(x_n,\ \theta)\,dx_n = L\cdot\prod dx_n$$

であり、このLを最大にするようなθ（Lはθの函数と考えて）をとること、つまり、

$$\partial L/\partial\theta = 0$$

の解を求むることが最尤法である。(6)

これを簡単な例で説明してみるとつぎのようになる。今、赤白二種類のボールの入っている箱からn回ボールを一箇づつとり出し、r回赤いボールを得る確率を求めると、pを各回に赤いボールがえられる確率、qをその逆の確率（$q=1-p$）とすれば、求むる確率は、${}_nC_r q^{n-r}p^r$である（ベルヌーイの定理による）。この${}_nC_r q^{n-r}p^r$を、観測されたrについてのpの函数と考えれば、これは一定のpの値に対する尤度 (likelihood) である。pの最大尤度とは、${}_nC_r q^{n-r}p^r$を最大にするようなpの値である。最尤法とはこのようなpの値を観測値rについて求めることである。すなわち、

$$\frac{d}{dp}\,{}_nC_r q^{n-r}p^r = 0$$

を解くことである。${}_nC_r$は一定で、pと独立であるから、

$$\frac{d}{dp}\,{}_nC_r q^{n-r}p^r = {}_nC_r\frac{d}{dp}(1-p)^{n-r}p^r$$
$$= {}_nC_r q^{n-r}p_r\left[-\frac{n-r}{1-p}+\frac{r}{p}\right]$$
$$= 0$$

$$\therefore \frac{n-r}{1-p}=\frac{r}{p}$$

それ故 $\hat{p}=\frac{r}{n}$ になるような p の値 $\hat{p}$ がえられる。つまり一〇回の試行中二回だけ赤いボールが得られたとすれば赤いボールがえられる確率は、もともと $\frac{2}{10}$ であつたと推定するのが、この観測結果に最大の確率を与える（その値は ${}_{10}C_2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=45\times\left(\frac{4}{5}\right)^8\times\left(\frac{1}{5}\right)^2$）ような推定法になるというのである。

ところでこの「最尤法」に対して、ケンダールはつぎのような意味をあたえている。すなわち、「最尤法の原理は行為 (act) の過程をしめす」。そしてケンダールは、この原理の検討によつて「行為の規則 (rule of conduct)」が採用されるかどうかがあきらかにされたという。

いうところの「行為」とは、標本から母集団の母数を推定することにほかならないが、ケンダールは、この推定の行為を、一回の試行で母数の真値がえられる場合と、多数回の試行結果として母数の真値がえられる場合との二つにわけて、最尤法に関係があるのは、このうち後者、すなわち多数回の試行結果の方であると考える。つまり、最尤法は、多数回の推定行為の規則だというのである。

ところで、ケンダールは、この多数回の推定行為に、つぎのような仮説的母集団を対応させる。すなわち、「すべての推定行為をプールして構成した、一のより大きい母集団」（三八九ページ）がそれである。そしてケンダールは、この仮説的母集団を、一回一回の推定行為の背後にあつてその信頼性の基準となるものだと考える。したがつて、最尤法とは、この仮説的な母集団の分布型を想定することにほかならないということになる。すなわち、各回の推定行為がそれぞれ標本―母集団の関係を想定するとすれば、最尤法は、この標本―母集団関係を多数あつめて一体とした

母集団、いわばより高次の仮説的な母集団を想定することによつて、個々の推定行為を規制するというのである。

このように、ケンダールは、最尤法を、多数の推定行為をその項とする仮説的母集団の分布型の想定という意味に解釈する。そして確率を事象生起の相対的頻度の極限値だと考える立場、すなわち確率の頻度説をとる限り、最尤法にこれ以外の解釈を行なうことはできないという。(7) ケンダールは、「最尤法も確率と同様に頻度の概念にもとづいている」と明言して、彼自身の最尤法の解釈は、頻度説的解釈であるという。そこでケンダールは、確率を合理的信頼の尺度とみなす確率論——例えば、ジエフリースやケインズの確率論(8)——そのものに反対するので、この立場の確率論にもとづく最尤法＝換位確率推論という最尤法解釈を承認しない。ケンダールはいう「ジエフリース博士にとつては確率は合理的信頼の尺度であつたが、私がこの論文で試みているのは、推理の過程を頻度の概念にもとづいてあきらかにすることである。

このように、ケンダールは確率の頻度説に立つて最尤法を解釈するということをとくに強調している。しかし、何故に頻度説をとらねばならないか、また頻度説によると彼自身の最尤法解釈以外のものが許されなくなるのは何故か、ということに対しては立入つた説明をしていないが、とに角この立場からケンダールはつぎに最尤法適用の問題と、最尤法自身の妥当性の証明の問題を論じている。

ケンダールは、ここで、「最尤推定値は、その統計的性質にもとづいて評価されねばならないというバートレットの見解(9)や、シルヴアーストーンの見解に反対する。これらの見解は、最尤法の問題を、最尤推定値が充足推定値であつて、最小のカイ自乗に関係があるとか、最小分散推定値が存在すれば必ず最尤解が存在するとか、等々の数学的証明問題とみなし、それ以外の問題を考えていない。「しかし——とケンダールは言う——この方法(最尤法)を証明すると考えられた統計的性質は、実はこの方法から数学的に演繹されたものにすぎない。すべての数学は同義反覆で

あつて、数学は、この原理（最尤法の原理）から、その中にふくまれていないものをつくりだすことはできない。……いかなる数学の定理も、それが導かれたもとの公理を証明することはできない。しかし数学の定理が観測データとむすびつけられると事態はことなつてくる。この場合に採否を決定するテストは、数学的図式と現実との対応如何であるが、それは実験的証明の問題であつて数理論の問題ではない」と。（傍点、括弧内——引用者）

こうして、ケンダールは、最尤法の数学的証明だけで満足せずに、すすんでその適用結果の「実験的証明」という問題をとりあげる。これこそほかならぬ最尤法の原理を、「統計的仮説」の験証に具体化するというつぎの問題である。

いうところの「統計的仮説」とは、「母数の値にかんする命題のみに関係のある仮説」のことであると、一応の限定がなされるが、同時にケンダールは「殆んどすべての科学の法則の証明は、分析の最終の段階では、一定の母数がOであるか否かを決定することに帰着する」と考えているので、統計的仮説の範囲はきわめて広いことになる。

そこで最尤法を統計的仮説の験証ということに関連させて定義すると、最尤法は、「ある事象が、相互に排反する一組の仮説の一つ一つによつて説明される場合、われわれはそのうち被観察事象に最大の確率をあたえるような仮説（そういう仮説が存在するならば）を採る」ということになる。(10) そしてこれは、「最も確からしい事象は、もつとも頻繁に生起する事象である」という頻度説的な確率観(3)からの、直接的な論理的帰結であるとケンダールはいう。

ところが、この最尤法そのものが一の統計的仮説であるとしたらどうなるだろうか？　すなわち、「観察事象に最大の確率を与えるような仮説をとる」という仮説は、いかにして採られるのか？　これを最尤法で証明することはできない。けだし、もしそうすれば循環論法におちいるからである。そこで最尤法自身の妥当性如何という問題がとりあげられ、ケンダールはこれに以下のような解答を与える。

すなわち、最尤法そのものの妥当性は、有限回の試行では決して証明されない。最尤法そのものは「世界のあらゆる事象が一定の仕方で生ずる」ということの仮定、いいかえると、「最尤法にしたがつた場合の方が、他の方法にしたがつた場合よりも正しい結果がえられるように、被推定母集団が分布している」という仮定にほかならない。つまり、最尤法自身は、実験的に証明のできない一の仮定、「推定行為の母集団にかんする一の仮定」にすぎないということになる。その理由はつぎの通りである。

例えば、銅貨を投げてその表が現われる確率を推定しようとしても、真の確率は無限回の試行のうち表があらわれた回数の比の極限値であるから、有限回の試行でこの値を知ることは絶対に不可能である。これは無限母集団からの標本抽出の結果を実験的に験証することが出来ないのと全く同様である。最尤法自身の妥当性の証明も、全く同一の理由により、絶対に不可能である。

ところで最尤法がこのように実験的に証明のできない、前述のような仮定であるとすれば、確率の頻度説をとる者から、ベイスの定理における「事前確率均等の仮定」に対して向けられている非難は——R・A・フイッシャーのいわゆる帰納推理論はその一例である——見当ちがいのものになる。ケンダールによれば、最尤法もまたベイスの定理による換位確率の理論（フイッシャーのいわゆる換位推論）と全く同様に、一の仮定にもとづかざるをえない。このことをケンダールはつぎのように説明する。

今、母数をθ、尤度をLとすると、ベイスの定理におけるθの事後確率$P(\theta)$は

$$P(\theta)\propto L(\theta)$$

であたえられる。頻度説の支持者は、ここで事前確率$p(\theta)$が一定又は均等とされていることを非難するが、このθがより高次な母集団（その母数をϕとする）からの任意抽出の結果であるとしたら、頻度説の支持者自身が、このϕ

について一定の仮定を、すなわち、θの分布型とはことなつた一定の分布型の仮定をたてねばならない。

例えばθの値の母集団が連続分布している場合について、θの値の任意性を考えてみよう。線分MNの中点をOとし、[MNをn等分してえた$(n-1)$箇の各線分上に、任意の一点がおちる確率を相等しいとすると]、この点が線分OM上におちる確率は$1/2$である。ところが今、線分MNにNから垂線MPをたて$MN=MP$として、[$\angle MPN$のn等分線がMNを截る$(n-1)$箇の区間にこの一点がおちる確率を相等しいとすれば]、この点が線分OM上におちる確率は$\frac{\pi}{4}\tan^{-1}\frac{1}{2}$となつて前の結果と一致しなくなる。この不一致は上記の[ ]内の仮定が[11]、前と後とではことなるからである。これと同様のことが最尤法についてもいえる。事前確率均等の仮定がベイスの定理の結果を結実させるのと全く同様に、最尤法も仮定の内容こそことなれ、それが仮定であること自体をみとめないわけにはゆかない。の仮定こそ、ケンダールのいわゆる「推定行為の母集団においては事象の一定の状態が長い間にあらわれてくるだろうという仮定」である。

三、吟　味

最尤法についての以上のケンダールの見解を要約すると次のようになる。

(一)、最尤法は多数回の推定行為をその項とする仮説的母集団における母数の分布型にかんする一の仮定である。

(二)、最尤法は、個々の推定行為の規則として、個々の統計的仮説の験証の基準とはなりうるが、最尤法自身を有限回の試行によつて実験的に証明することはできない。

(三)、最尤法についての(一)、(二)、の主張は、確率の頻度説にもとづいている。

以下、この三点を順次吟味してみよう。

まず㈠について

ケンダールのいう「推定行為をその項とする母集団は、いかなる現実に対応するのか？ 同一の母数についての推定が反覆されるためには、この母数そのものに同一性、不変性がみとめられねばなるまい。推定行為の母集団の母数は反覆推定の過程でつねに同一、不変の母数をあたえるような諸母集団の分布を規定するものでなければならない。しかし第一に現実に観察された資料を標本とする第一次の母集団の母数が、時々刻々変化する存在の一側面を示すものだとしたら、つまり第一次の母集団が、何らかの意味で対象的母集団だとしたら、母数の同一、不変を前提することはできないのではないか？ 第二に、かりに推定がこうした同一不変の母数についておこなわれることが可能だとしても推定行為自身が一定の分布をするという仮定は、直ちには、承認できない仮定ではなかろうか？ 推定行為そのものの諸条件が必ずしも一定とは考えられないし、またとくに条件の変化が複雑なときほど、こうした推定行為はこのんで用いられるであろうからである。

推定行為の母集団という概念は、一見きわめて広い範囲の現象に対応するようにみえるが、実は、このように対象の運動を、きわめて一面的にしか、あるいは全く反映しないのではなかろうか？恰も、n次元の抽象空間が、対象の量的側面の一面的抽象の産物であるように！

次に、㈡について

以上のことは仮説の験証についても全く同様にあてはまるが、仮説にかんしては、とくにつぎのことが問題になる。

ケンダールは、すべての科学の法則が、結局は母数決定の問題に帰着するというが、これは科学の分析の頂点に、定量的分析をおくという一種の数理主義であつて、統計のもつ数量的な表現に幻惑されて、これに不当な権威を認め

がちなことから来る結果だといえないだろうか？

勿論、ケンダールが、バートレットやシルバーストーンに反対して、最尤法を推定論上の二三の純粋に数理的な手続に帰着せしめなかつたのは、もしケンダールが数理的手続の限界性を強調して、仮説又は法則の験証手段として、概念分析、実験、数理的方式によらない統計推理を念頭においていたためだとすれば、一応正しかつたといえよう。そしてこの限りでは、ケンダールの見解は、ピアソン・ネイマンの「統計的仮説検定論」や、ワルトの「統計的判定函数論」にくらべて、すぐれているといえるのではなかろうか？

しかし、このケンダール自身が、仮説を推定行為との関連において考察する際には、一定の限界、すなわち、経験論的な仮説観を克服しえなかつたのではなかろうか？　観測された事実材料または、統計によつて、ある仮説が淘汰され、排除され、他の仮説は訂正され、ついに法則が定立されるという過程で、互に相反する多くの仮説があらわれたとき、ケンダールは一体いかなる態度をとるだろうか？　彼はいう、われわれは決して真の値を知ることはできないので、たかだか、「最も確からしい事象は、最も頻繁に生起する事象である」という信念にもとづいて、「実際に生起した事象に最大の確率を与えるような仮説をとる」ことができるだけであると。つまり、われわれは結局、真理に到達することができないのである。真理の認識が不可能なため、ケンダールは、再び現象の世界にたちもどつて多数回生起する事象に救いを求める。しかし真なる値の認識は、必ずしも、試行の反覆に依存するものではなかろう。とりわけ歴史過程から一切の偶然性を捨象することによつて、その発展の合法則性を認識しなければならない場合には、事象の反覆性は決して真理性の最終の基準にはなりえないであろう。論理的なものは必ずしも確率最大のものではないから。

最後に、㈢について

最尤法についてのケンダールの主張が、一貫して、確率の頻度説の立場からみた最尤法論であつたことは、ケンダール自身がとくに強調した点であつた。その限りでは、たしかに確率を合理的信頼の尺度と考えて確率論を構成しその範囲内でのみ最尤法の問題をとりあげようとしたジエフリースは勿論のこと、一応は頻度説に立ちながら、なお、「尤度」を合理的信頼の尺度とみなすフイッシャーに対しても、ケンダールは批判的であつた。ということができよう。しかしながら、ケンダールは、確率の頻度説をとらねばならない理由をほとんどあきらかにしていない。頻度説そのものに対しては、何等の疑問もさしはさんでいない。ところが、前述の㈡について吟味したように、ケンダールが、一定の経験論的限界からしか仮説の問題を考えることができず、さらにまた、最尤法自体の妥当性の証明を不可能なりとしたのも、他ならぬこの確率の頻度説の論理的帰結であつたとは考えられないだろうか？

勿論、われわれは、ジエフリースやフイッシャーの立場にかえるものではない。けだし確率を合理的信頼の尺度と考えることは、単に上記の限界性や証明不能性の困難を回避して、確率を全く主観的な思弁の世界に追い込むにすぎず、ケンダールの見解以上に後退してしまうことになりかねないからである。

ケンダールによると、最尤法とは、「実際に生起した事象に最大の確率を与える仮説を採る」ことであつた、しかし、「仮説が確率を与える」というのは、ケンダールが、「確率は事象の客観的内的な特性ではなく、我々の実験によつて生ずる」と理解していることを物語るのではないか？　つまりケンダールは頻度説に立つて、確率の客観的性格までも否定し去つたのではなかろうか？

もしそうだとしたら、われわれは、やはりケンダールの説に反対する。けだし、確率はわれわれが実験する以前にわれわれの実験とは独立に、したがつて仮説設定からも独立に、客観的に事物がもつている性質であつて、多数回の試行によつてわれわれはますます正確にこの性質をあきらかにすることができると考えられるからである。頻度説の

困難は、確率のこの客観的性格を見失つたところに起因するのではなかろうか？
しかしながら、事物の確率を認識するということは、決して科学の法則や仮説の験証の全内容ではあるまい。法則や仮説の不充分さを確率でおきかえるという試み、例えは、推論を、論理プラス確率に等しいと考えることなどはきわめて非科学的な態度だといわねばなるまい。しかるにケンダールにおいては、最尤法は証明のできない究極の公理のごとき存在である。最尤法に対する絶対の信頼、これこそかえつてケンダールの頻度説の主観的性格を露呈したものと考えられないだろうか？(12)

四、むすび

以上要するに、M・G・ケンダールによれば、最尤法の原理とは、母数推定行為の一規則であり、母数の推定にかんする命題としての「統計的仮説」を統計的に験証する方法である。
ベイスの定理における換位確率の推論を攻撃するために、かえつて最尤法を過大評価してこれに帰納推理の資格をあたえたフイッシャーの誤り、最尤法の数理的展開のみに腐心する、ネイマン・ピアソン、ワルト流の純数理的最尤法論への偏向、公理論的確率論の無矛盾な体系における最尤法の同義反覆的「証明」を事とするジエフリース的確率論（確率=合理的信頼の尺度）の主観性、こうした誤謬に対しては、ケンダールはその経験論的な立場からたしかに一応正しい方向にあつたといえよう。
しかしひるがえつて彼自身の積極的主張をもつて、よく実践の験証にたえうる基礎概念によつて構築された統計的推理論とみなすことができようか、やはり否といわねばならないであろう。しかもその理由は、他ならぬケンダールの主張がよつて立つ経験論的な仮定のうちにある。けだし、一般に経験論的な立場にある論者がそうであるように、

ケンダールもまた、相互に排除しあう仮説の数が多く、またそれが交替してゆくという事実を前にすると、事物の本質を認識することができないと考え、ただ現象的記述の量を増すことしかできないと考えているからである。観察による経験だけでは、けっして必然性を十分に証明することはできない。推定行為の単なる反覆は、かくしてついに包括的理論の確立を断念し、現実的な経験とは正反対のものにまで転落する一面的な経験の無意味な累積になりはしないだろうか。

(1) cf. R. A. Fischer: "Statistical Methods and Scientific Induction", J. R. Statist. Soc., B 17, (1955).
尚、拙稿、「R・A・フィッシャーの『帰納推理論』と統計的仮説検定論について」(「統計学」、経済統計研究会刊、第一巻、第四号、四七―六四ページ、一九五六年）参照。

(2) cf. G. A. Barnard: "Statistical Inference", J. R. Statist. Soc., B 11, (1949).

(3) cf. G. Tintner: "Foundations of Probability and Statistical Inference", J. R. Statist. Soc., A 112. (1949).
R. Carnap: Logical Foundation of Probability, 1950.

(4) M. G. Kendall: "On the Method of Maximum Likelihood", J. R. Statist. Soc., (N.S.) 103, (1940), pp. 388-399.

(5) いわゆる統計的仮説検定論との関係においてのみ、「最尤法」を問題にする見解として注目すべきは以下のものである。
J. Neyman: "Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability", Phil. Trans., A 236.
E. S. Pearson: "Statistical Concepts in their Relation to Reality", J. R. Statist. Soc., B 17, (1955).（前掲拙稿参照）。
D. V. Lindley: "Statistical Inference", J. R. Statist. Soc., B 15, (1953).
A. Wald: Statistical Decision Functions, 1950.

(6) ケンダールの「最尤法」定義は、フィッシャーのそれと全く同一である。フィッシャーは、連続度数分布における最尤法を、つぎのような具体例で説明している。今ある液体中に存在する微生物の数を r、この液体を希釈度 α（通常一〇倍又は二倍）で希釈してえられる第 n 回目の希釈液からとられた標本の大きさを s_n、そのうち陰性の (sterile)、つまり微生物の存在しない標本

の数を t_n、その逆の陽性 (fertile) のそれを u_n、陰性の標本がえられる確率を P_n とすれば、第 n 番目の希釈液がえられる確率は

$$\frac{s_n!}{t_n!u_n!}P_n^{t_n}(1-p_n)^{u_n}$$

である。そこでこの希釈を無限回くりかえして（つまり原液を順次一〇倍、一〇〇倍一〇〇〇倍……と一〇 n 倍まで希釈）してえられる各段階の希釈液をその項とする観測系列がえられる確率は、（これをフィッシャーは尤度という）

$$\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{S_n!}{t_n!u_n!}P_n^{t_n}(1-p_n)^{u_n}=L$$

である。ところが第 n 番目の希釈液中に存在する微生物の数 m は、希釈の過程で特別の変化が生じない限り、$m=r\cdot a^{-n}$ であり、また第 n 番目の希釈液から陰性標本のえられる確率 P_n は $P_n=e^{-m}$（e は自然対数の底）である。したがつてさきの観測系列がえられる確率 L すなわち、尤度は、結局 r の函数となる。最尤法はこの場合、この L を最大にするような r の値を推定することである。

この方法は例えば、飲料水中の大腸菌検出のための細菌学的試験の一方法として利用され、一〇〇ccの検水を例えば一〇倍、一〇〇倍　一〇〇〇倍というように三段階に希釈し、各段階の希釈検水から五箇の標本をとり、そのうち陽性の標本数が例えば五—二—〇になるように希釈段階を選び、これに対応する検水一〇〇cc中の大腸菌群の「最確数」(M.P.N.=Most Probable Number) を「大腸菌群試験の最確数表」によつてきめるという仕方でおこなわれている。この場合、一定の最確数は、観察結果としての三段階希釈検水中の陽性数の系列に最大の確率を与えるような原検水中の大腸菌群の数の推定値、すなわち、最尤推定値にほかならない。

R. A. Fisher: The Logic of Inductive Inference (1935), J. R. Statist. Soc., 98, p. 51.

厚生省編、「衛生検査指針」Ⅳ、一九五〇年、協同医書出版社、一三八—一四五ページ。柳沢文徳著、「食品衛生」共立全書二七、一九五二年、一五四—一五五ページ、参照。

(7) 「私見によれば、確率の概念が、観察された現象の頻度についてのわれわれの経験にもとづいているということには、かなり多くの人が賛成している。投銭の場合、表の出る確率が二分の一だというとき、考えられているのは、もしきわめて多数回、投銭

をくりかえしたならば、表の出る回数が総回数の半分に近づくだろうということであろう。例えば、ある馬がある競走で優勝するといつた反覆不能な事実の確率をはかるという極端な場合でさえ、われわれは、これと同じ様な事柄が多数回くり返された場合を想像して、この想像上の母集団で、この馬の優勝する相対的頻度をはかると考えられる。」
M. G. Kendall: The Advanced Theory of Statistics, Vol. I, 1948, pp. 165–166.

(8) cf. J. M. Keynes: A Treatise on Probability, 5th ed., 1952.
H. Jeffrys: Theory of Probability, 1939.

(9) M. S. Bartlett: "The present position of mathematical statistics", (1940), J. R. Statist. Soc., 103, p. 1.

(10) 「われわれは、観測された事象に最大の確率を与えるような仮説をえらばねばならない」。M. G. Kendall: ibid., p. 178.

(11) この仮定をケンダールは、「極限に至る過程の性質」(the nature of the process to the limit) または、「極限過程」(limiting process) とよぶ。「ベイスの仮定とこの原理（最尤法—引用者）は、どちらも、極限過程が考慮された場合には、連続変量の事例でも、不連続変量の事例でも、つねに同じ答えを与える……外見上の不一致（両者の）は全く不一致ではなくなり、この困難は連続母集団における極限過程の無視に起因する」。M. G. Kendall: ibid., p. 179.

(12) I. G. Good: Discussion on Prof. Barnard's Paper, (1949), J. R. Statist. Soc., B 11, p. 141.