関税を含む国際経済体系における均衡解の存在について

坂　下　　昇

本稿では最適関税の基礎理論第2章* で設定されたような関税を含む国際経済体系における均衡解存在の問題を，2国多数財モデルに拡張して考察する**。関税を含む国際経済体系が，通常の一般均衡体系あるいはその国際経済版（たとえば，[6] pp. 459–461）と異なる点は，言うまでもなくA国における財の価格とB国における（質的に）同じ財の価格とが関税の介在によって相等しくないということ，すなわち，いわゆる1物1価の原則が成立していないということである。その場合でもA国におけるX財とB国におけるそれとを別種の財と見做し，両者の間に特殊な転形函数を想定するという手続によって，体系を一般均衡理論の枠内に含めてしまうことができそうである。しかしそのようにするとしても，関税の収受に関連する経済主体とその行動原理の想定，初期保有量の取り扱い[1] などの点で，いろいろ厄介な問題が生ずることは免がれないであろう。そこでこの補論では関税を含む国際経済均衡の問題を，財の国際間移動に制約をおいた世界経済厚生最大化の問題に対応させて，後者における最大点の存在から前者における均衡点の存在性

---

* 本稿は北海道大学「経済学研究」19号所収（1961），「最適関税の基礎理論」（その1）の補論にあたる。

** 本稿の執筆に当っては戸島熙氏（北海道大学）より種々の御教示を戴いた。また根岸隆氏（東京大学）には草稿の段階で通読して戴いた上適切な助言を戴いた。ここに記して深く感謝致したい。もとより行論中，予想されるすべての誤りは筆者のみの責任である。

1) 異なる地点における同種の財を別の財と見做すならば，消費者の手元にある各種財の初期保有量がすべて正である，という仮定は定義によりおくことができない。

この仮定を，初期保有量すべて非負，少なくとも1つの財について正，という形に緩めるならば，均衡解の存在証明は非常に厄介になってしまう。（二階堂[4]第10章参照）

を導くという手法を採ることにする。このような手法は既に Negishi [3] で通常の一般均衡体系について確立されており，この補論はいわばそれの corollary に当るものである。同じ手法の国際経済版は，例の要素価格均等化の問題に関連して Uzawa [6] によってきわめて巧妙に取り扱われている。ただしそこでは均衡解の存在性ということに関しては，特に厳密な考察はなされていない。

(i) 記 号 法

この補論での記号法は第2章のそれとは一応別の基準にしたがう。

$X_{ij}=i$ 国の j 財生産量 $(i=1,2,\ j=1,2\cdots\cdots n)$

そのベクトル表示 $X_i=(X_{i1},\ X_{i2},\ \cdots\cdots,\ X_{in})$

$x_{ij}=i$ 国民間部門の j 財消費量 $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2\cdots\cdots,\ n,\ n+1. \end{cases}$

そのベクトル表示 $x_i=(x_{i1},\ x_{i2}\cdots\cdots,\ x_{in},\ x_{in+1})$

$\bar{x}_{i,n+1}=i$ 国民間部門の $(n+1)$ 財初期保有量，$i=1,2$

$x'_{ij}=i$ 国政府の j 財消費量 $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2,\ \cdots\cdots,\ n,\ n+1 \end{cases}$

そのベクトル表示 $x'_i=(x'_{i1},\ x'_{i2},\ \cdots\cdots,\ x'_{in},\ x'_{i,n+1})$

$\bar{x}'_{i,n+1}=i$ 国政府の $(n+1)$ 財初期保有量，$i=1,2$

$E_{ij}=i$ 国の j 財輸出量 $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2,\ \cdots\cdots,\ n,\ n+1 \end{cases}$

$M_{ij}=i$ 国の j 財輸入量 $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2,\ \cdots\cdots,\ n,\ n+1 \end{cases}$

$f_i(X_i)\geqq 0$；i 国の技術的転形函数，$i=1,2$

$u_i(x_i)$； i 国民間部門の効用函数，$i=1,2$

$u_i^{**}(x'_i)$； i 国政府の効用函数 $i=1,2$

$P_{ij}=i$ 国における j 財の価格 $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2,\ \cdots\cdots,\ n \end{cases}$

そのベクトル表示 $P_i=(P_{i1},\ P_{i2},\ \cdots\cdots,\ P_{in})$

$r_{ij}=i$ 国における j 財輸入に対する縦価関税率 $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2,\ \cdots\cdots,\ n \end{cases}$

$J=\{1,2,\ \cdots\cdots,\ n\}$；財に関する suffix の集合

$J_i=\{j\mid r_{ij}>0\}$；i 国において正の関税率を持つ財の suffix の集合，$i=1,2$

(ii) 国際経済均衡の定義と諸仮定

＜仮定 1＞　a) $\bar{x}_{i,n+1}>0$, $\bar{x}'_{i,n+1}>0$, $i=1,2$

b) $P_i \geqq 0$[2], $i=1,2$

c) $J_1 \cap J_2 = \phi$ （ϕ は空集合を示す。）

d) $J_1 \cup J_2 = J$

通常この種の問題では，価格ベクトル P_i の変動範囲を $(n-1)$ 次元単体 S^{n-1} 上と規定するのであるが，ここでは後述する国際価格均等の要請に即するため，$(n+1)$ 番目の財を生産不可能な numéraire と考え，その価格を恒等的に 1 とおく。仮定 1 a) はそのような numéraire (たとえば金) の各主体初期保有量がすべて正の一定量であること，b) は価格ベクトルの変動範囲の下方有界性，c) はあらかじめ与えられている関税率表について，同じ財に対し両国とも関税をかけることは無いという意味である。d) は議論を簡単にするための仮定であって，$J_1 \cup J_2 \subset J$ としても以下の議論の本質は変らない。

＜仮定 2＞　$f_i(X_i)$ は $X_i \geqq 0$ に対して凹，狭義減少かつ微分可能な函数であり，またある原点に近い n 次元ベクトル $\varepsilon_i>0$ に対して，$f_i(\varepsilon_i)>0$ とすることができる。また $f_{ix_{ij}} \equiv \dfrac{\partial f_i}{\partial X_{ij}}$ は $X_i \geqq 0$ に対して有界かつ連続であるとする。

＜仮定 3＞　$u_i(x_i), u_i^*(x'_i)$ は $x_i \geqq 0$ および $x'_i \geqq 0$ に対して強い意味で凹，狭義増加かつ微分可能な函数であるとする。また $u_{ix_{ij}} \equiv \dfrac{\partial u_i}{\partial x_{ij}}$, $u_i^* x'_{ij} \equiv \dfrac{\partial u_i^*}{\partial x'_{ij}}$ はすべて，$x_i \geqq 0$ $x'_i \geqq 0$ に対して有界[3] かつ連続であるとする。

＜定義 1＞　ベクトルの組 $[\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{x}_1, \hat{x}'_1, \hat{x}_2, \hat{x}, \hat{X}_1, \hat{X}_2] \geqq [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ が次の諸条件をみたすとき，それらは国際経済体系の均衡解であるという。

---

2) 2つのベクトル $x=(x_i, x_2 \cdots\cdots, x_n)$ および $y=(y_1, y_2 \cdots\cdots, y_n)$ に関して，$x_j \geqq y_j$, $j=1,2 \cdots\cdots, n$ ならば $x \geqq y$, $x \geqq y$ かつ $x \neq y$ ならば $x \geq y$, $x_j > y_j$, $j=1,2 \cdots\cdots, n$ ならば $x > y$，と表わす記号法を用いる。

3) $u_i(x_i)$, $u_i^*(x'_i)$ は凹かつ狭義増加であるから，$u_i x_{ij}$, $u_i^* x'_{ij}$ が有界であるための必要十分条件は，原点においての右方微係数 $[u_i x_{ij}^+] x_i = 0$, $[u_i^* x_{ij}^+] x'_i = 0$ がすべて有限の値をとっていることである。

a) i 国民間部門 $(i=1,2)$

(1) $f_i(X_i)\geqq 0,\ x_{ij}\geqq 0\ (j=1,2,\ \cdots\cdots,\ n,\ n+1),\ X_{ij}\geqq 0\ (j=1,2,\ \cdots\cdots,\ n)$

(2) $\sum_{j\in J_i}(1+r_{ij})\hat{P}_{ij}x_{ij}+\sum_{j\in J_i^*}\hat{P}_{ij}x_{ij}+x_{i,n+1}\leqq\sum_{j\in J_i}(1+r_{ij})\hat{P}_{ij}X_{ij}$
$+\sum_{j\in J_i^*}\hat{P}_{ij}X_{ij}+\bar{x}_{i,n+1}$

の制約下で,

(3) $\max\ u_i(x_i)=u_i(\hat{x}_i)$

(ただし J_i^* は J における J_i の補集合を示す。)

b) i 国政府 $(i=1,2)$

(4) $\hat{I}_i=\sum_{j\in J_i}\max\ [0,\ r_{ij}\hat{P}_{ij}(\hat{x}_{ij}-\hat{X}_{ij})]+\bar{x}'_{i,n+1}$

とおき

(5) $x'_{ij}\geqq 0\ (j=1,2,\ \cdots\cdots n,\ n+1),$

$\sum_{j\in J_{i0}}\hat{P}_{ij}(1+r_{ij})x'_{ij}+\sum_{j\in J-J_{i0}}\hat{P}_{ij}x'_{ij}+x'_{i,n+1}\leqq\hat{I}_i$

(ここで J_{i0} は $\hat{x}_{ij}-\hat{X}_{ij}\leqq 0$ なる J_i の部分集合) の制約下で

(6) $\max\quad u_i^*(x'_i)=u_i^*(\hat{x}'_i)$

c) 需給バランス

(7) $\sum_{i=1}^{2}\hat{x}_{ij}+\sum_{i=1}^{2}\hat{x}'_{ij}\leqq\sum_{i=1}^{2}\hat{X}_{ij},\ j=1,2,\ \cdots\cdots,\ n$

(8) $\sum_{i=1}^{2}\hat{x}_{i,n+1}+\sum_{i=1}^{2}\hat{x}'_{i,n+1}\leqq\sum_{i=1}^{2}\bar{x}_{i,n+1}+\sum_{i=1}^{2}\bar{x}_{i,n+1}$

d) 国際価格均等

(9) $\{\max[0,\ \hat{x}_{ij}+\hat{x}'_{ij}-\hat{X}_{ij}]\}(\hat{P}_{ij}-\hat{P}_{kj})=0,\ j\in J_i$

$\{\max[0,\ \hat{x}_{ij}+\hat{x}'_{ij}-\hat{X}_{ij}]\}(1+r_{kj})(\hat{P}_{kj}-\hat{P}_{ij})=0,\ j\in J_i^*$

定義1の b) は政府の収入が $(n+1)$ 財の価値プラス関税収入であることを示し, d) は国際間流通が存在する財については両国内の価格が均等化することを要請している。

(iii) 世界経済厚生最大化問題と諸仮定

<仮定4> 政府効用函数 $u_i^*(x'_i)$ は各財について separable であるとする。

すなわち，

$$(10)\quad u_i^*(x_i')=\sum_{j=1}^{n+1} u_{ij}^*(x_{ij}')$$

のように表わすことができる。 $u_{ij}^*(x_{ij}')$ の各函数はすべて仮定3の性質をそなえているとする。

＜定義2＞ $\alpha_i \geqq 0,\ \beta_i \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{2}(\alpha_i+\beta_i)\equiv 1$ のような $\alpha_i,\ \beta_i\ (i=1,2)$ と，非負の数値の組 $[K_{ij}]$ (ただし $j\in J_i,\ i=1,2$) を選ぶ。さらに $[K_{ij}]$ の中で正の値を持つものの suffix の集合を $\tilde{J}_i$ と記す。(定義により，$\tilde{J}_i \subseteq J_i$)

このとき世界経済厚生最大化問題とは下記(12)〜(19)の制約の下に，世界経済厚生函数，

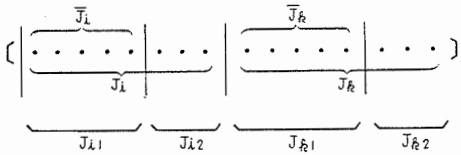
$$(11)\quad W\equiv \sum_{i=1}^{2}\alpha_i u_i(x_i)+\sum_{i=1}^{2}\beta_i\{\sum_{j\in\tilde{J}_i}(1+r_{ij})u_{ij}^*(x_{ij}')+\sum_{j\in J_i^*+(J_i-\tilde{J}_i)+(n+1)} u_{ij}^*(x_{ij}')\}$$

を最大化するベクトルの組

$$[\hat{x}_1,\ \hat{x}_1',\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_2',\ \hat{X}_1,\ \hat{X}_2,\ \hat{E}_1,\ \hat{E}_2,\ \hat{M}_1,\ \hat{M}_2]\geqq[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$$

を見出すことである。

制約条件(12)〜(19)を記す前に，J_i, $\tilde{J}_i$ で規定される財の分類法を整理しておく。i 国の立場から見ると，1から n までの財の suffix は次のように分類される。



$J_{i1}=\tilde{J}_i$；正の r_{ij} と正の K_{ij} を持つ suffix の集合

$J_{i2}=J_i-\tilde{J}_i$；正の r_{ij} とゼロの K_{ij} を持つ suffix の集合　$(i=1,2)$

経済的解釈としては，$j\in J_{j1}$ は $k\,(\neq i)$ 国からの輸出 (i 国の輸入) が制約されている財，$j\in J_{i2}$ は上述のことが禁止されている財を意味している。(各集合とも空でありうる。)

(12) $(X_{ij}+M_{ij}-x_{ij}-x'_i-E_{ij})(1+r_{ij})\geqq 0 \quad \{j\in J_{i1},\ i=1,2$

(13) $(X_{ij}-x_{ji}-x'_{ij}-E_{ij})(1+r_{ij})\geqq 0 \quad \{j\in J_{i2},\ i=1,2$

(14) $X_{ij}+M_{ij}-x_{ij}-x'_{ij}-E_{ij}\geqq 0 \quad \{j\in J_{k1},\ i=1,2$

(15) $X_{ij}+M_{ij}-x_{ij}-x'_{ij}\geqq 0 \quad \{j\in J_{k2},\ i=1,2$

(16) $\sum_{i=1}^{2}(\bar{x}_{i,n+1}+\bar{x}'_{i,n+1}-x_{i,n+1}-x'_{i,n+1})\geqq 0$

(17) $f_i(X_i)\geqq 0 \quad i=1,2$

(18) $E_{ij}-M_{kj}\geqq 0 \quad \{j\in J_{i1}+J_{i2}+J_{k1} \quad \begin{matrix} i=1,2 \\ k=1,2 \end{matrix} \ i\neq k$

(19) $K_{ij}-M_{ij}\geqq 0 \quad \{j\in J_{i1},\ i=1,2$

(17)を除く(12)〜(19)の制約は，財の国際的流通がある財のある方向についてはまったく禁止され，あるいは一部制限され，またあるいはまったく自由であることを示している。流通禁止財に関しては対応する方向の輸出入変数は始めから除かれている。これは $K_{kj}=0\ (j\in J_{i2})$ の形で最大化問題の制約をおくと後述の Kuhn-Tucker の定理の適用において，Slater の条件が成り立たなくなるために，このようにやや複雑な取り扱いをしたのである。

＜仮定5＞ 均衡解問題および世界経済厚生最大化問題における $u_i^{w}(x'_i)$ $(i=1,2)$ の性質により，後者の解のすべてについて

$$(*)\ \begin{cases} \hat{x}_{ij}+\hat{x}'_{ij}-\hat{X}_{ij}>0 & j\in J_{i1} \\ \text{のとき必らず}\quad \hat{x}_{ij}-\hat{X}_{ij}>0 & j\in J_{i1} \end{cases}$$

が成り立つ。

この仮定は政府効用函数というものが政策上の便宜から発しているものであることを示唆しているが，均衡解との対応において考えるとき，r_{ij} 群，したがって x'_{ij} 群が相対的に小さい値をとるものとすれば，それほど restrictive な仮定とは言えない[4]。

---

4) たとえば $j\in J_i$ なる j 財については仮定4の $u_{ij}^{w}(x'_{ij})$ を相対的なウエイトのきわめて低い函数にしておけば，仮定5はみたされるであろう。これは関税賦課ということの政策的な意義から考えても，政府効用函数の妥当な設定法であると思われる。

(iv) Kuhn-Tucker の定理とその適用

<Lemma 1> (1)(=(17)), (7)(8)(=(12)(13)(14)(15)(18)) の諸制約をみたす(均衡値に限らぬ) $[x_1, x_1', x_2, x_2', X_1, X_2] \geqq [0, 0, 0, 0, 0, 0,]$ の変域は各々適当な大きさの原点を含む超直方体 $B_i(\ni x_i)$, $B_i'(\ni x_i')$, $D_i(\ni X_i)(i=1,2)$ の中に均衡値問題および最大化問題になんらの変更を加えることなく含めてしまうことができる。

証明　題意をみたすためには，問題となっているすべての $[x_1, x_1', x_2, x_2', X_1, X_2]$ の集合 $\mathfrak{X}$ が空でなく，かつ有界であることを示せばよい。前者については，仮定1 a) および仮定2より $[0, 0, 0, 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2]$ という組は明らかに(1)(7)(8)をみたしている。(17)は(1)と同じであり，(12)〜(15)(18)ではさらに E_{ij}, M_{ij} 等をすべて0におけば同じことが言える。したがって $\mathfrak{X} \neq \phi$。後者について $\mathfrak{X}$ の下方有界性はその変域の非負構成法より明らか。したがって X_1, X_2 の上方有界性が証明されれば，(7)(8)および仮定1 a) より x_1, x_1', x_2, x_2', の有界性がしたがう。((12)(13)(14)(15)の各左辺を正乗数 $(1+r_{ij})$ を省いて i に関して総和し，必要に応じて(18)を考慮すれば(7)(8)と同じ式が得られる。)

さて，任意の財比率を示すベクトル $\delta_i(\varepsilon_i \geqq \delta_i \geqq 0)$ を考え，$f_i(\lambda\delta_i) \geqq 0$ $(\lambda > 0)$ であるようなスカラー乗数 λ の集合 L が上に有界であることを示す。ところで，もし L が上に有界でなければ $\{\lambda^1 < \lambda^2 < \cdots < \lambda^\nu < \cdots\cdots | \lambda^\nu \in L\}$ なる単調増加数列で $\lim_{\nu\to\infty} \lambda^\nu = \infty$ となるものが存在することになる。数列 $\{\lambda^\nu\}$ に対応する数列 $f_i(\lambda^\nu\delta_i)$ を考えると仮定2より，$\{f_i(\lambda^\nu\delta_i)\}$ は下に有限な単調減少数列となり下限0に収束する。([4] pp. 44)

すなわち

$$(20) \quad \lim_{\nu\to\infty} \{f_i(\lambda^\nu\delta_i)\} = 0$$

一方やはり仮定2より

$$(21) \quad f_i\left(\frac{1}{2}\delta_i + \frac{1}{2}\lambda^\nu\delta_i\right) \geqq \frac{1}{2}f_i(\delta_i) + \frac{1}{2}f_i(\lambda^\nu\delta_i)$$

上式の左辺，$f_i\left(\frac{1+\lambda^\nu}{2}\cdot\delta_i\right)$ も(20)と同じように $\nu\to\infty$ につれて0に収束する。したがって

$$(22)\quad \lim_{\nu\to\infty}\left\{f_i\left(\frac{1}{2}\delta_i+\frac{1}{2}\lambda^\nu\delta_i\right)-\frac{1}{2}f_i\left(\lambda^\nu\delta_i\right)\right\}\geqq\frac{1}{2}f_i\left(\delta^i\right)$$

より，

$$(23)\quad f_i(\delta_i)\leqq 0$$

これは，$f_i(\delta_i)\geqq f_i(\varepsilon_i)>0$ という δ_i の設定法に矛盾する。したがって L は上に有界でなければならない。δ_i の任意性よりこのことは，どのような財比率についてもベクトル $X_i(i=1.2)$ が上に有界であることを意味している。

q. e. d.

<Lemma 2> (Kuhn-Tucker の定理) $f(x)$ および $g(x)=<g(x),\ \cdots\cdots,\ g_m(x)>'$（′は転置ベクトルを示す。）を $x\geqq 0$ における凹函数であるとし，さらに $g(x)$ は次の条件 (Slater の条件) をみたすとする。

$$(24)\quad g(x^0)>0$$

である $x^0\geqq 0$ が存在する。そのときベクトル $\bar{x}$ は，$(\bar{x},\ \bar{y})$ が函数 $\varphi(x,\ y)\equiv f(x)+y\cdot g(x)$ の $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ における鞍点[5]であるようなベクトル $\bar{y}=(y_1,\ \cdots\cdots,\ y_m)\geqq 0$ が存在するとき，またそのときのみ $f(x)$ を $g(x)\geqq 0,\ x\geqq 0$ の制約の下で最大化する。([5] および [2])

<定理 1> a) 定義1 a)の均衡点 $\hat{x}_i,\ \hat{X}_i$ は函数

$$\varphi_i(x_i,\ X_i;\lambda_i,\ \mu_i)\equiv u_i(x_i)+\lambda_i\Big[\sum_{j\in J_i}(1+r_{ij})\hat{P}_{ij}X_{ij}+\sum_{j\in J_i^*}\hat{P}_{ij}X_{ij}+\bar{x}_{i,n+1}$$
$$-\sum_{j\in J_i}(1+r_{ij})\hat{P}_{ij}x_{ij}-\sum_{j\in J_i^*}\hat{P}_{ij}x_{ij}-x_{i,n+1}\Big]+\mu_i f_i(X_i)\quad(i=1,2)$$

において，$x_i,\ X_i$ を最大化変数，$\lambda_i,\ \mu_i$ を最小化変数としたときの鞍点に等しく，またそのための必要十分条件は下記(25)〜(30)である。

$$(25)\quad \varphi_i\hat{x}_{ij}=u_i\hat{x}_{ij}-\hat{\lambda}_i(1+r_{ij})\hat{P}_{ij}\leqq 0,\ \ \varphi_i\hat{x}_{ij}\cdot\hat{x}_{ij}=0,\ \ j_eJ_i$$

---

5) 函数 $\varphi(x,\ y)$ の鞍点 $(\bar{x},\ \bar{y})$ とは，定義域内のすべての $(x,\ y)$ に対して次式が成り立っている点のことである。

$$\varphi(x,\ \bar{y})\leqq\varphi(\bar{x},\ \bar{y})\leqq\varphi(\bar{x},\ y)$$

(26)　$\varphi_i\hat{x}_{ij}=u_i\hat{x}_{ij}-\hat{\lambda}_i\hat{P}_{ij}\leqq 0,\ \ \varphi_i\hat{x}_{ij}\cdot\hat{x}_{ij}=0,\ \ j\in[J^*_{i,n+1}],\ \ \hat{P}_{i,n+1}\equiv 1$

(27)　$\varphi_i\hat{X}_{ij}=\hat{\lambda}_i(1+r_{ij})\hat{P}_{ij}+\hat{\mu}_i f_i\hat{X}_{ij}\leqq 0,\ \ \varphi_i\hat{X}_{ij}\cdot\hat{X}_{ij}=0,\ \ j\in J_i$

(28)　$\varphi_i\hat{X}_{ij}=\hat{\lambda}_i\hat{P}_{ij}+\hat{\mu}_i f_i\hat{X}_{ij}\leqq 0,\ \ \varphi_i\hat{X}_{ij}\cdot\hat{X}_{ij}=0,\ \ j\in J^*_i$

(29)　$$\varphi_i\hat{\lambda}_i=\sum_{j\in J_i}(1+r_{ij})\hat{P}_{ij}\hat{X}_{ij}+\sum_{j\in J^*_i}\hat{P}_{ij}\hat{X}_{ij}+\hat{x}_{i,n+1}$$
$$-\sum_{j\in J_i}(1+r_{ij})\hat{P}_{ij}\hat{x}_{ij}-\sum_{j\in J^*_i}\hat{P}_{ij}\hat{x}_{ij}-\hat{x}_{i,n+1}\geqq 0,\ \ \varphi_i\hat{\lambda}_i\cdot\hat{\lambda}_i=0$$

(30)　$\varphi_i\hat{\mu}_i=f_i(\hat{X}_i)\geqq 0,\ \ \varphi_i\hat{\mu}_i\cdot\hat{\mu}_i=0$

b)　定義1 b)の均衡点 $\hat{\mu}'_i$ は函数

$$\psi_i(x'_i;\nu_i)\equiv u^*_i(x'_i)+\nu_i(\hat{I}_i-\sum_{j\in J_{i0}}\hat{P}_{ij}(1+r_{ij})x'_{ij}-\sum_{j\in J-J_{i0}}\hat{P}_{ij}x'_{ij}-x'_{i,n+1})$$

において，x'_i を最大化変数，ν_i を最小化変数としたときの鞍点に等しく，またそのための必要十分条件は下記(31)〜(33)である。

(31)　$\psi_i\hat{x}'_{ij}=u^*_i\hat{x}'_{ij}-\nu_i\hat{P}_{ij}(1+r_{ij})\leqq 0,\ \ \psi_i\hat{x}'_{ij}\cdot\hat{x}'_{ij}=0,\ \ j\in J_{i_0}$

(32)　$\psi_i\hat{x}'_{ij}=u^*\hat{x}'_{ij}-\nu_i\hat{P}_{ij}\leqq 0,\ \ \psi_i\hat{x}'_{ij}\cdot\hat{x}_{ij}=0$

$j\in J-J_{i0},\ j=n+1,\ \hat{P}_{i,n+1}\equiv 1$

(33)　$\psi_i\hat{\nu}_2=\hat{I}_i-\sum_{j\in J_{i0}}\hat{P}_{ij}(1+r_{ij})\hat{x}'_{ij}-\sum_{j\in J-J_{i0}}\hat{P}_{ij}\cdot\hat{x}'_{ij}-x'_{i,n+1}\geqq 0,\ \ \psi_i\hat{\nu}_i\cdot\hat{\nu}_i=0$

説明　a)　$X_i=\varepsilon_i,\ x_i=0$ とおけば，$\varphi_i(x_i,X_i;\lambda_i,\mu_i)$ について Lemma 2 の Slater の条件がみたされ，また各函数の凹性より Kuhn-Tucker の定理を適用することができる。鞍点問題の必要十分条件については [2] の第2定理 (p. 485) による。

b)　$\hat{I}_i$ の定義と仮定1 a)より $\hat{I}_i>0$。したがって $x'_i=0$ とおけば $\psi_i(\hat{x}_i,\nu_i)$ について Slater の条件がみたされる。以下 a)と同様。q. e. d.

<定理 2>　任意の非負のウェイトの組 $\alpha_i,\beta_i(\sum_{i=1}^{2}(\alpha_i+\beta_i)\equiv 1,\ i=1,2)$ および $K_{ij}>0(j\in J_{i1},\ i=1,2)$ について，定義2の世界経済厚生最大点が必らず存在する。証明，仮定3と(11)の定義より函数 W は，$x_i,\ x'_i$ に関して連続。一方定義2と Lemma 1 より(12)〜(19)をみたす $[x_i,\ x'_i,\ X_i,\ E_i,\ M_i]$ の定義域はコンパクト。したがって W はこの定義域上で最大値を持つ。([4] p. 102)　q. e. d.

<定理 3>　定義2の世界経済厚生最大点 $[\hat{x}_i,\ \hat{x}'_i,\ \hat{X}_i,\ \hat{E}_i,\ \hat{M}_i]$ $(i=1,2)$ は

函数

$$
\begin{aligned}
&\Phi(x_i,\ x'_i,\ X_i,\ E_i,\ M_i;\ P_{ij},\ P_{n+1},\ K_i,\ \rho_{ij},\ \theta_{ij})\\
&\equiv \sum_{i=1}^{2}\alpha_i u_i(x_i)+\sum_{i=1}^{2}\beta_i\Big\{\sum_{j\in J_{i1}}(1+r_{ij})\,u^*_{ij}(x'_{ij})+\sum_{j\in J^*_i+J_{i2}+(n+1)}u^*_{ij}\cdot(x'_{ij})\Big\}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{2}\Big[\sum_{j\in J_{i1}}P_{ij}(1+r_{ij})(X_{ij}+M_{ij}-x_{ij}-x'_{ij}-E_{ij})\\
&\quad+\sum_{j\in J_{i2}}P_{ij}(1+r_{ij})(X_{ij}-x_{ij}-x'_{ij}-E_{ij})\\
&\quad+\sum_{j\in J_{k1}\,(k\neq i)}P_{ij}(X_{ij}+M_{ij}-x_{ij}-x'_{ij}-E_{ij})\\
&\quad+\sum_{j\in J_{k2}\,(k\neq i)}P_{ij}(X_{ij}+M_{ij}-x_{ij}-x'_{ij})\Big]\\
&\quad+P_{n+1}\sum_{i=1}^{2}(\bar{x}_{i,n+1}+\bar{x}'_{i,n+1}-x_{i,n+1}-x'_{i,n+1})\\
&\quad+\sum_{i=1}^{2}k_i f_i(X_i)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{2}\Big[\sum_{j\in J_{i1}+J_{i2}+J_{k2}\,(k\neq i)}\rho_{ij}(E_{ij}-M_{kj})\Big]+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j\in J_{i1}}\theta_{ij}(K_{ij}-M_{ij})
\end{aligned}
$$

において，x_i, x'_i, X_i, E_i, M_i を最大化変数，(X と示す) P_{ij}, P_{n+1}, k_i, ρ_{ij}, θ_{ij} (Y と示す) を最小化変数としたときの鞍点に等しく，またそのための必要十分条件は下記(34)〜(53)である。

(34) $\Phi\hat{x}_{ij}=\alpha_i u_i\hat{x}_{ij}-\hat{P}_{ij}(1+r_{ij})\leqq 0,\ \Phi\hat{x}_{ij}\cdot\hat{x}_{ij}=0,\ j\in J_i,\ i=1,2$

(35) $\Phi\hat{x}_{ij}=\alpha_i u_i\hat{x}_{ij}-P_{ij}\leqq 0,\ \Phi\hat{x}_{ij}\cdot x_{ij}=0,\ j\in J^*_i,\ i=1,2$

(36) $\Phi\hat{x}_{i,n+1}=\alpha_i u_i\hat{x}_{i,n+1}-\hat{P}_{n+1}\leqq 0,\ \Phi\hat{x}_{i,n+1}\cdot\hat{x}_{i,n+1}=0,\ i=1,2$

(37) $\Phi\hat{x}'_{ij}=\beta_i u^*_i\hat{x}'_{ij}-\hat{P}_{ij}\leqq 0,\ \Phi\hat{x}'_{ij}\cdot\hat{x}'_{ij}=0,\ j\in J_i+J^*_i,\ i=1,2$

(38) $\Phi\hat{x}'_{ij}=\beta_i u^*_i\hat{x}'_{ij}-\hat{P}_{ij}(1+r_{ij})\leqq 0,\ \Phi\hat{x}_{ij}\cdot\hat{x}'_{ij}=0\ j\in J_{i2},\ i=1,2$

(39) $\Phi\hat{x}'_{i,n+1}=\beta_i u^*_i\hat{x}'_{i,n+1}-\hat{P}_{n+1}\leqq 0,\ \Phi\hat{x}'_{i,n+1}\cdot\hat{x}'_{i,n+1}=0,\ i=1,2$

(40) $\Phi\hat{X}_{ij}=\hat{P}_{ij}(1+r_{ij})+k_i f_i\hat{X}_{ij}\leqq 0,\ \Phi\hat{X}_{ij}\cdot\hat{X}_{ij}=0,\ j\in J_i,\ i=1,2$

(41) $\Phi\hat{X}_{ij}=P_{ij}+k_i f_i\hat{X}_{ij}\leqq 0,\ \Phi\hat{X}_{ij}\cdot\hat{X}_{ij}=0,\ j\in J^*_i,\ i=1,2$

(42) $\Phi\hat{E}_{ij}=-\hat{P}_{ij}(1+r_{ij})+\hat{\rho}_{ij}\leqq 0,\ \Phi\hat{E}_{ij}\cdot\hat{e}_{ij}=0,\ j\in J_{i1}+J_{i2},\ i=1,2$

(43) $\Phi\hat{E}_{ij}=-\hat{P}_{ij}+\rho_{ij}\leqq 0,\ \Phi\hat{e}_{ij}\cdot\hat{E}_{ij}=0,\ j\in J_{k1},\ (k\neq i),\ i,\ k=1,2$

(44) $\Phi\hat{M}_{ij}=\hat{P}_{ij}(1+r_{ij})-\hat{\rho}_{kj}-\hat{\theta}_{ij}\leqq 0,\ \Phi\hat{M}_{ij}\cdot\hat{M}_{ij}=0,\ j\in J_{i1},\ (k\neq i),$
$i,\ k=1,2$

(45) $\Phi\hat{M}_{ij}=\hat{P}_{ij}-\hat{\rho}_{kj}\leqq 0,\ \Phi\hat{M}_{ij}\cdot\hat{M}_{ij}=0,\ j\in J_{k1}+J_{k2},\ (k\neq i),\ i,\ k=1,2$

(46) $\Phi\hat{P}_{ij}/1+r_{ij}=\hat{X}_{ij}+\hat{M}_{ij}-\hat{x}_{ij}-\hat{x}'_{ij}-\hat{E}_{ij}\geqq 0$

$\Phi\hat{P}_{ij}\cdot\hat{P}_{ij}=0,\ j\in J_{i1},\ i=1,2$

(47) $\Phi\hat{P}_{ij}/1+r_{ij}=\hat{X}_{ij}-\hat{x}_{ij}-\hat{x}'_{ij}-\hat{E}_{ij}\geqq 0,\ \Phi\hat{P}_{ij}\cdot\hat{P}_{ij}=0,\ j\in J_{i2},\ i=1,2$

(48) $\Phi\hat{P}_{ij}=\hat{X}_{ij}+\hat{M}_{ij}-\hat{x}_{ij}-\hat{x}'_{ij}-\hat{E}_{ji}\geqq 0,\ \Phi\hat{P}_{ij}\cdot\hat{P}_{ij}=0,$

$j\in J_{k1},\ (k\neq i)\,i,\ k=1,2$

(49) $\Phi\hat{P}_{ij}=\hat{X}_{ij}+\hat{M}_{ij}-\hat{x}_{ij}-\hat{x}'_{ij}\geqq 0,\ \Phi\hat{P}_{ij}\cdot\hat{P}_{ij}=0,$

$j\in J_{k2},\ (k\neq i)\,i,\ k=1,2$

(50) $\Phi\hat{P}_{n+1}=\sum_{i=1}^{2}(\bar{x}_{i,\,n+1}+\bar{x}'_{i,\,n+1}-\hat{x}_{i,\,n+1}-\hat{x}'_{i,\,n+1})\geqq 0,$

$\Phi\hat{P}_{n+1}\cdot\hat{P}_{n+1}=0,\ i=1,2$

(51) $\Phi\hat{k}_i=f_i(\hat{X}_i)\geqq 0,\ \Phi\hat{k}_i\cdot\hat{k}^i=0,\ i=1,2$

(52) $\Phi\hat{\delta}_{ij}=\hat{E}_{ij}-\hat{M}_{kj}\geqq 0,\ \Phi\hat{\delta}_{ij}\cdot\hat{\delta}_{ij}=0,\ j\in J_{i1}+J_{i2}+J_{k1}\ (k\neq i)\ i,\ j=1,2$

(53) $\Phi\hat{\theta}_{ij}=K_{ij}-\hat{M}_{ij}\geqq 0,\ \Phi\hat{\theta}_{ij}\cdot\hat{\theta}_{ij}=0,\ j\in J_{i1},\ i=1,2$

証明　$X_i=\varepsilon_i, x_i=x'_i=0\,(i=1,2),\ \varepsilon_{ij}>E_{ij}>0\,(j\in J_{i2}+J_{k1},\ k\neq i,\ i,\ k=1,2),$ $E_{ij}=\min\,[\varepsilon_{ij},\ K_{ij}]-\delta_{ij}>0$ (δ_{ij} は小さい正数，$j\in J_j,\ i=1,2$)，$M_{ij}=0$ ($j\in J_{i_1}+J_{k1}+J_{k2},\ k\neq i,\ i,\ k=1,2$) とおくことにより，$\Phi$ について Slater の条件がみたされる。以下定理1と同様，q. e. d.

以下の均衡点の存在証明では，(25)〜(33)(7)(8)(9) と (34)〜(53) との対比がしばしば問題にされるのであるが，(34)〜(53) の解が鞍点問題の解であるとともに，またそれ故に最大化問題の解であることがくり返し利用されることになる。

(v)　不動点定理とその適用

<Lemma 3>　定理3の函数 Φ の最小化変数 $P_{ij}\,(i=1,2,\ j=1,2,\ \cdots\cdots,\ n)$ の鞍点解 $\hat{P}_{ij}$ は上に有界である。

証明　まず $i=1$ の場合を考える。'ある $\hat{P}_{1h},\ h\in J,$ が上に有界でないとしよう。もし $\hat{x}_{1h}>0$ あるいは $\hat{x}'_{1h}>0$ であれば，(34)(35) あるいは (37)(38) で，等式の成立することと仮定3より $\hat{P}_{1h}$ は有界でなければならないから，$\hat{x}_{1h}=0$ かつ $\hat{x}'_{1h}=0$。また (40) において $j=h$ とすれば，同式と仮定2より，

$\hat{k}_1$ も上に非有界でなければならない。(もしそうでなければ $|\hat{k}_1 f_1 \hat{x}_{1h}|$ したがって $\hat{P}_{1h}$ は有界となるから。) このことと $j \neq h$ である j についての(40)から，h 財に限らず $\hat{X}_{ij}>0$ である $j \in J_1$ については $\hat{P}_{1j}$ は上に非有界でなければならず，しかもそのとき再び $\hat{x}_{1j}=0$，かつ $\hat{x}'_{1j}=0$ である。

ところで定義2の最大化問題に戻って考えるとき，少なくとも一つの $g \in J_1$ については $\hat{X}_{1g}>0$ でなければならない。(もし，すべての j に対して $\hat{X}_{1j}=0$ であれば，制約をみたしつつ目的函数 $f(u_i, u^*_{ij})$ —— Φ の右辺第1行 ——の値をより大きくすることができ，最大値の前提に反する。) いまそのような g が $g \in J_{11}$ であるとしよう。$\hat{X}_{1g}>0$ かつ $\hat{x}_{1g}=0$，$\hat{x}'_{1g}=0$ であるから，前と同じく最大化問題の性質から $\hat{E}_{1g}>0$ でなければならない。

ところが $\hat{P}_{1g}$ は上に非有界であるから，(42)の等式成立より $\hat{\rho}_{1g}$ も上に非有界。また M_{2g} には K の上方制約が無いから，再び最大化問題の性質として，$M_{2g}=E_{1g}>0$。(45)で $k=1$, $i=2$, $j=g$ と考えれば等式成立より $\hat{P}_{2g}$ も上に非有界である。

このように $\hat{P}_{1g}$ の上方非有界性は $\hat{P}_{2g}$ まで伝えられる。とすれば再び $\hat{x}_{2g}=0$ かつ，$\hat{x}'_{2g}=0$。したがって(48)で $i=2$, $k=1$, $j=g$ の場合と，(46)で $i=1$, $j=g$ の場合とのいずれかは不等式の形で成立する。実際

$$(54)\quad \hat{X}_{1g}+\hat{M}_{1g}-\hat{E}_{1g} \geqq 0 \qquad \begin{pmatrix} \hat{M}_{2g}=\hat{E}_{1g}, & \hat{X}_{1g}>0 \\ \hat{M}_{1g}=\hat{E}_{2g}, & \hat{X}_{2g} \geqq 0 \end{pmatrix}$$

$$(55)\quad \hat{X}_{2g}+\hat{M}_{2g}-\hat{E}_{2g} \geqq 0$$

であるから，(54)と(55)との左辺の合計は正である。($\hat{M}_{1g}=\hat{E}_{2g}$ は $\hat{M}_{2g}=\hat{E}_{1g}$ であるのと同じ理由による。) しかもこのことは最大化問題の解という前提に矛盾する。したがって，ある $\hat{P}_{1h}$ が非有界という前提の下で，$\hat{X}_{1g}>0$ $g \in J_{11}$ と考えることはできない。しかし，$g \in J_{12}$, J_{21}, J_{22} 等としても同じような論法で矛盾の発生が導かれるから，結局 $\hat{P}_{1h}$ の上方非有界性が正しくないわけであり，すべての $h \in J$ について $\hat{P}_{1h}$ は上に有界でなければならないことが結論される。$i=2$ としても同様であるから，Lemma 3 が成立する。q. e. d.

<Lemma 4> 定理3の函数 Φ の最小化変数 P_{n+1} の鞍点解 $\hat{P}_{n+1}$ は正の下限を持ちかつ上に有界である。

証明　定義2の最大化問題の性質より,(36)(39)の4式のうちの少なくとも一つについては等式が成立する。したがって

(56)　$\hat{P}_{n+1}=\max\left[\alpha_i u_i \hat{x}_{i,n+1},\ \beta_i u_{i,n+1},\ (i=1,2)\right]$

仮定3より(56)の右辺は正の下限を持ち，かつ上に有界であり，したがって $\hat{P}_{n+1}$ も同様である。q. e. d.

<Lemma 5>　Lagrangian multipliers $P_{ij}\,(i=1,2,\ j=1,2,\ \cdots\cdots,\ n)$ の同じく P_{n+1} に対する比率，P_{ij}/P_{n+1} の変域は，定理2の最大化問題にまったく影響を与えずに，原点を含むある起直方体 $P_i\left(\ni \dfrac{1}{P_{n+1}}\cdot P_{ij}\right)(i=1,2)$ の中に含めてしまうことができる。これはLemma 3および4から直ちに導かれる。

<Lemma 6>　(Kakutani の不動点定理)　K を N 次元ユークリッド空間 R^N のコンパクトな凸集合とし，$f(X)$ を K から K の中への上半連続な点対集合写像でその像が非空かつ凸であるものとするならば，f に関する変動点 $\hat{X}=f(\hat{X})$ が K の中に少なくとも一つは必らず存在する。([1], [4] p. 308)

<Lemma 7>　函数 Φ の鞍点解 $(\hat{X},\ \hat{Y})$ の成分 $\hat{P}_{ij}$ が(34)〜(45)において，函数 $u_i,\ u_i^*,\ f_i\,(i=1,2)$ の微係数を含む諸項のいずれとも等号関係に無い場合でも，$\hat{P}_{ij}$ を中に含むある区間 $Q_{ij}=[\tilde{P}_{ij},\ \tilde{\tilde{P}}_{ij}]\ni\hat{P}_{ij}$ があって，Q_{ij} のすべての元もまた Φ の鞍点解 $(\hat{X},\ \hat{Y})$ (最大化変数の値は不変) の成分であるとともに，両端 $\tilde{P}_{ij},\ \tilde{\tilde{P}}_{ij}$ は上述の諸項のうちの少なくとも一つと等号関係に立つ。

これはある $\hat{P}_{ij}$ が(32)〜(38)の諸式中で，$u_i\hat{x}_{ij},\ u_i^*\hat{x}_{ij},\ f_j\hat{X}_{ij}$ を含む諸項のいずれとも等式で結びついていないときでも，実は $\hat{P}_{ij}$ の上下のある幅の区間全体が鞍点解の成分としての資格を持ち，その区間の両端は上述の諸項のいずれかと等号関係が結びつくことを述べたものである。この Lemma を函数 Φ に即しつつ証明することは非常に煩雑であるから，Lemma に関連する点で Φ と本質的に同じである函数，$\Phi^*=\alpha_i u_i(x_i)+\sum_{j=1}^{n}P_{ij}\,(X_{ij}-x_{ij})+k_i f_i\,(X_i)$ の鞍点解 $(\hat{x}_i,\ \hat{X}_i,\ \hat{P}_i,\ k_i)$ について証明しておく。鞍点解の必要十分条件は

$$\left.\begin{array}{ll}(57) & \Phi^*\hat{x}_{ij}=\alpha_i u_i \hat{x}_{ij}-\hat{P}_{ij}\leqq 0,\ \ \Phi^*\hat{x}_{ij}\cdot\hat{x}_{ij}=0 \\ (58) & \Phi^*\hat{X}_{ij}=\hat{P}_{ij}+\hat{k}_i f_i \hat{X}_{ij}\leqq 0,\ \ \Phi^*\hat{X}_{ij}\cdot\hat{X}_{ij}=0 \\ (59) & \Phi^*\hat{P}_{ij}=\hat{X}_{ij}-x_{ij}\lesseqgtr 0,\ \ \Phi^*\hat{P}_{ij}\cdot\hat{P}_{ij}=0 \\ (60) & \Phi^*k_i=f_i(X_i)\geqq 0,\ \ \Phi^*k_i\cdot\hat{K}_i=0\end{array}\right\}\ j=1,2\cdots\cdots,\ n$$

である。

証明 $\hat{P}_{ih}$ が (57)(58) でいずれも不等式関係にあるとすれば，$\hat{x}_{ih}=\hat{X}_{ih}=0$。ここで，$[\alpha_i u_i \hat{x}_{ih},\ -k_i f_i \hat{X}_{ih}]=Q_{ih}$ という区間を考えれば，$\hat{P}_{ih}\in Q_{ih}$ であり，かつ $\hat{P}_{ih}$ 以外の任意の $\tilde{P}_{ih}\in Q_{ih}$ についても (57)(58) が成り立つ。したがって $\hat{P}_i$ の h 成分のみを $\tilde{P}_{ih}$ にとりかえた組 $(\hat{x}_i,\ \hat{X}_i,\ <\hat{P}_{i1},\ \cdots,\ \tilde{P}_{ih}\cdots,\ \hat{P}_{in}>,\ k_i)$ も Φ^* の鞍点解である。特に Q_{ih} の両端では，$\tilde{P}_{ih}=\alpha_i u_i \hat{x}_{ih}$ あるいは，$\tilde{P}_{ih}=-k_i f_i \hat{X}_{ih}$。q. e. d.

<Lemma 8> 函数 $\varphi(x,\ y)$ が x について凹，y について凸であるとする。φ に二つの鞍点 (x^0, y^0), (x^*, y^*) があるならば，(x^0, y^0) と (x^*, y^*) との任意の一次結合もまた鞍点である。

証明 鞍点の定義より

$$(61)\quad \varphi(x^0, y^*)\leqq\varphi(x^*, y^*)\leqq\varphi(x^*, y^0)\leqq\varphi(x^0, y^0)\leqq\varphi(x^0, y^*)$$

であるから (61) の各項はすべて等しい。(その値を $\bar{\varphi}$ とする。また $0\leqq\theta\leqq 1$ とすれば，φ の凹凸性より，

$$\begin{aligned}(62)\quad & \theta\varphi(\theta x^0+(1-\theta)x^*,\ y^0)+(1-\theta)\varphi(\theta x^0+(1-\theta)x^*, y^*) \\ & \geqq\varphi(\theta x^0+(1-\theta)x^*,\ \theta y^0+(1-\theta)y^*) \\ & \geqq\theta\varphi(x^0, \theta y^0+(1-\theta)y^*)+(1-\theta)\varphi(x^*, \theta y^0+(1-\theta)y^*)\end{aligned}$$

(62) の最左辺で，φ の凹性と鞍点の定義より，

$$(63)\quad \varphi(x^0, y^0)\geqq\varphi(\theta x^0+(1-\theta)x^*, y^0)\geqq\theta\varphi(x^0, y^0)+(1-\theta)\varphi(x^*, y^0)$$

であるから，$\varphi(\theta x^0+(1-\theta)x^*, y^0)=\bar{\varphi}$。同様に $\varphi(\theta x^0+(1-\theta)x^*, y^*)=\bar{\varphi}$。また (62) の最右辺でも

$$(64)\quad \varphi(x^0, y^0)\leqq\varphi(x^0, \theta y^0+(1-\theta)y^*\leqq\theta\varphi(x^0, y^0)+(1-\theta)\varphi(x^0, y^*)$$

であるから，$\varphi(x^0, \theta y^0+(1-\theta)y^*)=\bar{\varphi}$。同様に $\varphi(x^*, \theta y^0+(1-\theta)y^*)=\bar{\varphi}$。以

上より，

(65)　$\bar{\varphi} \geqq \varphi(\theta x^0 + (1-\theta)x^*,\ \theta y^0 + (1-\theta)y^*) \geqq \bar{\varphi}$

θ は任意であるから，(x^0, y^0) と (x^*, y^*) の一次結合はすべて(65)より鞍点である。q. e. d.

以上の準備を了えたところで，次のような写像を考える。

① 一つの3次元単体 S^3 の上で，$(\alpha_i, \beta_i \mid i=1,2) \in S^3$ を選ぶ。また，非負の数値の組 $[K_{ij}]$ $(j \in J_j,\ i=1,2)$ を超直方体 $D_i (i=1,2)$ の $j \in J_i$ の成分だけが張る低次空間への正射影 $D_i{}^K$ の中で選ぶ。次にこれらの $(\alpha_i,\ \beta_i\ K_{ij})$ について定義2の世界経済厚生最大化問題を解き，その解を $(\hat{x}_i,\ \hat{x}'_i,\ \hat{X}_i,\ \hat{P}_i,\ \hat{P}_{n+1})$ とする。また $\hat{P}'_i = \dfrac{1}{\hat{P}_{n+1}} \cdot \hat{P}_i$ とおく。そのとき Lemma 1, Lemma 5 より $\hat{x}_i \in B_i,\ \hat{x}'_i \in B'_i,\ \hat{X}_i \in D_i,\ \hat{P}'_i \in P_i (i=1,2),\ <f, ; (\alpha_i,\ \beta_i,\ K_{ij}) \to (\hat{x}_i,\ \hat{x}'_i,\ \hat{X}_i,\ \hat{P}'_i) >$

② コンパクトな凸集合，$T = \prod_{i=1}^{2} (B_i \times B'_i \times D_i \times P_i)$ の中から，任意の $(x_i,\ x'_i,\ X_i,\ P_i)$ を選ぶ。次に，

$$(66)\quad A > \max_T \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left| \sum_{j \in J_i} (1+r_{ij}) P_{ij} X_{ij} + \sum_{j \in J_i^*} P_{ij} X_{ij} + \bar{x}_{i,n+1}^{/W_i{}^\alpha/} - \sum_{j \in J_i} (1+r_{ij}) P_{ij} x_{ij} - \sum_{j \in J_i^*} P_{ij} x_{ij} - x_{i,n+1} \right| + \left| I_i - \sum_{j \in J_{i0}} P_{ij} (1+r_{ij}) x'_{ij} - \sum_{j \in J-J_{i0}} P_{ij} x'_{ij} - x_{i,n+1} \right| \right\} \quad (i=1,2)$$

$|W_i{}^\beta|$

という正数 A を選び，

$$(67)\quad \alpha'_i = \max\left[0,\ \alpha_i + \frac{W_i{}^\alpha}{A}\right] \qquad (i=1,2)$$

$$(68)\quad \beta'_i = \max\left[0,\ \beta_i + \frac{W_i{}^\beta}{A}\right]$$

とおく。ただし，$I_i = \sum_{j \in J_i} \max[0,\ r_{ij} P_{ij} (x_{ij} - X_{ij})] + \bar{x}'_{i,n+1}$。さらに，

$\alpha''_i = \alpha'_i / \sum_{i=1}^{2} (\alpha'_i + \beta'_i),\ \beta''_i = \beta'_i / \sum_{i=1}^{2} (\alpha'_i + \beta'_i) (i=1,2)$ とおけば，

$(\alpha''_i\ \beta''_i \mid i=1,2) \in S^3$。$<f_2 : (\alpha_i,\ \beta_i,\ x_i,\ x'_i,\ X_i,\ P_i) \to (\alpha''_i,\ \beta''_i)>$

③　任意の $[K_{ij}]\in D_i^K$ と，$P_{ij}\in P_i$ によって，

$$(69)\quad K'_{ij}=K_{ij}\left(1-\frac{|P_{ij}-P_{kj}|}{|P_{ij}-P_{kj}|+\varepsilon}\right)$$

$$i,\ k=1,2,\ \ i\neq k,\ \ j\in J_i,\ \ \varepsilon>0$$

とおけば，明らかに $[K'_{ij}]\in D_i^K{}_0$　　$<f_3:(K_{ij},\ P_i)\to(K'_{ij})>$

以上，f_1, f_2, f_3 の三つの写像を結合して，

$$F;\ (\alpha_i,\ \beta_i,\ \underset{\cap}{K_{ij}},\ x_i,\ x'_i,\ X_i,\ P_i)\to(\alpha''_i,\ \beta''_i,\ \underset{\cap}{K'_{ij}},\ \hat{x}_i,\ \hat{x}'_i,\ \hat{X}_i,\ \hat{P}'_i)$$

$$(S^3\times\prod_{i=1}^{2}D_i^K)\times T=\tilde{T}\qquad\qquad(S^3\times\prod_{i=1}^{2}D_i^K)\times T=\tilde{T}$$

という写像が得られる。

<定理 4>　コンパクトな凸集合 $\tilde{T}$ からそれ自身への写像 F は不動点，$(\tilde{\alpha}_i,\ \tilde{\beta}_i,\ \hat{K}_{ij},\ \tilde{x}_i,\ \tilde{x}'_i,\ \tilde{X}_i,\ \tilde{P}_i)$ を少なくとも一つ持つ。

証明　点対集合写像 f_1 について，定理2より，f_1 の像は非空。また $(\hat{x}_i,\ \hat{x}'_i,\ \hat{X}_i,\ \hat{P}_i,\ \hat{P}_{n+1},)$ は函数 Φ の鞍点であるから Lemma 8 より，それらは凸性を持った像である。次に $f(u_i u^{*}_{ij})$ の最大化問題として f_1 を見ながら，$(\alpha^{\nu}_i,\ \beta^{\nu}_i,\ K^{\nu}_{ij})\to(\alpha^0_i,\ \beta^0_i,\ K^0_{ij})$ という系列を考え，前者に対応する最大化解系列 $(\hat{x}^{\nu}_i,\ \hat{x}'^{\nu}_i,\ \hat{X}^{\nu}_i)$ の収束値を $(\hat{x}^0_i,\ \hat{x}'^0_i,\ \hat{X}^0_i)$ とすれば，目的函数および制約条件の連続性から，$(\hat{x}^0_i,\ \hat{x}^0_i,\ \hat{X}^0_i)$ は $(\alpha^0_i,\ \beta^0_i,\ K^0_{ij})$ に対応する最大化解となっている。すなわち写像 $f_{1X};\ (\alpha_i,\ \beta_i,\ K_{ij})\to(\hat{x}_i,\ \hat{x}'_i,\ \hat{X}_i)$ は上半連続。さらに Lemma 7 より $(\hat{P}_i,\ \hat{P}_{n+1})$ は導函数 $u_i x_{ij},\ u^{*}_i x'_i,\ f_{iXij}$ を通じて，$(\alpha_i,\ \beta_i,\ \hat{x}_i,\ \hat{x}'_i,\ \hat{X}_i)$ の上半連続な（点対集合）函数となっている。（仮定2，3を参照。）したがって写像 $(\alpha_i,\ \beta_i,\ K_{ij})\to(\hat{x}_i,\ \hat{x}'_i,\ \hat{X}_i,\ \hat{P}_i,\ \hat{P}_{n+1})$ は上半連続。 最後に最大点 $(\hat{x}_i, \hat{x}'_i,\ \hat{X}_i)$ の一意性（仮定3の強凹性による。[6] pp. 460 参照）と (56) より $\hat{P}_{n+1}$ は一意であるから， 相対価格導出の手続 $(\hat{P}_i,\ \hat{P}_{n+1})\to\hat{P}'_i$ は上半連続性と像の凸性とを持続させる。f_2 および f_3 は点対点連続写像であり，またあきらかに空でない像を持つ。

以上より，コンパクトな凸集合 $\tilde{T}$ からそれ自身への点対集合写像 F は非空かつ凸なる像を持ち，さらに上半連続である。したがって Lemma 6 によ

り，$\tilde{T}$ の中に写像 F に関する不動点 $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i, K_{ij}, \tilde{x}_i, \tilde{x}'_i, \tilde{X}_i, \tilde{P}_i)$ が少なくとも一つは存在する。q. e. d.

(vi)　均衡解の存在証明

＜定理 5＞　定理4で得られた写像 F についての不動点における $[\tilde{P}_i, \tilde{x}_i, \tilde{x}'_i, \tilde{X}_i \mid i=1,2]$ は定義1で述べられた国際経済体系の均衡解である。

証明　①　$[\tilde{P}_i, \tilde{x}_i, \tilde{x}'_i, \tilde{X}_i \mid i=1,2]$ は写像 f_1 の構成法および Φ 函数の鞍点解となっているから（ただし，$\tilde{P}_i=\dfrac{1}{\hat{P}_{n+1}}\cdot\hat{P}_i$）(46)〜(50) をみたす。これらの諸式を i について辺々合計し((49) はそのまま)，さらに (52) を考慮すれば (7)(8) が導かれる。したがって上の不動点は定義1の均衡解の条件 c) をみたしている。

②　同じく不動点は (40)(41) をみたす。かつそのとき，$\dfrac{\hat{k}_i}{\hat{P}_{n+1}}=\dfrac{\hat{\mu}_i}{\hat{\lambda}_i}$ $(\hat{\mu}_i, \hat{\lambda}_i>0,\ i=1,2)$ と見做すことにより，(27)(28) が導かれる。さらに④で後述するように，$J_{i1}=J_i-J_{i0}$，$J_{i2}=J_{i0}$，$\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i>0\ (i=1,2)$ であるから，不動点のみたす (34)〜(39) で，$\dfrac{\hat{P}_{n+1}}{\tilde{\alpha}_i}=\hat{\lambda}_i$，$\dfrac{\hat{P}_{n+1}}{\tilde{\beta}_i}=\hat{\nu}_i$ と見做すことにより (25)(26)(31)(32) が導かれる。したがって不動点は収支バランスの条件 (29)(=(2))，(33)(=(5)) を除いて，均衡解の条件 a) および b) をみたしている。

③　次に国際価格均等の条件 d) について検討しよう。

写像 f_3 の構成法 (69) より不動点 $[K_{ij}]$ では $K_{ij}=0$ あるいは $\tilde{P}_{ij}=\tilde{P}_{kj}$ である。したがって

㋑　$j\in J_{i1}$ に関しては，(34)〜(45) で必らず，

(70)　$\hat{P}_{ij}=\hat{P}_{n+1}\cdot\tilde{P}_{ij}=\hat{P}_{n+1}\cdot\tilde{P}_{kj}=\hat{P}_{kj}$

一方 (44) より，

(71)　$\tilde{M}_{ij}>0$ のとき，$\hat{P}_{ij}(1+r_{ij})=\hat{\rho}_{kj}+\hat{\theta}_{ij}$，$j\in J_{i1}$，また (52) で $\tilde{M}_{ij}>0$ のときは必らず $\tilde{E}_{kj}>0$ であるから，(43) で i と k とを交換して考えれば，

(72)　$\tilde{M}_{ij}>0$ のとき，$\hat{P}_{kj}=\hat{\rho}_{kj}$，　$j\in J_{i1}$，$i\neq k$

以上を合して，

(73)　$\tilde{M}_{ij}>0$ のときは，$\hat{P}_{ij}\ r_{ij}=\hat{\theta}_{ij}$　$j\in J_{i1}$

(74) $(\tilde{x}_{ij}+\tilde{x}'_{ij}-\tilde{X}_{ij})(\tilde{P}_{ij}-\tilde{P}_{kj})=0 \quad (i,\ k=1,2,\ i\neq k) \quad j\in J_{i1}$

㊐ $j\in J_{i2}$ については，(47)より $\tilde{x}_{ij}+\tilde{x}'_{ij}-\tilde{X}_{ij}\leqq 0 \quad j\in J_{i2}$

したがって

(75) $\max\ [0,\ \tilde{x}_{ij}+\tilde{x}'_{ij}-\tilde{X}_{ij}]\ (\hat{P}_{ij}-\hat{P}_{kj})=0 \quad (i,k=1.2,\ i=k)\ j\in J_{i2}$

㊇ $j\in J_{k1}+J_{k2}$ については，(45)より，

(76) $\tilde{M}_{ij}>0$ のとき，$\hat{P}_{ij}=\hat{\rho}_{kj},\ j\in J_{k1}+J_{k2},\ i\neq k$

(52)(42) で i と k とを交換して考えれば，

(77) $\tilde{M}_{ij}>0$ のとき，$\hat{P}_{kj}(1+r_{kj})=\hat{\rho}_{kj},\ j\in J_{k1}+J_{k2},\ i\neq k$

さらに(48)(49)より，$\tilde{x}_{ij}+\tilde{x}'_{ij}-\tilde{X}_{ij}>0$ であれば必らず $\tilde{M}_{ij}>0$。したがって以上より，

(78) $\max\ [0,\ \tilde{x}_{ij}+\tilde{x}'_{ij}-\tilde{x}_{ij}]\ ((1+r_{kj})\tilde{P}_{kj}-\tilde{P}_{ij})=0 \quad j\in J_{k1}+J_{k2}=J_i^*$

㊀ (74)(75)(78) を並べてみるとこれは均衡解の条件 d) そのものである。

④ 最後に収支バランスの条件

まず不動点においては，(5)で定義した J_i-J_{i0} が J_{i1} に等しいことを示そう。$j\in J_{i1}$ でもし $M_{ij}=0$ とすれば，(53)より $\hat{\theta}_{ij}=0$。一方(44)より，$\hat{P}_{ij}(1+r_{ij})\leqq\hat{\rho}_{kj}$ かつ(43)より $\hat{\rho}_{kj}\leqq\hat{P}_{kj}$。しかるに(70)で示されたように，$\hat{P}_{ij}=\hat{P}_{kj}$。これは $r_{ij}>0$ という前提に矛盾する。したがって，$j\in J_{i1}$ では必らず $\hat{\theta}_{ij}>0$ すなわち $\tilde{M}_{ij}=K_{ij}>0$。このときもし $\tilde{E}_{ij}>0$ とすれば，最大化問題としての性質から $\tilde{M}_{kj}>0$。したがって上述㊇より，$\tilde{P}_{kj}=(1+r_{ij})\tilde{P}_{ij}$。これも $\hat{P}_{ij}=\hat{P}_{kj}$ に矛盾するから，$\tilde{E}_{ij}=0$。以上と(46)で等式の成立することより，$\hat{x}_{ij}+\hat{x}'_{ij}-\hat{X}_{ij}>0$。ここで仮定5(*)を想起すれば，$J_{i1}\Rightarrow J_i-J_{i0}$。一方明らかに，$J_{i2}\Rightarrow J_{i0}$ かつ，$J_{i1}+J_{i2}=J_i$ であるから，不動点では $J_{i1}=J_i-J_{i0}$，$J_{i2}=J_{i0}$。また(4)の $\hat{I}_i$ は不動点においては

(79) $\hat{I}_i=\sum_{j\in J_{i1}} r_{ij}\tilde{P}_{ij}(\tilde{x}_{ij}-\tilde{X}_{ij})+\bar{x}'_{i'\,n+1}$

と書かれる。

α'_i, β'_i の構成法より，不動点では $\tilde{W}_i^{\alpha}$, $\tilde{W}_i^{\beta}$ $(i=1.2)$ はすべて同符号であ

る。次にそれらを $\hat{P}_{n+1}$ 倍しつつ合計して，財グループ別にまとめる。それを

$$(80)\quad \hat{P}_{n+1}\cdot\sum_{i=1}^{2}(\widetilde{W}_i^{\alpha}+\widetilde{W}_i^{\beta})$$
$$=(\sum_i\sum_{j\in J11})+(\sum_i\sum_{j\in J12})+(\sum_i\sum_{j\in J21})+(\sum_i\sum_{j\in J22})+(\sum_i{}_{j=n+1})$$

と表わす。

㋑　$j\in J_{11}$ について

$$(81)\quad (\sum_i j\in J_{11})=(1+r_{1j})\hat{P}_{1j}(\widetilde{X}_{1j}-\widetilde{x}_{1j})+r_{1j}\hat{P}_{1j}(\widetilde{x}_{1j}-\widetilde{X}_{1j})$$
$$-\hat{P}_{1j}\widetilde{x}'_{1j}+\hat{P}_{2j}(\widetilde{X}_{2j}-\widetilde{x}_{2j})-\hat{P}_{2j}\widetilde{x}'_{2j}$$
$$=\hat{P}_{1j}(\widetilde{X}_{1j}-\widetilde{x}_{1j}-\widetilde{x}'_{1j})+\hat{P}_{2j}(\widetilde{X}_{2j}-\widetilde{x}_{2j}-\widetilde{x}'_{2j})$$

一方，(46)(48)(70)より

$$(82)\quad \hat{P}_{1j}(\widetilde{X}_{1j}-\widetilde{x}_{1j}-\widetilde{x}'_{1j})+\hat{P}_{2j}(\widetilde{X}_{2j}-\widetilde{x}_{2j}-\widetilde{x}'_{2j})$$
$$+\hat{P}_{2j}(\widetilde{M}_{1j}-\widetilde{E}_{2j})+\hat{P}_{1j}(\widetilde{M}_{2j}-\widetilde{E}_{1j})=0$$

(82)の第3項は(72)と(52)$(i=2)$ よりゼロ。また第4項で $\widetilde{E}_{1j}\geqq\widetilde{M}_{2j}>0$ とすれば(42)(45)より，$\hat{P}_{1j}(1+r_{1j})=\hat{\rho}_{1j}$，$\hat{P}_{2j}=\hat{\rho}_{1j}$，したがって，$\hat{P}_{1j}(1+r_{1j})=\hat{P}_{2j}$。これは(72)に矛盾するから，$\widetilde{M}_{2j}=0$。もしこのとき $\widetilde{E}_{1j}>0$ であれば(52)より，$\hat{P}_{1j}=\hat{P}_{2j}=\hat{\rho}_{1j}=0$。したがっていずれにせよ，第4項はゼロ。以上より(82)の第1項と第2項との和はゼロ。したがって(81)はゼロ。これを $j\in J_{11}$ について合して，

$$(83)\quad (\sum_i\sum_{j\in J11})=0$$

㋺　$j\in J_{12}$ について

$$(84)\quad (\sum_i j\in J_{12})=(1+r_{1j})\hat{P}_{1j}(\widetilde{X}_{1j}-\widetilde{x}_{1j})-\hat{P}_{1j}(1+r_{1j})x'_{1j}$$
$$+\hat{P}_{2j}(\widetilde{X}_{2j}-\widetilde{x}_{2j})-\hat{P}_{2j}\widetilde{x}'_{2j}$$
$$=\hat{P}_{1j}(1+r_{1j})(\widetilde{X}_{1j}-\widetilde{x}_{1j}-\widetilde{x}'_{1j})$$
$$+\hat{P}_{2j}(\widetilde{X}_{2j}-\widetilde{x}_{2j}-\widetilde{x}'_{2j})。$$

(47)(49)より

$$(85)\quad \hat{P}_{1j}(1+r_{1j})(\widetilde{X}_{1j}-\widetilde{x}_{1j}-\widetilde{x}'_{1j})+\hat{P}_{2j}(\widetilde{X}_{2j}-\widetilde{x}_{2j}-\widetilde{x}'_{2j})$$

$$+P_{1j}(1+r_{1j})(\widetilde{M}_{2j}-\widetilde{E}_{1j})-(P_{1j}(1+r_{1j})-P_{2j})\widetilde{M}_{2j}=0$$

(85) の第3項は $\widetilde{E}_{1j}\geqq\widetilde{M}_{2j}>0$ とすれば，(42)(52) よりゼロ。$\widetilde{E}_{1j}>\widetilde{M}_{2j}=0$ とすれば同じく，$\hat{P}_{1j}=\hat{\rho}_{1j}=0$。したがっていずれにせよこの項はゼロ。また第4項につき，(49) と最大化問題の性質より，$\widehat{M}_{2j}=\hat{x}_{2j}+\hat{x}'_{2j}-\hat{X}_{2j}$。とすれば (78) で $i=2$, $k=1$ と考えることによりこの項もゼロ。以上より (85) の第1項と第2項との和はゼロ。したがって (84) はゼロ。これを $j\in J_{12}$ について合して，

(86) $(\sum_{i}\sum_{j\in J12})=0$

㊋ J_{11}, J_{12} と J_{21}, J_{22} の対称性から，上と同様の議論で，

(87) $(\sum_{i}\sum_{j\in J21})=(\sum_{i}\sum_{j\in J22})=0$。

また (50) よりあきらかに

(88) $(\sum_{i,\ j=n+1})=0$

以上より，(80) はゼロであり，同符号ということから，

(89) $\widetilde{W}^{\alpha}_{i}=\widetilde{W}^{\beta}_{i}=0 \quad (i=1,2)$

こうして不動点においては収支バランスの条件 (2) (5) も等式でみたされていることがわかった。なお，$\bar{x}_{i,\ n+1}$, $\bar{x}'_{i,\ n+1}>0$ の存在より，

(90) $\sum_{j\in J_i}(1+r_{ij})\widetilde{P}_{ij}\cdot\widetilde{X}_{ij}+\sum_{j\in J^{*}_{i}}\widetilde{P}_{ij}\widetilde{X}_{ij}+\bar{x}_{i,\ n+1}>0 \quad (i=1,2)$

(91) $I_i>0 \quad (i=1,2)$

であるから，α_i, $\beta_i>0$ $(i=1,2)$。(たとえばもし $\alpha_1=0$ とすれば，(34)〜(36) より $\widetilde{x}_{1j}=0$ あるいは $\widetilde{x}_{1j}>0$ かつ $\hat{P}_{1j}=0$ $(j=1,2,\cdots\cdots n)$ および $\widetilde{x}_{1,n+1}=0$ そのとき (90) より $W^{\alpha}_{1}>0$ となり (89) に矛盾。)

以上均衡解の条件 (定義1の a) b) c) d)) は不動点 $[\widetilde{P}_i,\ \widetilde{x}_i,\ \widetilde{x}'_i,\ \widetilde{X}_i \mid i=1,2]$ においてすべてみたされていること，したがってまた前者の存在することが証明された。q. e. d.

引 用 文 献

[1] Kakutani, S., 'A. generalization of Brower's fixed point theorem.' Duke mathematical jornal, pp. 457–459, 1941.

[2] Kuhn, H. W. & A. W. Tucker, 'Non-linear programming' Proceedings of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability. pp. 481–492, 195I.

[3] Negishi, T., 'Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy.' Metroeconomica 12, pp. 92–97, 1960.

[4] 二階堂副包： 現代経済学の数学的方法, 岩波書店, 1960.

[5] Uzawa, H., 'The Kuhn-Tucher theorem in concave programming,' in Studies in linear and nonlinear programming, pp. 32–37, 1958.

[6] Uzawa, H., 'Prices of the Factors of Produclion in International Trade,' Econometrica, July, pp. 448–468, 1959.