<研究ノート>

新古典派二部門モデルにおける生産可能性フロンティアと要素価格フロンティア

若　林　信　夫

1．序，2．二部門モデルの定式化，3．二部門モデルの二，三の性質，
4．生産可能性フロンティア，5．要素価格フロンティア，6．双対性，
7.最適変換フロンティア，8.ＣＥＳ生産経済における論証，補．一定の
弾力性をもつ要素価格フロンティア

1．序

新古典派の二部門経済分析は，もともと，サミュエルソン〔18の第70章〕が，二国二財二要素の単純化された国際貿易論を展開する際に使用してきたものである。宇沢の一連の業績（例えば，〔22〕）は，二部門の対とその環境を色々選ぶことにより，現代経済学の基礎をきずいた。

この論文は最もポピュラーな新古典派の二部門モデルの枠組の下で，生産可能性フロンティア（ＰＰＦ）と要素価格フロンティア（ＦＰＦ）の双対的関係を論理的に明らかにすることを目的とする。両者の関係は，古典的には，生産と費用の双対という形をとって，サミュエルソンの「基礎」以来，シェファード〔20〕，宇沢〔23〕らが調べているが，ここで扱うのは，現代的なアプローチ即ち，成長率と利潤率の双対という，サミュエルソン〔18の第29章，第28章〕，森島〔14〕，ブルーノ〔４〕〔19の第XI章〕，バーマイスタ・久我〔５〕らのアプローチである。新古典派二部門のもとで，後者のアプローチの包括的な議論は殆んどなされていない。本稿は，その目的のためにまず，新古典派の二部門モデルを構築し，そこでの生産可能性フロンティアと要素価格フロンティアを論じ，両者の双対性を証明する。これは，非線形計画法の双対定理からも，定義的な関係からもいえる。最後に本論の二，三の重要な結果を，ＣＥＳ経済において論証する。なお，付録において，一定弾力性の要素価格フロンティア（ＣＥＦ）の導出を試み，その性質を明らかにする。

二部門分析は「教育的価値」の高い経済理論である。それゆえ，二部門分

析を多数財多数要素のいわゆる多部門分析に拡大することは試みなかった。しかし，マルタイセクターモデル，進んでヴィンテージモデルでの双対性を調べることは依然残された問題である。

2. 二部門モデルの定式化[1]

二財，例えば投資財と消費財，X_1，X_2を，二つの同質的な生産要素，資本Kと労働Lによって生産することができる閉鎖経済を考える。K_iを第i産業部門における資本，L_iを第i部門における労働とする。各部門の技術的生産関係：

(1)　$X_i = F_i(K_i, L_i) \quad i=1, 2$

は，規模に関して収穫不変が成立すると仮定する。即ち，生産関数は一次同次である。このことから平均生産物は，資本労働比率 $k_i = K_i/L_i$ にだけ依存する。

(1)′　$X_i = L_i f_i(k_i) \quad i=1, 2$

X_i で測った資本の限界生産物はそのとき，

(2)　$f_i' \equiv df_i(k_i)/dk_i \quad i=1, 2$

また，労働の限界生産物は

(3)　$f_i - k_i f_i'$

である。ここで限界生産物がk_iだけの関数であることに注意しよう。

限界生産物はすべて正かつ逓減的であるとする。すなわち

(4)　$f_i'' \equiv d^2 f_i/dk_i^2 < 0 \quad i=1, 2$

競争的条件の下では，いかなる外部経済，不経済も存在しないから，要素の限界生産物の価値は，その要素の報酬（収益）に等しくなければならない。従って，それは両部門において同一でなければならない。いま，価格比pを第1財で測った第2財の価格として導入すると，上述の関係は，

(5)　$f_1' = pf_2'$

(6)　$f_1 - k_1 f_1' = p(f_2 - k_2 f_2')$

と書き表わされる。

---

1) 例えば，サミュエルソン〔18の第70章〕宇沢〔22〕，ケンプ〔9〕，福岡・川又〔7〕，シェル〔19〕，戸島〔21〕などを参照せよ。

いま，w_i，r_iをそれぞれ，第i財で測った賃金率，資本レンタルとすると，(5)，(6)より

(7)　$\dfrac{w_1}{r_1}=\dfrac{w_2}{r_2}\equiv\dfrac{w}{r}\equiv\omega$

なる関係が成立する。なお，

(8)　$w_1=f_1'=pf_2'$

$r_1=f_1-k_1f_1'=p(f-k_2f_2')$

であるが，文脈上混乱のない限り$w_1=w$，$r_1=r$とする。

さらに競争的条件の下では，両生産要素は完全利用されるから，

(9)　$K_1+K_2=\overline{K}$　又は$L_1k_1+L_2k_2=\overline{K}$

$L_1+L_2=\overline{L}$　又は$L_1+L_2=\overline{L}$

が成立しなければならない[2)]。ここで$\overline{K}$，$\overline{L}$はそれぞれ，経済全体に占める資本量，労働量であるが，混乱のない限り$\overline{K}=K$，$\overline{L}=L$と書く。

以上の式は，二部門モデルの基本的関係である。

3.　二部門モデルの二，三の性質

この節は，上で構築したモデルの下で，資本労働比率と賃金レンタル比の関係，賃金レンタル比と生産物価格比の関係，および両比率のとりうる範囲を決定する。これらはそれ自身興味があるばかりでなく，次節以降の準備的資料を提供する[3)]。

2）たとえ，資源配置の実現可能性条件として，

$K_1+K_2\leqq\overline{K}$

$L_1+L_2\leqq\overline{L}$

が明示されようとも最適性のためには，等号にならなければならない。なぜなら最適のための条件としてキューン・タッカーの条件：

$r[\overline{K}-(K_1+K_2)]=0$

$w[\overline{L}-(L_1+L_2)]=0$

が成立する。限界生産物が正であるという条件から明らかである。なお171頁以下参照のこと。

この命題の意味において，達成されるk_iを有効（エフイシエント）な資本労働比率と呼ぶこともある。以下は全て有効な資本労働比率に限っているのでその形容詞を省略する。

3）同一の結果は，既に宇沢〔22〕，ケンプ〔9〕，シェル〔19〕等によって殆んど得られている。

〔1〕 資本労働比率と賃金レンタル比の関係

(7), (8)より

(10)　$\omega = \dfrac{f_i\,(k_i)}{f_i'\,(k_i)} - k_i \quad i = 1,\ 2$

従って

(11)　$\dfrac{dk_i}{d\omega} = \dfrac{-[f_i'(k_i)]^2}{f_i(k_i)\ f_i''(k_i)} > 0$

が成立する。このことから,

命題：資本労働比率 k_i は，賃金レンタル比 ω の関数として，一意にしかも逓増的に決定される。（図1参照）

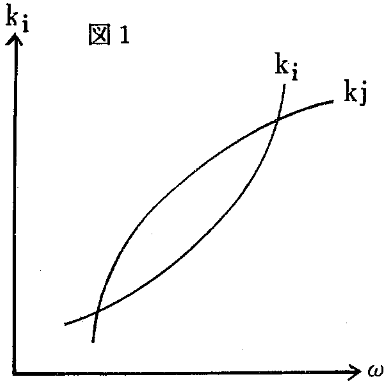


図1

$k_i = k_i(\omega)$ は第i部門における資本労働比率を最小にする単位生産費を表わす。

〔2〕 価格軌跡（賃金レンタル比と生産物価格比の関係）

生産物価格比は，(8)式より $p = f_1'/f_2'$ と書かれるが，上の関係により，もっと明示的に次のように書く。

(12)　$p\,(\omega) = \dfrac{f_1'\,(k_1\,(\omega))}{f_2'\,(k_2\,(\omega))}$

(12)式の両辺の対数微分をとることにより

(13)　$\dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{d\omega} = \dfrac{1}{k_2\,(\omega) + \omega} - \dfrac{1}{k_1\,(\omega) + \omega} \gtrless 0 \quad \text{as} \quad k_1 \gtrless k_2$

が成立する。かくして，

命題1：第1部門の資本集約度（資本労働比率）が第2部門のそれよりも高いならば，資本集約度の低い第2部門で作られる第2財の相対価格は賃金レンタル比とともに増大する。逆に第2部門の方が第1部門よりも資本集約度が高いならば，資本集約度の高い第2部門で作られる第2財の相対価格は賃金レンタル比の減少関数である。また，両部門の資本集約度が同一ならば，価格比は，賃金レンタル比の変化に反応がない。

(13)の両辺にωを乗じると次を得る。

(14)　$Ep\,(\omega) \equiv \dfrac{\omega}{p} \cdot \dfrac{dp}{d\omega} = \dfrac{\omega}{k_2\,(\omega) + \omega} - \dfrac{\omega}{k_1\,(\omega) + \omega} = \dfrac{k_1\,(\omega) - k_2\,(\omega)}{\left(\dfrac{k_1\,(\omega)}{\omega} + 1\right)\left(\dfrac{k_2\,(\omega)}{\omega} + 1\right)}$

これより，

(15)　$-1 < Ep(\omega) < 1$

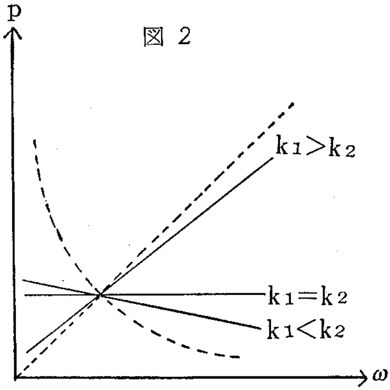
を得る。なぜなら，$k_1 > k_2$のとき，$Ep(\omega) \geq 1$と仮定してみる。そのときk_2をk_1にできるだけ近づけると左辺→0，他方右辺は≧1であるから矛盾。他の場合も帰謬法によって結論される。

系：要素報酬比（賃金レンタル比）の変化に対する生産物価格比の弾力性はプラス1とマイナス1の中間になければならない。

図2は価格軌跡を集約度条件に応じて描写した。点線の直線は$Ep(\omega)=1$，双曲線は$Ep(\omega)=-1$のときの価格軌跡を示す。

〔3〕 賃金レンタル比と価格比の範囲の決定

図 2



(9)式は，$Li/L = l_i$と定義することによって

$$(16)\quad \begin{aligned} k_1 l_1 + k_2 l_2 &= k \\ l_1 + l_2 &= 1 \end{aligned}$$

となる。これより，

$$(17)\quad \begin{aligned} l_1 &= \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1} \\ l_2 &= \frac{k - k_1}{k_2 - k_1} \end{aligned}$$

を得る。いま，$k_2 > k_1$が成立していると仮定する。このとき，(16)より，

（i）　$k_2 > k > k_1$　（ii）　$k_2 = k > k_1$　(iii)　$k_2 > k = k_1$

のいずれかしか成立しえない。他の起りうるケースは，生産要素の完全利用に抵触する。

（i）～(iii)に対応して

（i）　$1 > l_1 > 0$かつ$1 > l_2 > 0$，（ii）　$l_1 = 0$，$l_2 = 1$

(iii)　$l_1 = 1$，$l_2 = 0$

がある。即ち，（i）は，両財が生産されるケース，（ii）は第2財に，(iii)は第1財に生産が特化されることを示す。

前2図を組合わせると，図3を得る。但し，$k_2 > k_1$の場合だけを描いた。

⑾，⒀，⒃により相対価格比と賃金レンタル比のとりうる範囲が決定される。

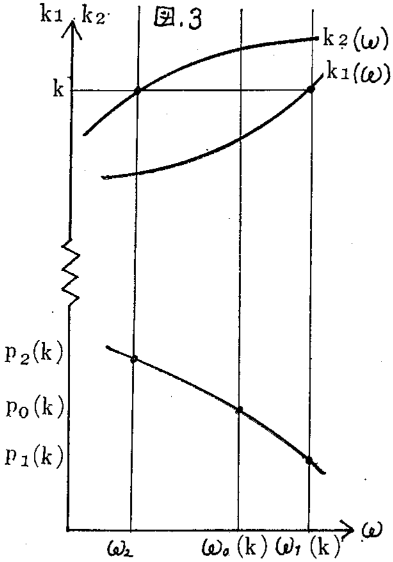
臨界変数を次のように定める。

$$\text{(18)}\quad \begin{aligned} \underline{\omega}(k) &= \mathrm{Min}[\omega_1(k),\ \omega_2(k)] \\ \overline{\omega}(k) &= \mathrm{Max}[\omega_1(k),\ \omega_2(k)] \end{aligned}$$

従って，

$$\text{(19)}\quad \begin{aligned} \overline{p}(k) &= p_2(k) \equiv p(\omega_2(k)) \\ \underline{p}(k) &= p_1(k) \equiv p(\omega_1(k)) \end{aligned}$$

である。



4. 生産可能性フロンティア

経済全体の資本集約度$k = K/L$が与えられたとき，いいかえれば総資本Kと総労働Lの比率が一定値に与えられるとき，第1財と第2財の最大生産可能性表を，生産可能性フロンティア（ＰＰＦ）という。

生産関数

$$\text{(1)}''\quad X_i = L_i f_i{}^j(k_i)$$
$$= l_i L f_i{}^j(k_i) \qquad i = 1,\ 2 \qquad j = 0,\ 1,\ 2$$

は上図に対応して第i財の第j番目の産出量と投入量の関係を示す。kが所与のとき，$X_1{}^j$と$X_2{}^j$（$j = 0,\ 1,\ 2$）を第一象限にプロットすると，右図のような生産可能性フロンティア（ＰＰＦ）ができる。このとき，

命題３：ＰＰＦの接線の勾配は，価格比にマイナスを付したものに等しい。

系：競争的生産者が利潤を最大にする

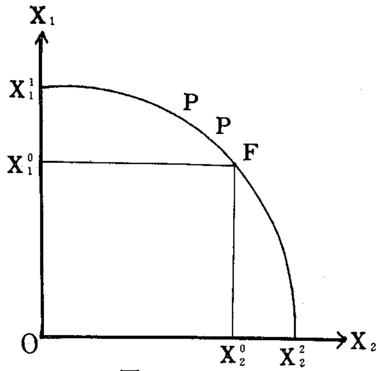


図4

ならば，kが与えられると，価格比pは第1財と第2財の産出量を決定する。従って，$X_1(k, p)$，$X_2(k, p)$，と書き表わされる。

命題4：資本集約度が両部門において相異なるならば，PPFは，上に凸である。もし両部門が同一の資本集約度であれば，PPFは直線になる。

以下，上の二つの命題を確かめておく。

命題3の証明：

まず，両部門の限界代替率は常に等しいという仮定(7)によって，(1)から，

(20) $$\frac{\partial F_1}{\partial L_1}\Big/\frac{\partial F_1}{\partial K_1}=\frac{\partial F_2}{\partial L_2}\Big/\frac{\partial F_2}{\partial K_2}$$

を得る。次に，完全雇用の条件(9)により，

(21) $$dL_1=-dL_2$$
$$dK_1=-dK_2$$

を得る。これらを用いて

$$\frac{dX_1}{dX_2}=\frac{\frac{\partial F_1}{\partial K_1}dK_1+\frac{\partial F_1}{\partial L_1}\ dL_1}{\frac{\partial F_2}{\partial K_2}dK_2+\frac{\partial F_2}{\partial L_2}\ dL_2}=\frac{-\frac{\partial F_1}{\partial K_1}dK_2-\frac{\partial F_1}{\partial K_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial L_2}\Big/\frac{\partial F_2}{\partial K_2}dL_2}{\text{〃}}$$

(22) $$=\frac{-\frac{\partial F_1}{\partial K_1}}{\frac{\partial F_2}{\partial K_2}}=-\frac{f_1'(k_1)}{f_2'(k_2)}=-p$$

を得る。

命題4の証明：

(23) $$\frac{d^2X_1}{dX_2^2}=\frac{d}{dX_2}\left(\frac{dX_1}{dX_2}\right)=-\frac{dp}{dX_2}=-\frac{dp}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dk_2}\cdot\frac{dk_2}{dX_2}$$

が負なることをいう。ところが前節の結果より第二項は正，第一項は $k_1 \gtreqless k_2$ に応じて $\frac{dp}{dw} \gtreqless 0$ である。しかるに第三項は，$X_2=L\frac{k-k_1}{k_2-k_1}f_2(k_2)$ を k_2 に関して微分し，整理すると

(24) $$\frac{(k_2-k_1)^2}{L}\frac{dX_2}{dk_2}=(k-k_2)f_2\frac{dk_1}{dk_2}+(k_1-k)(f_2-k_2f_2'+k_1f_1')$$

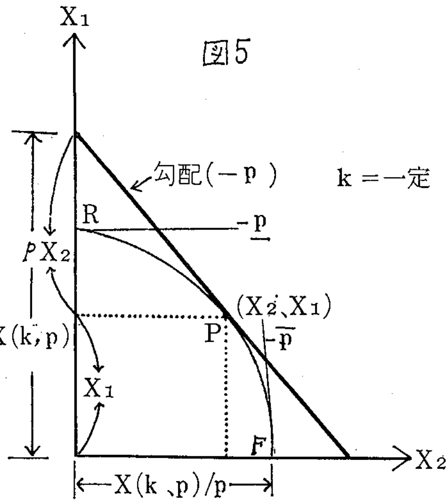
であるから，$\frac{dk_1}{dk_2}>0$ に注意して，$k_1 \gtreqless k_2$ に応じて $\frac{dk_2}{dX_2} \gtreqless 0$ となる。従っ

て。

(25)　$\frac{d^2 X_1}{dX_2{}^2} \leqq 0$

を得る。等号が成立するのは，$k_1=k_2$のときに限る。[4)]

次に，二部門モデルのＰＰＦは，$k=\frac{K}{L}$又はpの変化に応じて，どのように変化するであろうか。



X_2を任意の非負値に固定したとき，生産可能性フロンティア

(26)　$X_1=X_1(k,p)=T_1(X_2;k,p)$

は，変換曲線(Transformation Curve) 又は，機会費用曲線と呼ぶ。ここで，$\frac{\partial X_1}{\partial k}$，$\frac{\partial X_1}{\partial p}$の符号を調べよう。

〔1〕　$\frac{\partial X_1}{\partial k}$

(27)　$X_1=\frac{k_2-k}{k_2-k_1}Lf_1(k_1)$

をkで偏微分すると

(28)　$\frac{\partial X_1}{\partial k}=-\frac{Lf_1(k_1)}{k_2-k_1}\gtrless 0 \quad \text{as} \quad k_2 \lessgtr k_1$

を得る。すなわち，ある部門の資本集約度が他の部門のそれよりも高ければ，経済全体の１人当り資本量が増大するにつれ，より低い資本集約度の産業部門の産出量は減少する。（リプチンスキー〔16〕の定理）

4)　この命題の証明方法は，多数あるが，我々のものはより簡単である。なお，この命題は，厚生経済学，貿易理論等の基本的前提とされることがある。ランカスター〔11.第8章〕は，ＰＰＦが上に凸になる必要条件を導いている。

〔2〕　$\dfrac{\partial X_1}{\partial p}$

命題4の証明から，

$$\frac{\partial X_1}{\partial p}=-\frac{\partial X_1}{\partial\left(\frac{dX_1}{dX_2}\right)}=-\frac{\partial X_1}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial\left(\frac{dX_1}{dX_2}\right)}<0 \tag{29}$$

すなわち，第1財で表わした第2財の価格が騰貴するにつれ，第1財の産出量は減少する。

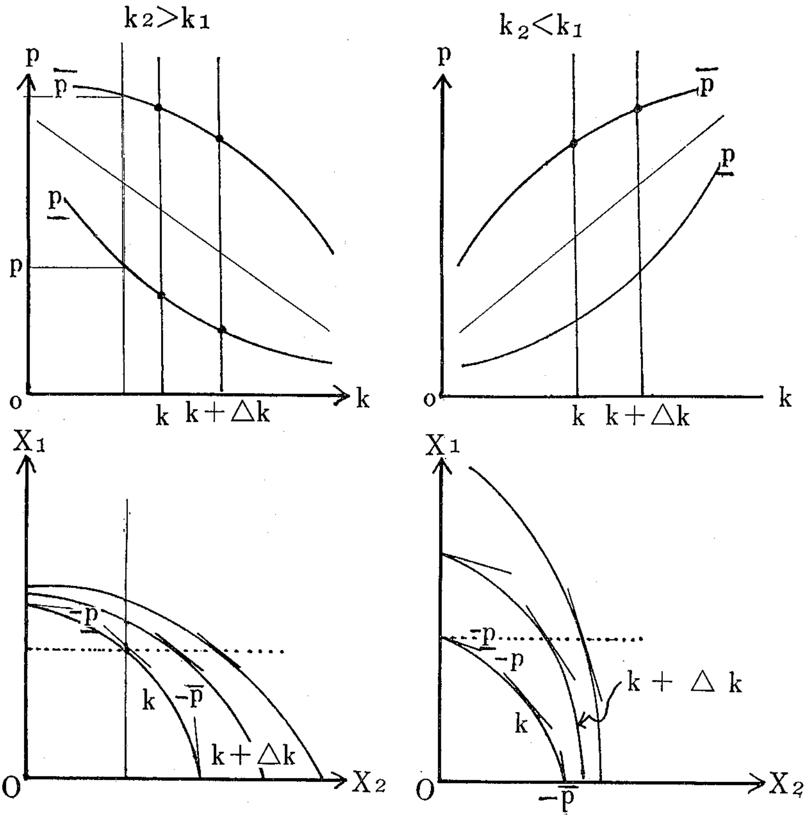


図6

〔3〕　$\left.\dfrac{dp}{dk}\right|_{X_1固定}$

〔1〕,〔2〕より

$$(30)\quad \frac{dp}{dk}=-\frac{\dfrac{\partial X_1}{\partial k}}{\dfrac{\partial X_1}{\partial p}} \lesseqgtr 0 \quad \text{as} \quad k_2 \gtreqless k_1$$

以上の結果を図示すれば図6のようになる。$k_2 \lesseqgtr k_1$ を一枚のグラフに描くと図7のようになる[5)]。この図はまた,「リプチンスキーの定理」と「要素価格均等化定理」を示すのに用いることができる。

始めに,リプチンスキーの定理は,次のように改めて述べることができる。

「二つの財貨生産部門があって,両部門の資本集約度は常に一定値をとるとする。従って相対価格比は不変とする。いま,ある要素供給にのみ増加がみられたとする。そのとき増加した要素を,より集約的に用いる生産部門の産出量は増加し,より粗放的に用いる部門の産出量は減少する。」

図において,直線EFより下側のPPFの族において,相対価格比一定の軌跡(isocline locus)を考察する。そこでは,$k_2<k_1$,つまり第1部門の方がより資本集約的であるから,kが増加するにつれ,X_1が増加していく(すなわち,左上方に進む)ことが保証される。

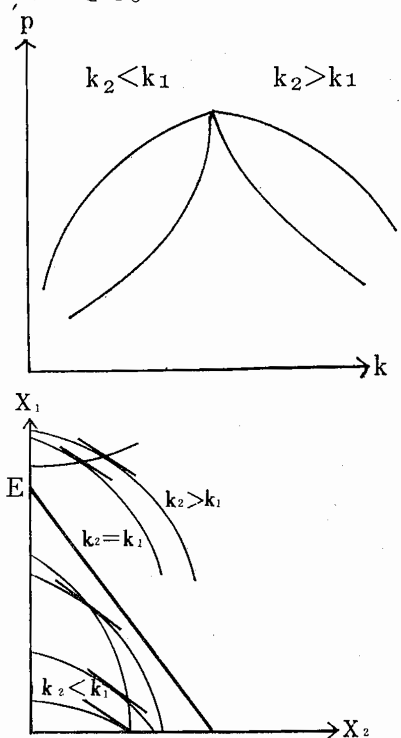


図7

5) 図7の下図は,既にサミュエルソン〔17. P287〕が描いている。上下を対にして書けることは,小樽商大戸島熈助教授に負う。同助教授の御指導に対し深く感謝したい。

これは，リプチンスキーの定理に他ならない。ＥＦの上側についても全く同様である。

次に要素価格均等化定理は周知の通り次のように述べられる。

「われわれの二部門モデルの仮定に加えて，二国を想定する。このとき，自由貿易の下で商品の国際価格が均一になったとき，両国が二商品をともに生産しており，各商品の要素集約度の順序が国際的に同一であれば，生産要素の価格もまた国際的に均等化する。」

図とすぐ上の定理との関連をみよう。両国とも，ＥＦの上又は片側に位置している場合には，要素素約度の逆転は起らないから，均等化定理は成立する。もし，両国がＥＦの両側に位置している場合には，資本が相対的に過剰な下側の国は資本が相対的に不足な下側の国より，低いレンタルと高い賃金をもつことになり均等化定理は成立しない。また，ＥＦ上では集約度が同一であるため，一国ケースに帰着する。

5.　要素価格フロンティア

要素価格フロンティアはいろいろな解釈をもちうる。サミュエルソン〔19. 第28章〕によって「基本的要素価格フロンティア」，ヒックス〔8〕によって「賃金フロンティア」と呼ばれた[6]ものは，通常次のように定義される。即ち，均衡実質賃金率と資本レンタル（利潤率・利子率）の間の定常状態構成が要素価格フロンティアである。他方，最近ブルーノ〔４〕の結果は，定常状態を陽表的におかないで，均衡のｒとｗの関係として論じている。

では，われわれが終始一貫して仮定しつづける新古典派の二部門モデルでは，要素価格フロンティアはどのような形状をとりうるであろうか。これを明らかにした後，前節の生産可能性フロンティアとの双対関係を調べよう。

要素市場と財貨市場において均衡が成立していると，前に述べたように要素価格は次のようにきまる。

6)　von Thünen, J.Robinson P.Samuelson P.Sraffa 等が各種の資本モデルに対してこのようなフロンティアが存在することを示唆した。

$$(8)'' \quad \begin{aligned} & r=f_1'(k_1)=pf_2'(k_2) \\ & w=f_1(k_1)-k_1f_1'(k_1)=p(f_2(k_2)-k_2f_2(k_2)) \end{aligned}$$

この四本の式から必要な変数を消去して

$$(31) \quad w=\phi(r)$$

なる関係—要素価格フロンティア—を求める。しかしわれわれは $\frac{dw}{dr}$, $\frac{d^2w}{dr^2}$ なる定性的性質により，要素価格フロンティアの形状を知ることで満足しよう。(8)″式を全微分することにより

$$(32) \quad \begin{aligned} & dr=f_1''(k_1)dk_1 \\ & dw=f_1(k_1)dk_1-f_1'(k_1)dk_1-k_1f_1''(k_1)dk_1 \end{aligned}$$

よって，

$$(33) \quad \frac{dw}{dr}=-k_1 \quad <0$$

また，

$$(34) \quad \frac{d^2w}{d^2r}=\frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr}\right)=-\frac{dk_1}{dr}=-\frac{1}{f_1''(k_1)}>0$$

かくして，要素価格フロンティア $w=\phi(r)$ は常に原点に対して凸である。（図8）

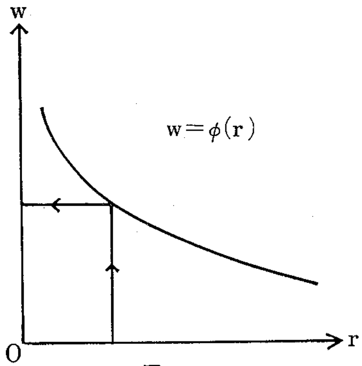


図8

しかし，二部門モデルを(8)″の代わりに

$$\begin{aligned} & r=f_1'(k_1)=pf_2'(k_2) \\ & w=\frac{1}{p}\{f_1(k_1)-k_1f_1'(k_1)\}=f_2(k_2) \\ & -k_2f_2'(k_2) \end{aligned}$$

又は

$$(8)''' \quad \begin{aligned} & r=f_1'(k_1)=\frac{1}{p}f_2'(k_2) \\ & w=p\{f_1(k_1)-k_1f_1'(k_1)\}=f_2(k_2)-k_2f_2'(k_2) \end{aligned}$$

のように，財貨のニューメレールを変えれば(たとえばアレン〔1〕)要素価格フロンティアは原点に対し凸にでも凹にでもなりうる。このことを特に(8)‴のケースについて示そう。

(8)‴の4本の式を全微分すると，

$$
(35)\quad
\begin{cases}
\mathrm{dr}-f_1''\mathrm{dk}_1=0\\
\mathrm{p}^2\mathrm{dr}+\mathrm{prdp}-\mathrm{p}f_2''\mathrm{dk}_2=0\\
\mathrm{dw}+\mathrm{k}_2 f_2''\mathrm{dk}_2=0\\
\mathrm{pdw}-\mathrm{wdp}+\mathrm{p}^2\mathrm{k}_1 f_1''\mathrm{dk}_1=0
\end{cases}
$$

を得る。クラメールの公式によって，$\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dr}}$, $\frac{\mathrm{dk}_1}{\mathrm{dr}}$, $\frac{\mathrm{dk}_2}{\mathrm{dr}}$, $\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dr}}$を求めると

$$
\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dr}}=-\mathrm{p}^2\mathrm{k}_2 f_1/f_2<0
$$

$$
(36)\quad \frac{\mathrm{dk}_1}{\mathrm{dr}}=\frac{1}{f_1''}<0
$$

$$
\frac{\mathrm{dk}_2}{\mathrm{dr}}=\frac{\mathrm{p}^2 f_1}{f_2}\cdot\frac{1}{f_2''}<0
$$

および　$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dr}}=\frac{\mathrm{p}^2(\mathrm{k}_2-\mathrm{k}_1)}{-f_2}\lessgtr 0 \quad \text{as} \quad \mathrm{k}_2\gtrless\mathrm{k}_1$$

である。ここで，要素価格フロンティアは常に負の勾配をもつことがわかった。次に，$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{dr}^2}$を求める。

$$
(37)\quad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{dr}^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dr}}\right)=-\left\{2\mathrm{p}\frac{\mathrm{k}_2}{f_1}f_1\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dr}}+\mathrm{p}^2\frac{\mathrm{k}_2}{f_2}f_1'\frac{\mathrm{dk}_1}{\mathrm{dr}}+\mathrm{p}^2 f_1\frac{f_2-\mathrm{k}_2 f_2'}{f_2^2}\frac{\mathrm{dk}_2}{\mathrm{dr}}\right\}
$$

かくして$\mathrm{k}_2\geqq\mathrm{k}_1$のときには，{　}内は負，したがって$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{dr}^2}>0$。すなわち，第2財部門が第1財部門よりも資本集約的であるとき，要素価格フロンティアは原点に対し凸である。しかしこの資本集約度条件 $\mathrm{k}_2\geqq\mathrm{k}_1$は，フロンティアが原点に対し凸であることの十分条件に過ぎない。我々は以下，(37)式に(36)式を代入することによって$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{dr}^2}$がどのような符号をとりうるかを検討しよう。

式の変形に先立ち，要素間の代替の弾力性

$$
(38)\quad \sigma_i=\frac{f_i'(f_i-\mathrm{k}_i f_i')}{-\mathrm{k}_i f_i f_i''}=\frac{f_i'^2}{f_i f_i''}-\frac{f_i'}{\mathrm{k}_i f_i''}\quad (i=1.2)
$$

を導入する。

$$
(39)\quad \mathrm{Sgn}\left\{-\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{w}}{\mathrm{dr}^2}\right\}=\mathrm{Sgn}\left\{2\mathrm{p}\frac{\mathrm{k}_2}{f_2}f_1\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dr}}+\mathrm{p}^2\frac{\mathrm{k}_2}{f_2}f_1'\frac{\mathrm{dk}_1}{\mathrm{dr}}+\mathrm{p}^2 f_1\frac{f_2-\mathrm{k}_2 f_2'}{f_2^2}\frac{\mathrm{dk}_2}{\mathrm{dr}}\right\}
$$

$$=\mathrm{Sgn}\left\{2(\mathrm{k}_1-\mathrm{k}_2)+\frac{f_1'^2}{f_1f_1''}\frac{f_2}{f_2'}-\frac{f_1}{f_1'}\sigma_2\right\}$$
$$=\mathrm{Sgn}\left\{\frac{f_2}{f_2'}(\sigma_1-2)-\frac{f_1}{f_1'}(\sigma_2-2)+\frac{f_2f_1'}{\mathrm{k}_1f_1''f_2'}\right\}$$

最後の項が常に負なることに注意して，まず$\sigma_2 \geqq 2$ならば，σ_1のいかんにかかわらず，負[7]である。次に$\sigma_2<2$の場合を考える。しかしそこでは符号を確定することは容易ではない。ただ，いいうるのは$0\leqq\sigma_1=\sigma_2\leqq 2$，かつ$\mathrm{k}_2\geqq\mathrm{k}_1$のとき負（フロンティアは原点に対し凸）であることと，$\sigma_1\to+\infty$のとき，正なることである。以上要素価格フロンティアの形状について判明したことを図示すれば図9のようになる[8]。ここで，斜線部は，要素価格フロンティアが原点に対し凸，両軸と45度線は，資本集約度条件$\mathrm{k}_2\geqq\mathrm{k}_1$があれば，原点に対し凸となる。最後に，新古典派ケースの特殊ケースとも考えられる固定比率の生産関数について付言しておく。この場合は，ヒックス〔8〕，森島〔15〕アレン〔1〕，ブルーノ〔4〕らが示したように，要素価格フロンティアは，$\mathrm{k}_2 \gtreqless \mathrm{k}_1$に応じて，原点に対し凸，直線，凹となる。（上図）

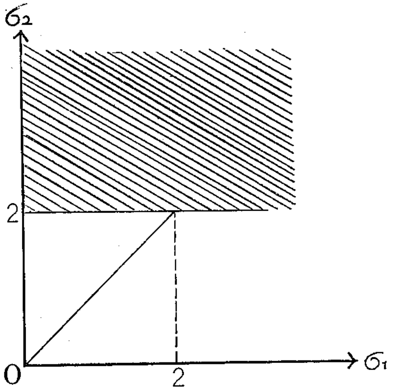


図9

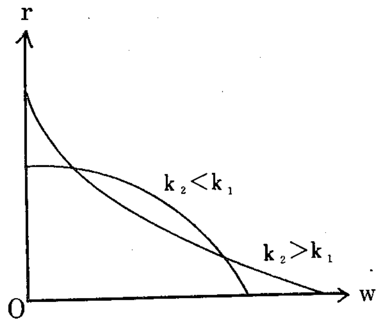


図10

7）　なぜなら，第1項と第3項から
$$\frac{f_2}{f_2'}\left(\sigma_1-2+\frac{f_2f_1'}{\mathrm{k}_1f_1''f_2'}\right)=\frac{f_2}{f_2'}\left(\frac{f_1'^2}{f_1f_1''}-2\right)<0$$
であるから。

8）　ブルーノ〔4〕P.42の脚注と異なることに注意せよ。

6. 生産可能性フロンティアと要素価格フロンティアの双対性

生産の技術的関係によってきまる生産可能性フロンティアと生産の費用的関係によってきまる要素価格フロンティアの間には，双対関係があることは以前から知られている。この節は両者が非線形計画法の双対性の問題として定式化されることを示そう。最初に，準備として，最近バリンスキーとボーモル〔3〕によって得られた非線形計画法の双対性についての結果を要約しておこう。

一般的な非線形計画問題は，次のように定式化される。

(A)　$\max \; f(x) \equiv f(x_1, x_2, \cdots\cdots . x_n)$

subject to

$$g_1(x) \equiv g_1(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \leqq c_1$$
$$g_2(x) \equiv g_2(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \leqq c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$g_m(x) \equiv g_m(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \leqq c_m$$
$$x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n \geqq 0$$

関数$f(x)$，$g_i(x)$は，各x_iに関し，連続な一階偏微係数をもつと仮定する。そのとき，次の計画問題を考える。

(B)　$\min \; \alpha(x, v) \equiv f(x) + \Sigma v_i(c_i - g_i(x)) - \Sigma x_j\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \Sigma v_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)$

subject to

$$v_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \cdots\cdots\cdots + v_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \geqq \frac{\partial f}{\partial x_1}$$
$$v_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \cdots\cdots\cdots + v_m \frac{\partial g_m}{\partial x_2} \geqq \frac{\partial f}{\partial x_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + v_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_n} + \cdots\cdots\cdots + v_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \geqq \frac{\partial f}{\partial x_n}$$
$$v_1, v_2, \cdots\cdots\cdots v_m \geqq 0$$

このとき，次のような仮定があれば，(A)と(B)は双対dualである。即ち，fが凹関数，g_iが凸関数そしてそれらにある正則条件が満たされているときである。そして，(A)と(B)の最適解の間には次のような性質がある。

(a)　二つの問題のうち１つが制約付最大化問題なら，他の１つは制約付最小化問題である。

（b） 実現可能解の上での最大化問題の目的値fは，最小化問題の目的値αよりも大きくなることは決してない。すなわち，$f \leqq \alpha$ である。

（c） 各問題のどちらかの実現可能解のペアが，両方の計画問題に対し最適解を与える必要十分条件は両目的値が相等しいことである。即ち，$f=\alpha$ となることである。

（d） 各問題のどちらかの実現可能解のペアが，両方の計画問題に対し最適解を与える必要十分条件はそれが，直交補完スラック条件（compleme - ntary slackness）を満たすことである。すなわち

$$v^{\circ}_i[c_i - g_i(x^{\circ})] = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{40}$$

$$x^{\circ}_j\left[\frac{\partial f^{\circ}}{\partial x_i} - \Sigma\, v^{\circ}_i \frac{\partial g^{\circ}_i}{\partial x_j}\right] = 0 \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

ここで，右肩の°は，最適解x°又はv°で評価されていることを示す。

（e） キューン・タッカーの Constraint Qualification が $\{x \mid g_i(x) \leqq c_i \quad i=1, \cdots, m\}$ に対し有効であるとき，もしx°が(A)の解であれば，(x°, v°)が(B)の解となるようなv°が存在する。逆に(x°, v°)が(B)を解き，α (x, v) のxに関する二階偏微係数の行列で，x°, v° で評価されたもの(Hessian)が非特異であるならば，x°は(A)の解である。

準備の最後に主問題とseperateした問題の同等性（後述）を保証する Slater の条件について触れておこう。Slater の条件とは，制約式が厳密な不等号（>）となるような解が存在することである。($g_i(x^{\circ}) > 0$（すべてのi）となる$x^{\circ} \geqq 0$が存在すること）

さて以上の数学的準備のもとで，我々の問題―生産可能性フロンティアと要素価格フロンティアは双対であるか―に，取組むことができる。問題解決の第1歩は，生産可能性フロンティアの定式化にある。即ち，第2財の技術的関係，資本と労働の稀少性の条件下で，第1財の最大達成可能な水準を求めることである。これは非線形計画問題であり，達成された目的関数値は，「最適変換フロンティア」と呼ばれる。次のステップは，上の問題の双対形を考えることである。双対形の目的関数の値は，ある条件の下で，「要素価格フロンティア」と呼ばれることを示せばよい。いいかえれば，$wL = pX_2$ の

とき，rK（双対目的関数の値）$=X_1$（目的関数の値）となれば，両問題は「数学的に」同一であり，両フロンティアの双対がいえたことになる。以下これを数学的に示そう。

問題〔A〕

$$\max \quad X_1=F_1(K_1,L_1)\equiv f(K_1,L_1,K_2,L_2)$$

subject to

$$-F_2(K_2,L_2)\leqq -X_2$$
$$K_1+K_2\leqq K$$
$$L_1+L_2\leqq L$$
$$K_i,L_i\geqq 0 \ (i=1,2)$$

問題〔A〕の双対形として問題〔B〕

$$\begin{aligned}\min \quad & \alpha(K_1,L_1,K_2,L_2,v_1,v_2,v_3)\\ &=F_1(K_1,L_1)+v_1(-X_2+F_2(K_2,L_2))\\ &\qquad +v_2(K-(K_1+K_2))\\ &\qquad +v_3(L-(L_1+L_2))\\ &\qquad -K_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial K_1}-v_2\right)-K_2\left(v_1\frac{\partial F_2}{\partial K_2}-v_2\right)\\ &\qquad -L_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial L_1}-v_3\right)-L_2\left(v_1\frac{\partial F_2}{\partial L_2}-v_3\right)\\ &=v_2K+v_3L-v_1X_2\end{aligned}$$

subject to

$$v_2\geqq\frac{\partial F_1}{\partial K_1}$$
$$v_3\geqq\frac{\partial F_1}{\partial L_1}$$
$$-v_1\frac{\partial F_2}{\partial K_2}+v_2\geqq 0$$
$$-v_1\frac{\partial F_2}{\partial L_2}+v_3\geqq 0$$

$v_i\geqq 0\ (i=1,2,3)$　が得られる。

問題〔A〕と問題〔B〕の間の関係をすぐ上で述べた性質から論じ，次に，ラグランジュ乗数の経済的解釈，問題〔B〕の経済的解釈を与えよう。

まず(a)は，明らかに満たされている。次に(b)より，実現可能解の上で

は，

$$X_1 \geqq v_2 K + v_3 L - v_1 X_2$$

移項して

(41)　$X_1 + v_1 X_2 \geqq v_2 K + v_3 L$

この経済的意味は後に述べる。

(c)より，最適解の下では

(42)　$X_1 + v_1 X_2 = v_2 K + v_3 L$

(d)より，最適解の与える必要十分条件は，

(43)
$$v_1(-X_2 + F_2(K_2, L_2)) = 0$$
$$v_2(K - (K_1 + K_2)) = 0$$
$$v_3(L - (L_1 + L_2)) = 0$$
$$K_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial K_1} - v_2\right) = 0$$
$$L_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial L_1} - v_3\right) = 0$$
$$K_2\left(v_1 \frac{\partial F_2}{\partial K_2} - v_2\right) = 0$$
$$L_2\left(v_1 \frac{\partial F_2}{\partial L_2} - v_3\right) = 0$$

(e)より，(K_1, L_1, K_2, L_2)が(A)の最適解であれば，(v_1, v_2, v_3)があって$(K_1, L_1, K_2, L_2, v_1, v_2, v_3)$は(B)を解く。しかし逆は成り立たない。なぜなら，ヘッセ行列が特異であるから。このことの経済的意味は重要であろう。

さて，双対変数の経済的意味は，今迄述べてきた行論で直観的に明らかである。双対変数はＬＰの場合と同じくシャドウプライス又は計算価値で，この場合，最適点での双対変数の値に意味があり，v_1° は第１財で表わした第２財の価格，v_2° は資本レンタル，v_3° は賃金率を表わす。(d)より明らかなように v_2°，v_3° は第１財で表わしていることに注意すべきである。従って，通常の記号で表わせば(43)から，最適点で

(44)
$$r = \frac{\partial F_1}{\partial K_1} = p\,\frac{\partial F_2}{\partial K_2}$$
$$w = \frac{\partial F_1}{\partial L_1} = p\,\frac{\partial F_2}{\partial L_2}$$

となり，(8)式との対応がつく。

v_i°(右肩の°印は最適解を表わすが，文脈上混乱がないときv_iと記す) にこのような価格の解釈が与えられると，上の問題の性質はさらに経済的意味を持つ。

まず，問題(B)の経済的解釈は次のように与えられる。すなわち，計算価値v_2，v_3 (それぞれw, r) が生産要素の限界生産物価値であるという制約の下で，総投入費用マイナス第二財の売上げ高を最小化している。

双対目的関数の経済的解釈はまたボーモル〔3〕とアナロガスに，問題〔B〕の第二の等式から次のように与えることができる。すなわち，最適値にあるとき第一項は一定値ゆえ全体としての最小化から無視されるので，全体は総投入物の限界生産物損失額の最小化とともに超過産出物価値，未利用投入物価値の最小化行動を表わしている。

要素価格フロンティアは最小化単位費用と生産物価格の均等をもたらす均衡要素価格の組合せとして求められる。しかし，問題〔B〕自体は即答に適していない。そこで，separable programming[9] を適用し，財貨を分離する。

第一財についての $\min\ (rK_1+wL_1)/X_1$ subject to $F_1(K_1, L_1)=X_1$ から，容易に

$$A^1(r, w)=1$$

なる要素価格フロンティアを対応させることができる。(キューン〔10〕参照)

あるいは，$wL=pX_2$ のとき，$rK=X_1$ となることから両問題は数学的に同一となり，生産可能性フロンティアと要素価格フロンティアの「双対」が示された。

計画問題〔A〕と〔B〕の通常の「双対」に意味を与えることが残っている。(b)は，実現可能解の下では，(45)式の左辺の生産物価値は生産要素価値を超すことができないことを意味する。また(c)は最適解のもとでは，生産物価値は，生産要素価値に相等しいことを意味する。これは，規模に関する収穫不変 (一次同次) モデルでのオイラーの定理又はワルラス恒等式そのものに他ならない。(d)の第2，第3式は，注2と直接に関連がある。即ち，生産

9) このseparable programmingについては，例えば Moeseke & de Ghellinck〔13〕によって保証される。

要素が稀少であると要素に関する制約式はふつうは不等式制約であるが，最適解 v_2，$v_3>0$ のもとでは，生産要素は完全利用される。(e)は，生産可能性フロンティアの最適点は，要素価格フロンティアの最適点となるが，逆は必らずしも成立しないことを述べている。すなわち，要素価格フロンティア上の最適点は，その生産可能性フロンティアの最適点ではないかもしれない。このことから，後にみるように，要素価格フロンティアが生産可能性フロンティアの包絡線である。

以上を図形的に説明しよう。

図5を再びみると，それは縦軸に第1財の産出量，横軸に第2財の産出量を測り，資本労働比率k＝K/Lに対応する生産可能性フロンティア（PPF）がRPFと描かれ，点Pで生産が行われることを示している。PPFの勾配は－pであるから，両部門の資本集約度が相異なるとき，総労働力L，資本ストックKおよび価格比（勾配の絶対値）が与えられれば X_1 と X_2 を一意に決定する。したがって，

(45)　$X=X_1+pX_2$

が一意に成立する。

他方，図8によって要素価格フロンティアが与えられたが，これは絶対量の関係ではない。そこで，図5に対応したK/LのあるKとLによって座標軸をrK，wLと変換する。ここでできたフロンティアを図5に重ね合わせると図11を得る。

与えられた資本ストックKと労働Lに対して，PPFはFPFに一般的には一点Qで交わる。この点は二部門モデルにおける黄金律（GR）点を与える。すなわち，その点では

(46)　$S=X_1=rK$

が成立している。これは貯蓄額Sがちょうど利潤額に等しい点を表わす。この点は又，通常の如く成長率(g)＝利潤率(r)，貯蓄性向(s)＝利潤の相対的分け前を与える点であると読みかえることもできる。このことや，二部門モデルでGR点が一意に存在することは，福岡・川又〔7〕，バーマイスタ〔5a〕，

リビアタン・レブハリ〔12〕が解析的に証明した通りである。

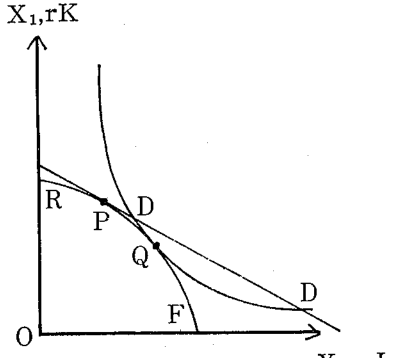


図11

以上，我々は，新古典派モデルの下で生産可能性フロンティアと要素価格フロンティアの双対関係を計画論的にみてきた。しかし，数量体系と価格体系の双対形は，ヒックス〔8〕，森島〔14〕のように定義関係式から明らかにすることもできる。以下，ヒックス，森島ラインに沿って新古典派モデルの下での双対性を略述しよう。$a_{11}=K_1/X_1$，$a_{12}=L_1/X_1$，$a_{21}=K_2/X_2$，$a_{22}=L_2/X_2$とおくと，均衡においては，次の価格方程式が成り立っている。

$$(47)\qquad \begin{cases} 1=a_{11}r+a_{12}w \\ p=a_{21}r+a_{22}w \end{cases}$$

但し，a_{ij} は，$k_i=K_i/L_i$ に依存してきまることに注意しよう。これより，相対価格方程式

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{w}=\dfrac{a_{12}}{1-a_{11}r} \\ \dfrac{p}{w}=a_{22}+\dfrac{a_{12}\cdot a_{21}r}{1-a_{11}r} \end{cases}$$

を得る。後者が，通常の要素価格フロンティアである。

他方，一次同次の仮定の下では，数量方程式：

$$(49)\qquad \begin{cases} K=a_{11}X_1+a_{21}X_2 \\ L=a_{12}X_1+a_{22}X_2 \end{cases}$$

が成り立つ。また，定義によって

$$X_1 = gK$$

(gは成長率)である。

これより，相対数量方程式：

$$(50)\quad \begin{cases} \dfrac{K}{X_2} = \dfrac{a_{21}}{1 - ga_{11}} \\ \dfrac{L}{X_2} = a_{22} + \dfrac{a_{12} \cdot a_{21}}{1 - ga_{11}} \\ \dfrac{X_1}{X_2} = \dfrac{ga_{21}}{1 - ga_{11}} \end{cases}$$

を得る。最適変換フロンティアと要素価格，フロンティアが数学的に同一（双対）であることは，≧$pX_2 = wL \Longrightarrow rK = X_1$≦を調べればよい。相対価格方程式と相対数量方程式から，$g = r$。したがって，$rK = X_1$が成立するので，双対性を定義関係式からも証明したことになる。

7.　最適変換フロンティア

ＰＰＦは，総資本量Ｋと総労働量Ｌの比率を不変としてきたが，いまＫとＬをパラメータとして動かすと，両部門の集約度も又自在に変化する。従って，ＰＰＦは例えば下図のように変化する。これらの曲線の包絡線を求めるとこれは原点に対して凸な包絡変換フロンティアが得られる。この包絡フロンティアは，ヒックス〔8〕によって有名にされたが，もとはカール・フォン・ヴァイツヴェッカー〔24.p.442〕の発見であり最適変換フロンティアと呼んだ。

この最適変換フロンティアはＰＰＦとＦＰＦの接点の軌跡であるところのＧＲの点の軌跡でもある。従って，最適変換フロンティアは，ＦＰＦに「数学的に」同一である。この特質は最近ＧＲの新しい一般化として注目されてきた。（例えば，〔4〕，〔5〕，〔19の第XI章〕参照）

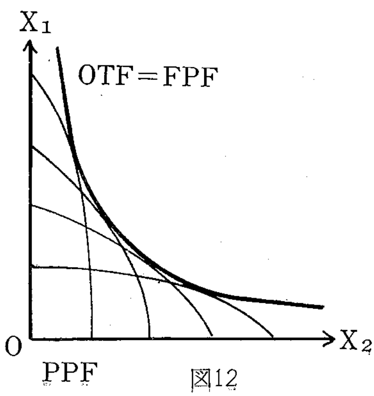


図12

最適変換フロンティアは，数学的に次のようにして求められる。変換フロンティアを

$$(51)\quad T(X_1, X_2, k) = 0$$

とする。Tが各変数に関し連続微分可能でかつ(51)が特異点を持たないとき，即ち

$$\left(\frac{\partial T}{\partial X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial X_2}\right)^2>0$$

であるとき，$T(X_1, X_2, k)=0$ の包絡線の方程式は，

$$\begin{cases} T(X_1, X_2, k)=0 \\ \dfrac{\partial T(X_1, X_2, k)}{\partial k}=0 \end{cases}$$

からkを消去したものである。

8. CES生産経済における論証

二部門がCES生産関数に従っている，いわゆるCES生産経済において，今まで述べてきた重要な点を確かめよう。

二部門の技術的関係はCES型

$$\text{(52)}\quad \begin{aligned} X_1 &= \left[\delta K_1^{-\rho}+(1-\delta)L_1^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \\ X_2 &= \left[\delta' K_2^{-\rho'}+(1-\delta')L_2^{-\rho'}\right]^{-\frac{1}{\rho'}} \end{aligned}$$

に従っているとする。ここで δ, δ' は分配パラメータ，$\rho=\frac{1}{\sigma}-1$，$\rho'=\frac{1}{\sigma'}-1$ は代替パラメータ，効率パラメータは1に規準化してある。(52)が一次同次で凹関数であることは周知の事実である。競争的条件の下では

$$\text{(53)}\quad \begin{aligned} r &= \frac{\partial X_1}{\partial K_1}=p\frac{\partial X_2}{\partial K_2} \\ w &= \frac{\partial X_1}{\partial L_1}=p\frac{\partial X_2}{\partial L_2} \end{aligned}$$

が成立つので，CES関数にあてはめると

$$\text{(54)}\quad r=\left[\delta K_1^{-\rho}+(1-\delta)L_1^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\bullet\delta K_1^{-(\rho+1)}$$

$$=p\left[\delta' K_2^{-\rho}+(1-\delta')L_2^{-\rho'}\right]^{-\frac{1}{\rho'}-1}\bullet\delta' K_2^{-(\rho'+1)}\ ]\delta' K_2^{-(\rho'+1)}$$

$$w=-\frac{1}{\rho}\left[\delta K_1^{-\rho}+(1-\delta)L_1^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}(1-\delta)(-\rho)L_1^{-(\rho+1)}$$

$$=-\frac{p}{\rho'}\left[\delta' K_2^{-\rho'}+(1-\delta')L_2^{-\rho'}\right]^{-\frac{1}{\rho'}-1}(1-\delta')(-\rho')L_2^{-(\rho'+1)}$$

が成立つ。したがって

$$(55)\qquad \frac{r}{w}=\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{K_1}{L_1}\right)^{-(\rho+1)}=\frac{\delta'}{1-\delta'}\left(\frac{K_2}{L_2}\right)^{-(\rho'+1)}$$

これより

$$(56)\qquad K_1=L_1\left(\frac{w}{r}\right)^{\sigma}\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma}$$

$$K_2=L_2\left(\frac{w}{r}\right)^{\sigma'}\left(\frac{\delta'}{1-\delta'}\right)^{\sigma'}$$

を得る。これを生産関数 (52) に代入すれば，要素需要関数

$$L_1=\left[\delta\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{-\rho\sigma}x^{-\rho}+(1-\delta)\right]^{\frac{1}{\rho}}X_1\equiv a_{11}X_1$$

$$K_1=\left[\delta+(1-\delta)\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma\rho}x^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}X_1\equiv a_{12}X_1$$

$$(57)\qquad L_2=\left[\delta'\left(\frac{\delta'}{1-\delta'}\right)^{-\rho'\sigma'}x^{-\rho'}+(1-\delta')\right]^{\frac{1}{\rho'}}X_2\equiv a_{21}X_2$$

$$K_2=\left[\delta'+(1-\delta')\left(\frac{\delta'}{1-\delta'}\right)^{\sigma'\rho'}x^{\rho'}\right]^{\frac{1}{\rho'}}X_2\equiv a_{22}X_2$$

を得る。但し，$x=\frac{w}{r}$である。

要素需要関数は，要素価格に関し，ゼロ次同次である。

次に，要素需要関数に対する最小単位生産費関数を求めよう。これは，各要素についての要素価格と投入係数の積和として求められる。

$$(58)\qquad C_1(w,r)=w\frac{L_1}{X_1}+r\frac{K_1}{X_1}$$

$$C_2(w,r)=w\frac{L_2}{X_2}+r\frac{K_2}{X_2}$$

すなわち，(57) より

$$(59)\qquad C_1(w,r)=w\ a_{11}+r\ a_{12}\equiv g_1(w,r)$$

$$C_2(w,r)=w\ a_{21}+r\ a_{22}\equiv g_2(w,r)。$$

最小単位生産費関数(57)が一次同次でしかも凹であることは，容易にわかる。

さて，二財とも生産されているときには，最小単位生産費用C_iは生産物価格p_iに等しいので，

$$(60)\qquad 1 \equiv p_1 = g_1(w,r)$$
$$p_2 = g_2(w,r)$$

なる写像を定義することができる。このときわれわれは要素価格均等化定理を調べることができる。要素価格均等化定理は数学的にいうと，財貨と要素価格を関連づける二つの費用関数が一意な逆(inverse)をもつかどうかであり，ヤコビアン行列 $\left[\frac{\partial g_i}{\partial w_j}\right]$ の性質を調べればよい[10]。一次同次生産関数の下では，ヤコビアン行列の各要素は投入行数 a_{ij} に等しいので，ヤコビアン行列は，

$$(61)\qquad Jg(w,r) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

となる。ここで，a_{ij}は(57)で定義したものである。

この場合，ゲール・二階堂の定理によれば，$Jg(w,r)$の主坐小行列式が二次元区間のすべてのwとrに対して正であることが，globalな univalence を保証する，従って均等化定理が成立する十分条件である。ところが$Jg(w,r)$の行列式がランク1に下がるケース（例えば $\sigma=\sigma'$, $\delta=\delta'$ のように両部門が同一の生産関数に従うとき)では，逆は存在しないことになる。これは論理的に矛盾し，ゲール・二階堂の定理は若干の修正を必要とすることになる[11]。

最後に，二部門モデルが上のようにそれぞれ異なるパラメータをもつCES関数に従っているときの，要素価格フロンティアを求めよう。

求めやすくするために１人当り量で議論しよう。

---

10) これは，univalence problem と呼ばれ，国際貿易論のトピックスである。例えば，*International Economic Review* 1967 Oct を見よ。なお，ブラウアの不動点定理による均衡要素価格の存在証明は，キューン〔10〕，チップマン〔６〕がある。

11) 私は，これが渡部経彦氏が〔25〕で次のように述べている点の一つの論証になっていると考える。すなわち，「国際貿易理論での要素価格と財価格の対応についてのゲール・二階堂の定理は，少なくともCES生産関数の妥当する場合には若干の修正を必要とすることになる。」（P.149)

(62)　$$y_1=[(1-\delta)+\delta k_1{}^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$y_2=[(1-\delta')+\delta' k_2{}^{-\rho'}]^{-\frac{1}{\rho'}}$$

これから，(8)式を利用して

(63)　$$w=(1-\delta)[(1-\delta)+\delta k_1{}^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}-1}$$

$$=p(1-\delta')[(1-\delta')+\delta' k_2{}^{-\rho'}]^{-\frac{1}{\rho'}-1}$$

(64)　$$r=\delta k_1{}^{-\rho-1}[(1-\delta)+\delta k_1{}^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}-1}$$

$$=p\delta' k_2{}^{-\rho'-1}[(1-\delta')+\delta' k_2{}^{-\rho'}]^{-\frac{1}{\rho'}-1}$$

を得る。定常状態成長経路 $g=sr=n$ の下では，要素価格フロンティアは，(63)式と(64)式より，

(65)　$$r=w\left(\frac{\left(\frac{w}{1-\delta}\right)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}-1+\delta}{\delta}\right)^{-\frac{\rho}{\rho+1}}$$

を得る。ここで，$\frac{dr}{dw}<0$，$\frac{d^2r}{dw^2}>0$ が導かれる。かくして，二部門がCES生産関数に従っている経済での要素価格フロンティアは原点に対して凸である。

付録　一定の弾力性をもつ要素価格フロンティア(CEF)

ACMS〔2〕のCES，Powell と Gruen〔15〕のCETと同様にわれわれはCEF（一定の弾力性をもつ要素価格フロンティア）を導くことができる。

均衡の生産要素価格は r と wであり，r と wのトレードオフによって作られる要素価格フロンティアは

(1)　$r=\phi(w)$（又は，$w=\Psi(r)$）

と書くことができる。我々のモデルでは，

(2)　$\phi>0$，$\phi'<0$，$\phi''>0$，$0<r,\ w<+\infty$

である。

ＦＰＦ(１)の基本的な「形状」は

(３)　$$\eta_{rw}=\frac{d\left(\frac{r}{w}\right)}{d\left(\frac{\partial r}{\partial w}\right)}\frac{\frac{\partial r}{\partial w}}{\frac{r}{w}}$$

なるｒとｗのトレードオフの弾力性によって測ることができる。弾力性の基本的知識により $\eta_{rw}=\eta_{wr}$ であるので，単に η と記す。

このとき，η は正である。なぜなら，$r=\phi(w)>0$，$\frac{\partial r}{\partial w}=\phi'<0$，$d\phi'=\phi'' dw>0$ に注意して(３)を書き換えてみればわかる。さて，(３)より，

(４)　$$\frac{d\phi'}{\phi'}=\frac{1}{\eta}\frac{d\left(\frac{\phi}{w}\right)}{\left(\frac{\phi}{w}\right)}$$

と変形できる。両辺を積分すれば，

(５)　$$\log|\phi'|=j\log\left(\frac{\phi}{w}\right)+j\log c$$

を得る。ここで，$j=1/\eta$ である。また，ｃは積分定数である。これより

(６)　$$|\phi'|=\left(\frac{c\phi}{w}\right)^j$$

$\phi'<0$ であるから，

(７)　$$\phi'=\frac{d\phi}{dw}=-C\left(\frac{\phi}{w}\right)^j;\ C=c^j>0$$

変形して積分子を施すと，

(８)　$$\int\frac{d\phi}{\phi^j}=-C\int\frac{1}{w^j}dw$$

$j\neq1$ とすると，

(９)　$$\frac{\phi^{1-j}}{1-j}=-C\frac{w^{1-j}}{1-j}+D$$

ここで，Ｄは定数である。従って解は，

(10)　$$r^{1-j}+Cw^{1-j}=D(1-j)$$

である。得られたＣＥＦ(10)を陰関数微分すると，

(11)　$$\frac{\partial r}{\partial w}=-\left(c\frac{r}{w}\right)^j<0$$

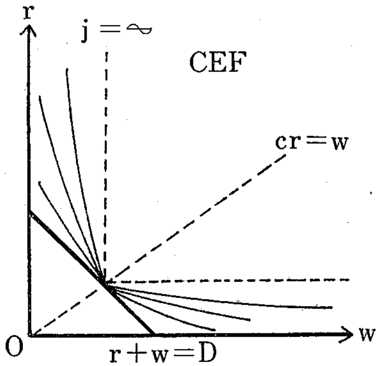


図13

$$\frac{\partial^2 r}{\partial w^2}=Cj\left(\frac{r}{w^2}\right)\left(\frac{r}{w}\right)^{j-1}>0$$

である。$j>0$ であるからベキ乗の $1-j$ は $j\to+0$，$0<j<1$，$j\to+1$，$j>1$，$j\to+\infty$ によって，異なった形状が得られる。

（i）　$j\to+0$ 即ち，$\eta\to\infty$ のとき，$r+w=D$ に近づき，直線を得る。

（ii）　$0<j<1$　（$1<\eta<+\infty$）のとき，両軸と交わる。その交点は，

$\left((D(1-j))^{\frac{1}{1-j}},\ 0\right)$，$\left(0,\ \left(\frac{D}{C}(1-j)\right)^{\frac{1}{1-j}}\right)$ である。

（iii）　$j\to+1$　（$\eta\to1$）のとき(3)に戻って積分を二回行なうと，

(12)　$r=\left(\frac{d}{w}\right)^c$　；　d は定数

を得る。$c=1$ のとき，直角双曲線になる。$r\to0$ のとき，$w\to0$，$w\to\infty$ のとき，$r\to0$ となる両軸に無限遠点で接するＦＰＦが得られる。

（iv）　$j>1$　（$1>\eta$）のときは，ある漸近線に近づく。

（v）　$j\to\infty$　（$\eta\to0$）のときは，固定比率のＦＰＦになる。（図13参照）

次に j が変化するにつれて，$\frac{\partial r}{\partial w}$ は，どのように変化するか調べよう。j で微分して，

(13)　$\frac{d}{dj}\left(\frac{\partial r}{\partial w}\right)=-\left(c\frac{r}{w}\right)^j\log\left(\frac{cr}{w}\right)\gtreqless 0$ as $cr\gtreqless w$

を得る。この意味を図形的，経済的に解釈しよう。図形は右図のようであり η(j)の増加（減少）につれて，矢印のようなシフトがおこる。

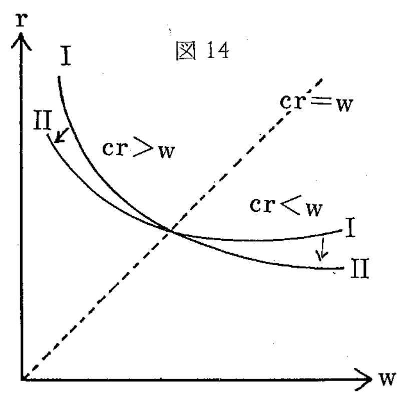


図 14

図と(13)式により次のことがわかる。

r と w のトレードオフの弾力性が増加するにつれてＦＰＦの勾配は $cr<w$ の領域で増大し，$cr>w$ の領域で減少し $cr=w$ の直線上では不変にとどまる。従って，弾力性の増大によってＦＰＦはⅠからⅡへ原点側にシフトする。さらに，経済的意味をもたせれば，

ある生産要素価格を他の生産要素価格に代替させることの容易さをもっと強めれば，固定した要素供給の下では，cr = wを除いた全てのケースにおいて費用最小化の要素価格の組み合わせに導くことになる。

引　用　文　献

〔1〕 Allen, R.G.D. *Macro-Economic Theory—A Mathematical Treatment*, Chap.11. Macmillan 1967（新開，渡部訳）

〔2〕 Arrow, K.J, Chenery, H.B, Minhas, B.S& Solow, R.M. "Capital Labour Substitution and Economic Efficiency," RE&S.Aug 1961

〔3〕 Balinski, M.L & Baumol, W.J. "The Dual in Nonlinear Programming and its Economic Interpretation," RES 1968 pp.237—256

〔4〕 Bruno, M. "Fundamental Duality Relations in the Pure Theory of Capital and Growth," RES Jan, 1969. pp.39—54

〔5〕 Burmeister, E. & Kuga, K "Duality of the Optimal Transformation Frontier and the Factor-Price Frontier,"

〔5a〕 Burmeister, E. "The Existence of Golden Ages and Stability in the Two Sector Model", QJE, Feb. 1967

〔6〕 Chipman, J.S. "A Survey of the Theory of International Trade, part II Em. vol 33. no 4 (Oct 1965)

〔7〕 Fukuoka, M. & K. Kawamata 'The Neo-Classical Theorem and the Two-Sector Model of Economic Growth," 季刊理論経済学 Nov. 1965

〔8〕 Hicks, J. R. *Capital and Growth*. Chap. 13 Oxford Univ. Press 1965

〔9〕 Kemp, M.C. *The Pure Theory of International Trade*. Prentice Hall 1964

〔10〕 Kuhn. H. W. Mathematical Appendix (of Land. A.H." Factor Endowments and Factor Prices") *Economica* 1959. May

〔11〕 Lancaster, K. *Mathematical Economics*. Macmillan 1968.

〔12〕 Liviatan & Levhari, "The Golden Rule in the Case of More than one Consumption Good." AER. March 1968. vol LVIII. No. 1

〔13〕 Moeseke P. V. & Guy de Ghellinck. "Decentralization in Separable Programming," Em, vol 37. no 1 (Jan 1969)

〔14〕 Morishima, M. "The Multi-Sectoral Theory of Economic Growth," in *Mathematical Optimization in Economics* (ed) de Finetti (C. I. M. E.) 1966.

〔15〕 Powell & Gruen, "The Constant Elasticity of Tansformation Production Frontiers and Linear supply systems" I. E. R. vol 9. no. 3. (Oct 1968) pp.315—328

〔16〕 Rybczynski, T. M. "Factor Endowment and Relative Commodity Prices," *Economica* vol.22. no.88. (1955 Nov)

〔17〕 Samuelson, "Summary on Factor-price Equalization," I. E. R. vol 8. No. 3 (Oct 1967)

〔18〕 Samuelson, P. A. *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson* vol I. II (ed) Stiglitz (M. I. T. Press) 1967.

〔19〕 Shell, K. (ed) *Essays on the Optimal Economic Growth*. MIT Press. 1967.

〔20〕 Shephard, R. W "The Producer's Cost Function," Em, 1950 PP.177-178.

〔21〕 戸島熙「2部門 model の Production-Possibility Frontier について」商学討究 第19巻第2号1968年9月

〔22〕 Uzawa. H. "On a Two-Sector Model of Economic Growth I. II", R.E.S (Oct 1961 and June 1963)

〔23〕 Uzawa. H, "Duality Principles in the Theory of Cost and Production," IER 1964. pp.216—220

〔24〕 von Weizsäcker, C. C. "Bemerkungen zu einem ≪Symposium≫ über Wachstumstheorie und Productionsfunktionen", *Kyklos* 1963. no. 3 pp. 438—457

〔25〕 渡部経彦「計量経済学の発展とケインズ経済学」館龍一郎編『ケインズと現代経済学』東京大学出版会 1968.

〔洋雑誌の略記号〕

AER= *The American Economic Review*

Em= *Econometrica*

IER= *International Economic Review*

QJE= *Quarterly Journal of Economics*

RES= *The Review of Economic Studies*

RE&S= *The Review of Economics and Statistics*