ネットワーク上の荷積問題

遠藤　薫

目　次

輸送ネットワーク上に宛名のついた荷物が与えられたとき，所与のトラック台数で最大限の荷物を処理するにはどのようにしたらよいかという問題——これを荷積問題と呼ぶことにする——を考える(第1節)。これは0—1変数を含む整数線形計画問題となるが(第2節)，ネットワーク上の最小費用流れ問題として解くことができることを知る(第3節)。それを解く方法はいろいろ提案されているが，バサッカーとサーティ[2)]が述べている方法を基礎にして簡単に解くことができる(第4節)。このアルゴリズムを用いて例題を解き(第5節)，最後に荷積問題が全体の中でどのような位置を占めるかを考える(第6節)。

1. 問　題

地点A，B，Cがあって，各地点相互間で運ぶべき荷物の量が，たとえば3日間について与えられているとき図1のような輸送ネットワークを書くことができる。各ルート(たとえば$A_0 \rightarrow B_1$)には運ぶべき荷物の量が与えられる。ただしルート$A_0 \rightarrow A_1$のような場合は当然運ぶべき荷物の量は0である。第1日目に点A_0，B_0，C_0にそれぞれ何台かのトラックがあるとき，各

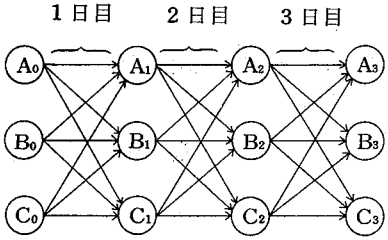

図1　3日間の輸送計画をたてようとするときのネットワーク

ルート上の荷物をできるだけたくさん運ぶようにするにはそれぞれのトラックをどのような経路(たとえば$A_0 \to C_1 \to B_2 \to C_3$)で走らせたらよいだろうか。ただし，ここで$A_0 \to A_1$というルートをトラックが通るということはそのトラックが第1日目には使用されずに地点Aにとどまっているということを意味する。

大きいトラックから順に満載で運行する計画をまず立てる（これは最大流れ問題（フォードとファルカーソン[7]）を考えるとよい。）そうするとそのあとに，各ルートには残りの荷物，点A_0，B_0，C_0には残りのトラックが存在することになる。ここでもってこのトラック台数で残りの荷物をできるだけたくさん運ぶにはどうしたらよいか——荷積問題——を考える。積みきれない荷物は他の輸送会社に依頼することになるであろう。ネットワーク理論によって解くことを考えるが，そのため，図1のネットワークの左に点sと枝(s,A_0)，(s,B_0)，(s,C_0)を加え，右に点tと枝(A_3,t)，(B_3,t)，(C_3,t)を加える。それは図2に示される。これでただ一つの始点sとただ一つの終点tをもつネットワークが得られたことになる。さらに始点sから出る枝(たとえば枝(s,A_0))に対しては容量として点A_0に残っているトラックの台数を与える。その結果始点sから点A_0へはその台数までのトラックしか行くことができず，点A_0に何台かのトラックが残っているという条件と一致することになる。なお始点sから次の点へ運ぶべき荷物の量と，終点tの前の点から終点tへ運ぶべき荷物の量はそれらのどの枝についても0で与えられることになる。

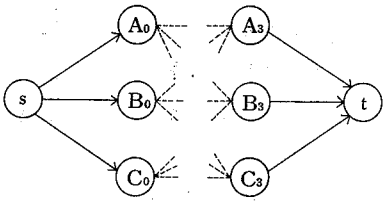

図2　始点sと終点tおよび新しい枝を加えたネットワーク

枝につけられた容量についてはあとで考えることにし（第4節で解決され

る），まず枝には荷物の量だけが与えられたネットワークを考えることにする。図３はその最も簡単な例であり，点１から点２へは枝（１，２）を通って５単位の荷物を届けねばならぬことを示している。他の枝についても同様である。

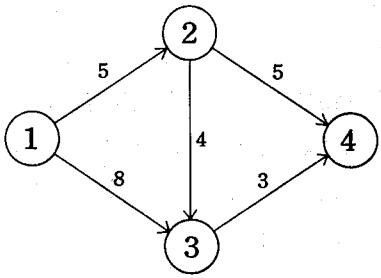

図３　最も簡単な例

なお２点間にはたかだか１本の有向枝しかないようなネットワークを考える。これはアルゴリズムが複雑にならないようにするためである。逆向きの枝があるような場合は図４のようにネットワークを作り変えるとよい。図３において始点１に２台のトラックがあるとき，始点１から終点４にどのようにトラックを走らせると最もたくさんの荷物を処理できるかというのがこれから考えていく問題である。ここでトラックの大きさは同じであり，１台の積載可能量は無限大であるとする。実際にはそうでないわけであるから，たとえば積載可能量が10ｔであるときに枝（１，２）に28ｔの荷物がある場合は図５のように，点と枝を新しく加えて，１本の枝には10ｔ以下の荷物しかないようにしておく。

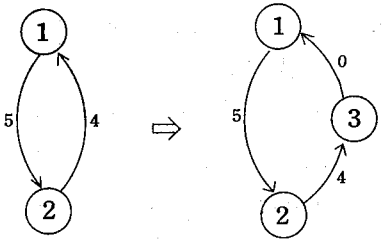

図４　ネットワークの作り変え(1)，逆向きの枝がある場合

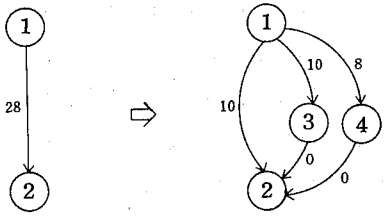

図５　ネットワークの作り変え(2)，枝の荷物の量(28ｔ)が１台のトラックの積載可能量(たとえば10ｔ)を越える場合

図３において始点１に１台しかトラックがないときは，①→②→③→④という経路で走らせると，５＋４＋３＝12単位の荷物を処理でき，これが最高である。２台のトラックがある場合は，１台は①→②→④という経路で走らせて10単位処理し，他の１台は①→③→④という経路で走らせて11単位処理

することができ合計21単位処理することができる。この場合もこれで最高である。3台ある場合は，さらに①→②→③→④と走らせて4単位処理でき，合計25単位，つまり全部の荷物を処理することができる。3台目のトラックの処理量からわかるように，一つの枝をどんなにたくさんのトラックが走っても運ばれる量は一定であることがこの問題の特徴である。この問題は次のように定式化される。

2. 定 式 化

枝(i, j)を通って運ばねばならぬ荷物の量が前述の条件を満たすようにa_{ij}で与えられ，始点sにあるトラックの台数がv(整数)で与えられるとする。また枝(i, j)を通るトラックの台数をx_{ij}で表わし，枝(i, j)をトラックが通ったときは$y_{ij}=1$通らないときは$y_{ij}=0$とする。そうすると次のような問題を解くとよいことになる。

$$\text{maximize} \sum_{(i,j)\in A} a_{ij} y_{ij} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j\in A(i)} x_{ij} - \sum_{j\in B(i)} x_{ji} = \begin{cases} v, & i = s \\ 0, & i \neq s, t \\ -v, & i = t \end{cases} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$y_{ij}=1, \quad \text{if } x_{ij}>0, \quad (i, j)\in A \quad \cdots\cdots(3)$$

$$y_{ij}=0, \quad \text{if } x_{ij}=0, \quad (i, j)\in A \quad \cdots\cdots(4)$$

$$x_{ij}\geqq 0\text{;整数}, \quad (i, j)\in A \quad \cdots\cdots(5)$$

ただしAはネットワークを構成するすべての枝の集合を表わし，A(i)は点iの次(After)の点の集合，B(i)は点iの前(Before)の点の集合を表わす。またsとtはすでに用いたように始点と終点を表わす。これらの記号はフォードとファルカーソン[7]による。

ネットワークに関する問題であるからx_{ij}は整数になることを予想できるが，まず上記のように定式化できる。さて(5)式の整数条件から(3)式は，

$$y_{ij}=1, \quad \text{if } x_{ij}\geqq 1, \quad (i, j)\in A$$

としてよい。さらにこの式と(4)式から

$x_{ij} \geqq y_{ij}$, $(i, j) \in A$ ……(3′)

となり，加えて

$y_{ij} \leqq 1$, $(i, j) \in A$ ……(4′)

でなければならない。そうすると全体として次のように新しく定式化される。

$$\text{maximize} \sum_{(i,j)\in A} a_{ij} y_{ij} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j\in A(i)} x_{ij} - \sum_{j\in B(i)} x_{ji} = \begin{cases} v, & i = s \\ 0, & i \neq s, t \\ -v, & i = t \end{cases} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$-x_{ij} + y_{ij} \leqq 0, \quad (i, j) \in A \quad \cdots\cdots(3')$$

$$y_{ij} \leqq 1, \quad (i, j) \in A \quad \cdots\cdots(4')$$

$$x_{ij},\ y_{ij} \geqq 0\ ;\text{整数}, \qquad (i, j) \in A \quad \cdots\cdots(5')$$

ここで(3)，(4)式は図6で示され，(3′)，(4′)式は図7で示される。このように変えてもよいのはひとえに，0—1変数 y_{ij} について $\Sigma a_{ij} y_{ij}$ を最大化することを目的としているからである。ただしすべての枝(i, j)について$a_{ij} \geqq 0$である。そのため図7のような実行可能領域を用いることにしても，$x_{ij} \geqq 1$ のときは必ずy_{ij}が0でなくて1になることが保証される。同じように0—1変数を考えることになる問題であっても，工場配置問題（たとえばエフロイムソンとレイ[6]）のような場合は費用最小化問題であるため上記のような変更を行なうことができない。その意味でここで考えている問題はきわめて解き

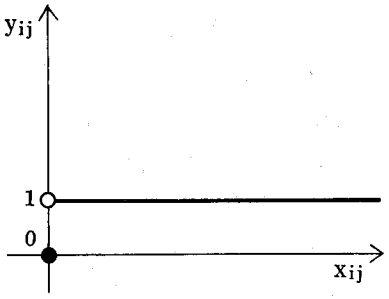

図6　(3)，(4)式が意味する実行可能領域（黒点と太線の部分）

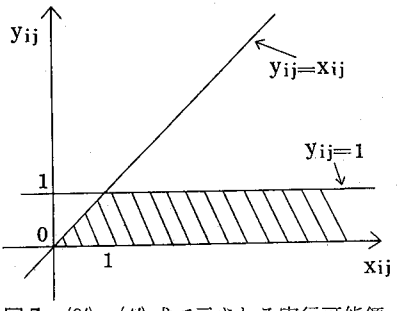

図7　(3′)，(4′)式で示される実行可能領域（斜線の部分）

やすい性質をもっていると言うことができる。

3. 解　　法

(1), (2), (3′), (4′), (5′)式で表わされる問題は整数線形計画問題であるが整数条件を無視してシンプレックス法で解くことにより最適整数解を得ることができる。これは係数行列が特殊な性質をもっているからであると考えられるが，次のようにして確かめることができる。たとえば①→②→③→④の経路で0.8台のトラックを走らせ，0.8×(5＋4＋3)＝9.6単位の荷物を処理し，①→③→④の経路で0.2台のトラックを走らせ0.2×(8＋3)＝2.2単位の荷物を処理すると合計9.6＋2.2＝11.8単位の荷物を処理できる。しかし①→②→③→④の経路で1台のトラックを走らせることにより12単位処理できるのであるから，後者の方が有利である。また①→②→③→④の経路で1.5台のトラックを走らせ，①→③→④の経路で0.5台のトラックを走らせるよりは最初の経路で1台，あとの経路で1台走らせたほうが有利である。あらゆる場合について以上の二つの場合に還元できるので，荷物処理量に関しての最大値は必ず整数台数のトラックが各ルートを通ることによって達成されることがわかる。なお，この説明では始点から終点への最長路が一つしかないことを仮定していたことになる。二つ以上ある場合は小数解でも最適解になりうるが，そのときでも必ず同じ最大値をもつ整数解にすることができることは明らかである。

次にシンプレックス・タブローを用いて最適解を求めるのではなく，ネットワークを見ながら最適解を求める方法を考えたい。最初の定式化では図3のようなネットワークにおいて，一つの枝(i，j)に対して二つの変数x_{ij}とy_{ij}を考えていることになりめんどうである。そこで新しい定式化に対応したネットワークを考えてみることにす

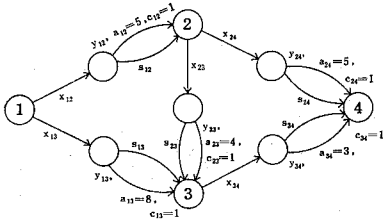

図8　あとの定式化に対応するネットワーク

る。特に(3′)式を考慮するとおおよそ図８のようなネットワークを図３と同じ問題について書くことができる。ここでs_{ij}は(3′)式につけ加えるスラック変数を意味し，c_{ij}は(4′)式の右辺の１を一般的に表わしたものであり，流れy_{ij}のある枝の容量を意味することになる。また流れx_{ij}はy_{ij}とs_{ij}の二つの流れに分かれて進み再び一緒になる。そのときまずa_{ij}という利得のある枝に最初の１単位が流れて$y_{ij}=1$となり，その枝にはいりきらない分はオーバー・フローして隣の枝に流れ，s_{ij}となる。さて$-a_{ij}$を費用と考えれば図８のネットワークはまさしく最小費用流れ問題そのものである。この最小費用流れ問題に対してはいろいろな解法が考えられているので図８のようなネットワークに対してそれらを適用することにより，シンプレックス・タブローを用いるよりはより効率的に最適解を得ることができるであろう。しかもこのような最小費用流れ問題であるかぎり整数解も保証されることになる。

この問題を解くためのいろいろな方法を検討するなかでバサッカーとサーティ[2)]が述べている方法を基礎により荷積問題に密着したアルゴリズムを求めることができた。それは図８のようなネットワークではなく，図３のようなネットワークに対して適用することができ，次に示される。

4．アルゴリズム

荷積問題が図３のようなネットワークで表わされているとき（各枝には荷物の量のみが与えられ，そこを走るトラック台数についての制限がなく，トラックはただ一つの始点に置かれている），次のアルゴリズムにより所与のトラック台数Ｖに対して最大荷物処理量ならびに運行経路を求めることができる。

（ｉ）与えられたネットワークのすべての枝（ｉ，ｊ）について$x_{ij}=0$とする。x_{ij}はその枝を通る最長路の数（その枝を通るトラックの台数と考えることができる）を示す。Ｌ＝０とする。Ｌは最長路の長さを順に合計したものを示し，荷物の総処理量を示す。なお各枝に与えられた荷物の

量a_{ij}はその枝の長さであるとみたてて計算を進めていく。

(ii) 始点sから終点tへの最長路を求める。それが二つ以上あるときは任意の1本を選ぶ。その最長路の長さが0のときは計算を終了する。それまで以上にトラック台数を増やしても，運ぶ荷物がないので無駄だからである。最長路の長さが正のときはその値をLに加える。

(iii) 最長路を構成したばかりの枝について次のことを行なう。

イ) その枝が最初に与えられたネットワークにある枝(i，j)であるとき。$x_{ij}=0$ならば，$a_{ij}=0$とし，さらに新しく枝(j，i)を作って$a_{ji}=-a_{ij}$(このa_{ij}''は最初に与えられた値)とする。$x_{ij}\geqq 1$ならば，$a_{ij}=0$となっているはずなのでそれはそのまま0として次に$a_{ji}=0$とする。この枝(j，i)はすでにあるはずである。次にいずれの場合についてもx_{ij}に1を加える。

ロ) その枝が最初に与えられたネットワークにはなく，新しく作られた枝(j，i)であるとき。まずx_{ij}から1を引く。その結果$x_{ij}=0$となったらa_{ij}は0から最初に与えられた値にもどし，枝(j，i)は取り除く。次に$x_{ij}=1$となったときは，a_{ij}はそのまま0とし，a_{ji}は0から最初にa_{ij}に与えられた値に負の符号をつけたものとする。最後にまだ$x_{ij}\geqq 2$であるときは枝(j，i)および枝(i，j)についてすべてそのままにしておく。

(iv) (ii)と(iii)を交互に繰返す。(ii)において与えられたトラック台数と求めた最長路の数が一致したとき，続けて(iii)まで計算することにより最適解を得ることができる。Lは荷物の全処理量を表わし，x_{ij}は枝(i，j)を通るトラックの台数を表わす。どのトラックがどの経路を通るかは適当に決めてやることができる。

以上が本節の最初に述べたような形の荷積問題を解くためのアルゴリズムである。この方法ではトラックを1台増やすたびにその時々の最大荷物処理量が得られていることになる。なお第1節で2点間を結ぶ有向枝はたかだか1本であるようにネットワークを作るとしたが，それはアルゴリズム(iii)の

イ）で新しく逆向きの枝を作らねばならないのでそれ以上複雑になることを避けるためである。

ネットワークの枝に容量の制限がついていないとしてアルゴリズムを構成してきたが，ここでその制限をも加えたアルゴリズムを考えることにする。そのためには上記の(iii)を少し変更するだけでよい。まずイ）においてx_{ij}に1を加えたらその値が容量（トラックの制限台数）と一致する場合は$a_{ij}=-\infty$とする。逆向きの枝についてはx_{ij}の大きさに応じてまったく同じ計算を行なうとよく変更する必要はない。ロ）の場合はそもそも枝（j，i）に容量の制限がつかないので変更する必要はない。以上である。次に前記のアルゴリズム(i)～(iv)を用いて枝に容量の制限がない場合の問題(図9)を解いてみよう。

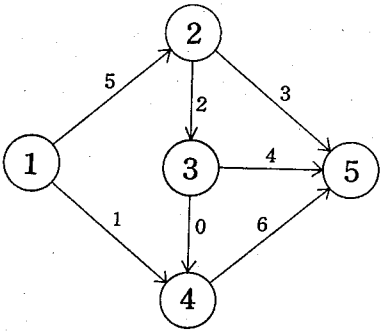

図9　例題（枝には運ぶべき荷物の量が示されている。枝を通るトラック台数に制限はないとする）

5．例　　題

図9で表わされる問題を解く。始点は点1終点は点5である。始点1に3台のトラックがあるとする。まず始点1から終点5への最長路を求めると，①→②→③→④→⑤でありその長さは13である。すなわち1台のトラックでは13単位の荷物を処理できることになる。次に(iii)により新しいネットワークを作ると図10となる。ここにおいて最長路は①→④→③→⑤であり，その長さは5である。2台であわせて13＋5＝18単位の荷物を処理できる。次に

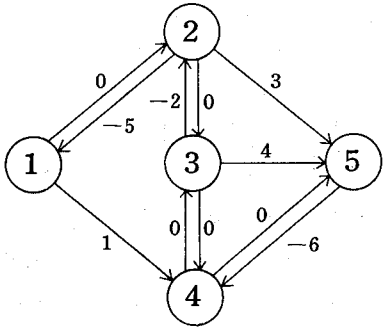

図10　新しいネットワーク（なお$x_{12}=x_{23}=x_{34}=x_{45}=1$であり，他は0である）

新しいネットワークを作ると図11となる。そこにおける最長路は①→②→⑤である。その長さは3である。3台では合計18＋3＝21単位の荷物を処理できることになる。これで与えられたトラック台数と求めた最長路の数が等しくなった。続けて(iii)を行なうと図12が得られる。これにより，3台のトラックのうち1台は①→②→⑤，次の1台は①→②→③→⑤，最後の1台は①→④→⑤という経路で走らせるとよいことがわかる。また図12における最長路の長さは0であるので，全部の荷物が3台のトラックで処理できることを知る。なお最適解から構成した運行経路は順に求めてきた最長路とは一般に一致しないことがわかる。

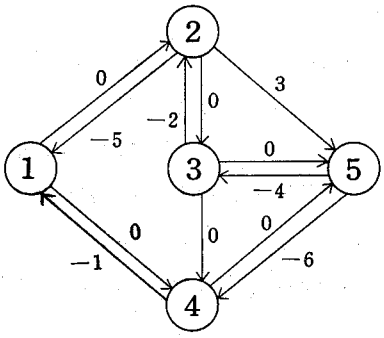

図11　新しいネットワーク（なお$x_{12}=x_{23}=x_{35}=x_{14}=x_{45}=1$であり，他は0である）

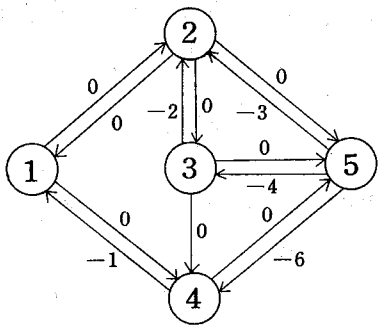

図12　新しいネットワーク（$x_{12}=2$，$x_{23}=x_{25}=x_{35}=x_{14}=x_{45}=1$，$x_{34}=0$である）

6．結　　語

トラック運輸事業に関して，解決すべきたくさんの運行上の問題が存在する。本ノートはその中の一つを取扱ったものであるが，本来は一つであるべき問題を次のように二つに分解して，そのうちの後の方を考えた。一つはある地点から他の地点へ届けねばならぬ荷物をどのような輸送経路にのせるかということであり，他の一つは運ぶべき荷物の量が各ルートに与えられたとき，所与のトラック台数でできるだけたくさん処理するにはどうすればよいかということである。前の問題については今後検討を加えねばならない。

このように本来は一つの問題を分解して部分的最適化を行なうことの危険

についてはチャーチマン[3),4)]が論ずるところであるが，あえて部分的最適化を行なった。それは基本的と思われるこの問題（荷積問題）がまだ検討されていないと考えるからである。

本研究は北海道大学長尾昭哉教授の御指導に負っている。ここに深く感謝の意を表したい。

参考文献

1) 伊理正夫，「ネットワーク問題の理論と手法の最近の進歩」，経営科学，第16巻，第2号，1972年，pp.75-87.
2) Busacker, R. G., and T. L. Saaty, Finite Graphs and Networks, McGraw-Hill, 1965（矢野健太郎，伊理正夫訳，グラフ理論とネットワーク，培風館，1970）
3) Churchman, C. W., "Wicked Problems," Management Science Vol. 14, No. 4, 1967, pp.(B-141)-(B-142)
4) Churchman, C. W., Challenge to Reason, McGraw-Hill, 1968（竹内靖雄訳，システム科学への挑戦，竹内書店，1970）
5) Dantzig, G.B., Linear Programming and Extentions, Princeton University Press, 1963.
6) Efroymson, M. A. and T. L.Ray, "A Branch-Bound Algorithm for Plant Location," Operations Research, Vol. 14, No. 3, 1966, pp. 361-368.
7) Ford, L. R., Jr., and D. R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton University Press, 1962.
8) Hu, T. C., Integer Programming and Network Flows, Addison-Wesley, 1969.