Title	消費の不均等分配と社会的時間選考率
Author(s)	酒井, 徹
Citation	北海道大學　經濟學研究, 23(3), 209-225
Issue Date	1973-11
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/31267
Type	bulletin (article)
File Information	23(3)_P209-225.pdf

消費の不均等分配と社会的時間選好率**

酒　井　　　徹

序

本稿において，我々は，消費可能な財の分配が各世帯間で不均等に行なわれている経済において，任意の世帯が「代表的世帯」として国民経済全体の消費の「最適」な成長径路決定の基準を与えるためにはどんな諸条件が満されていなければならないかを考察する。結論として，社会的厚生関数の強い分離可能性と効用関数に同次性の公準が仮定される限り，初期時点の不均等な分配パターンが保たれる事が，「代表的世帯」が任意に選ばれるための必要十分条件である。

宇沢〔8〕は，その主体的行動を分析することによって国民経済全体の行動を類推しうる世帯を「代表的世帯」と定義した。しかしながら，それはあくまでも抽象的な概念であって人口が成長している経済ではそのまま利用できないばかりか，さらに重大な難点を保留することにもつながることになろう。言うまでもなく，社会的厚生のコンポーネントとして個々の世帯の選好指標に「ものをいわせる」ことが現代の社会理念の自明的要求である。そうであれば，結局のところ，個々の世帯の所得となって帰属する財貨・サービスの流れの明細をはなれて「社会的厚生」を云々することは許されない。すなわち，国民所得ないし消費可能な財の分配について何らかの考慮が払われることこそ必要であろう。その点に関して本稿は宇沢氏の分析を多少なりと補足するものである。

本稿の第2の目的は，新古典派均衡成長径路に沿って消費（世帯当り）が持続的に成長する時に，径路が「最適」であるための必要条件を求めることである。ここに，「最適」とは「代表的世帯」の主観的価値判断と一定の距離

を保った社会的評価の基準が満たされることをいう。この条件は，異時的限界変換率と社会的時間選好率の均等化にほかならず，I. Fisherの基準として周知である。我々のモデルにおける持続的成長径路は同時に均衡成長径路でもあり，両径路の同時的達成を許す点は Saddle Point であるという意味で安定である。

記号の約束

以下で使用する変数及びパラメーターを次のように記すことにする。

$C(t)$	総消費量
$\bar{c}(t)$, $c(t)$	世帯当り平均消費量
$\tilde{u}_i(t)$	第 i 階層に属する世帯の効用指標
$u_i(t)$	同世帯主の効用指標
$L^i(t)$	同世帯主の総数
$L(t)$	総世帯主数
$P(t)$	総人口
$W(t)$	社会的厚生
$k(t)$	効率単位ではかった世帯主当り資本ストック
$r(t)$	純自己利子率
$\pi(t)$	異時的限界変換率
$\delta_c(t)$	c の消費分配を受けている世帯の時間選好率
$\delta(t)$	社会的時間選好率
$1/\gamma$	各世帯の平均的構成員人数
α	限界効用の弾力性
η	世帯効用の構成員人数弾力性
ρ	「純粋」時間選好率
n	人口成長率
Ω	ハロッド中立的技術進歩率
φ^i	$c^i/\bar{c}$ 比率

**私は過去約3年間，本大学院において経済原論及び経済政策を研究対象としてきたが，この間研究会その他をつうじてこれらの分野を専攻される教官諸氏から様々の刺激と御教示を受けることができたことに感謝したい。わけても，早川泰正，小林好宏，白井孝昌，所　哲也の教官諸氏には負うところが多い。本稿は諸氏の激励なしには公けになりえなかったであろう。さらに本大学院博士課程松本源太郎，加藤睦洋の両氏

との議論は有益であった。ここに記して感謝したい。なお，本稿に含まれているかもしれない不手際や誤謬のいっさいの責任は私のみにある。

時間選好関係

最も単純なケースとして，各世帯が均等な分配を受け続ける経済から出発しよう。任意の世帯の２つの消費径路 $c=\{c(t)\}$ と $c'=\{c'(t)\}$ とについて，一方を他方より選好するか否かという事は任意の世帯の時間選好Pによって与えられ，次のような効用積分

$$V(c)=\int_0^\infty e^{-\rho t}\tilde{u}[c(t)]dt,\quad \rho>0$$

によって選好関係Pは定義される，すなわち

$$cPc' \rightleftarrows V(c)>V(c')$$

ここで $\tilde{u}[c(t)]$ は任意の世帯の効用関数であり，$c(t)$ は世帯当りの均等な消費量である。ρ は「純粋」時間選好率である。この場合の世帯の時間選好率 $\delta_c(t)$ は Ramsey-Keynes の公式より

$$\delta_c(t)=\rho-\frac{\tilde{u}''[c(t)]\,c(t)}{\tilde{u}'[c(t)]}\cdot\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$$

と導出される，$\delta_c(t)$ は「世帯」の異時的限界代替率の変化率と定義される。

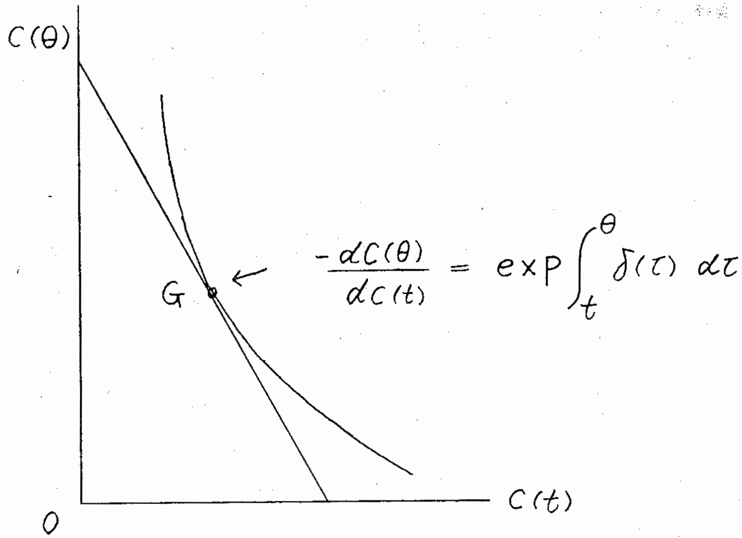
国民経済全体の「１人当り」消費径路の選択基準は人口が一定の時は上の選好関係に帰着する。他方，人口が一定の成長率 n で成長する場合には，社会的な時間選好関係 P^s は

$$V^s(c)=L(0)\int_0^\infty e^{-\beta t}\tilde{u}[c(t)]dt,\quad \beta=\rho-n>0 \cdots\cdots(1)$$

$$cP^sc' \rightleftarrows V^s(c)>V^s(c') \cdots\cdots(2)$$

によって定義される。ここで $\tilde{u}$ は「代表的世帯」の効用関数であり，分配が均等に行われる経済では任意の世帯が代表である。また「１人当り」消費は代表的世帯の消費を意味することに注意されたい。

現在の時点（例えば t）から将来にわたる消費径路は第１図の点 $G=\{c(t), c(\theta)\}$ によって与えられ，社会的選好関係はGを通る無差別曲線によって表わ



第1図

される。選好関係の凸性により，無差別曲線が原点に対して凸となっている。(社会的な意味での)異時的限界代替率はG点における無差別曲線の接線の勾配によって与えられる。異時的限界代替率は将来の消費と現在の消費との社会的交換比率でもあり，それはとりもなおさず，現在の消費の犠牲たる投資の費用と収益との関係を示すものである。社会的時間選好率は上の交換比率の変化率にほかならない。それはいかなる市場利子率あるいはその複合体から導かれるものではなく，個々の世帯の「純粋」な時間選好及び消費並びに人口の成長率を反映させたものとして，政策担当者が呈示するものである。

任意の時点 t（$0 \leqq t \leqq \theta$）における社会的時間選好率を $\delta(t)$とすれば，

$$\delta(t) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log\left\{-\frac{dc(\theta)}{dc(t)}\right\}\Bigg|_{\theta=t} \qquad \cdots\cdots(3)$$

と与えられる。ここで異時的限界代替率は(1)の効用積分から $dV^s(c)=0$ とおいて求まる。

$$-\frac{dc(\theta)}{dc(t)}=\frac{\tilde{u}'[c(t)]}{\tilde{u}'[c(\theta)]}\,e^{\beta(\theta-t)} \quad\cdots\cdots(4)$$

この時 $\delta(t)$ は容易に計算され

$$\delta(t)=\beta-\frac{\tilde{u}''[c(t)]c(t)}{\tilde{u}'[c(t)]}\cdot\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \quad\cdots\cdots(5)$$

となる。(5)は「代表的世帯」の時間選好率から人口成長率 n を引いたものとして求まる。

$$\delta(t)=\delta_c(t)-n \quad\cdots\cdots(6)$$

すなわち，社会的時間選好率は何を「代表」とするかに対応して決まるものである。

不均等分配と世帯の効用指標

4つの基本的関係

以下では，不均等な分配が行われている経済における社会的時間選好率，従ってそれに対応する代表的世帯を求めるための準備をする。i を代表的世帯を表わす添字とすると，社会的時間選好率$\delta(t)=\delta_{c^i}(t)-n$は次の4つの関数関係を反映させなくてはならない。

(i)　総消費C(t)の追加による世帯への消費分配の増加，$\partial c^i/\partial C$,
(ii)　c^iの増加による世帯の効用指標の増加，$\partial \tilde{u}_i/\partial c^i$,
(iii)　世帯の効用指標の増加による社会的厚生の増加，$\partial W/\partial \tilde{u}_i$,
(iv)　社会的厚生が増加した時の目的関数の増加，$\partial V^s(c)/\partial W$,

これである。(i)〜(iv)はそれぞれに対応する4つの仮定のもとで明らかとなる。

4つの仮定

I　消費の不均等分配

各時点で世帯（主）間の消費分配が均等な場合すなわち，すべての i について，$c^i(t)=C(t)/L(t)=\bar{c}(t)$の時，$\partial c^i(t)/\partial C(t)=1/L(t)$である。

他方，分配が不均等な場合，一般に$c^i(t)=\varphi^i(t)\bar{c}(t)$と表わされ，$\varphi^i(t)\gtreqless 1$である。もし初期の不均等な分配が保たれるならば，すべての i について

$$c^i(t)=\varphi^i\,\bar{c}(t),\ \varphi^i\text{は一定} \quad\cdots\cdots(6)$$

と表わすことができる。φ^i は各 i について異なる値をとる。いま小さな値から順にとって行くとローレンツ曲線が描かれ，その時，分布関数

$$\ell^i=R(\varphi^i) \quad\cdots\cdots(7)$$

を得る。ここで$\ell^i=L^i(t)/L(t)$であるが，φ^iは一定であるからℓ^iも t から独立となる。

II　代表的世帯の効用指標

いま仮に，i は代表的世帯として採用されたと考えよう。i がいかなるφ^iの値をとるかはまだわかっていない。さて，この世帯の効用指標として$\tilde{u}_i$を用いると，次の2つが世帯の効用関数の典型として考えられる

$$\tilde{u}_i=u_i=u_i[c^i]$$

$$\tilde{u}_i=\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\eta}u_i[c^i],\quad 0<\eta\leqq 1 \quad\cdots\cdots(8)$$

後者(8)は家族数と世帯効用との間に正の関係を認めるものであり，一種の家族の効用集計の単純な仮定を含んでいるとも見られる。前者は$\eta=0$の場合に相当する。我々は以下で(8)を採用する。ここでηが厳密に1以下であれば，家族数が2倍になっても，他の事情が等しい限り，それは世帯の効用を2倍以下にしか増大させないことを物語る。とにかく$\eta>0$であれば，世帯の効用はその構成員の全効用を少しは反映させたものである事は明らかである。

世帯主の効用関数は一定の限界効用弾力性をとり，その限りでは次のような形に特定化しうる

$$u_i(t)=A_i+B_i[c^i(t)]^{1-\alpha} \quad\cdots\cdots(9)$$

$$\alpha=-\frac{c^i u_i''[c^i(t)]}{u_i'[c^i(t)]}>0,\ (1-\alpha)B_i>0 \quad\cdots\cdots(10)$$

(10)式は，世帯の消費がどの世帯についても一様な率で変化する場合は，各世帯の限界効用もまた同じ率で変化するという，いわゆる「同次性の公準」に

もとづいている。[1]

各世帯は同一の規模を持つものとすれば，任意の世帯の効用指標は

$$\tilde{u}_i(t)=\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\eta}\{A_i+B_i[c^i(t)]^{1-\alpha}\}, \quad \cdots\cdots(11)$$

と表わされる。

Ⅲ　社会的厚生

社会的厚生はすべての世帯の効用指標の総和であり，代表的世帯を通じて設定される時には i を代表とすると

$$W(t)=L(t)\tilde{u}_i(t) \quad \cdots\cdots(12')$$

と表わされるが，代表を考えない時には

$$\begin{aligned}W(t)&=\sum_j^{L(t)}\tilde{u}_j(t)=\sum_i^{J}L^i(t)\,\tilde{u}_i(t)\\&=L(t)\sum_i^{J}\tilde{u}_i(t)R(\varphi^i) \quad \cdots\cdots(12)\end{aligned}$$

と表わされる。

すべての t についてφ^iは一定であるならば次の命題が成立する。

（命題）

総消費C(t)の追加がもたらす限界社会的厚生は，その最大値 $\{W'(t)\}_{MAX}$ に比例し，比例係数は t から独立である。[2]

証明

効用関数は強く凹（つまり限界効用逓減）であるから，均等な分配は限界社会的厚生の最大値を与える。それを

$$\{W'(t)\}_{MAX}=\frac{dL(t)\tilde{u}(t)}{dC(t)}=\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\eta}B[\bar{c}(t)]^{-\alpha} \quad \cdots\cdots(13)$$

と表わすことができる。Bはすべての世帯主について均等な分配が行なわれる限り任意である。

他方，不均等な分配のもとで，代表となるべき世帯が決まっていない時，

$$\begin{aligned}W'(t)&=\frac{d}{dC(t)}L(t)\sum_i^{J}\tilde{u}_i(t)R(\varphi_i)\\&=\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\eta}\sum_i^{J}B_i\,[c^i(t)]^{-\alpha}R(\varphi^i)\cdot\varphi^i \quad \cdots\cdots(14)\end{aligned}$$

を得る。⒀，⒁式の比を$\lambda(t)$とおいて計算すると，

$$\lambda(t)=\frac{W'(t)}{\{W'(t)\}_{MAX}}=\frac{1}{B}\sum_{i}^{J}R(\varphi^i)B_i[\varphi^i]^{1-\alpha}$$

となり，右辺は t から独立である。すなわち $\lambda(t)=\lambda$，かくて

$$W'(t)=\lambda\{W'(t)\}_{MAX}\cdots\cdots\text{証明終り}\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\sum_{i}^{J}B_i[c^i(t)]^{-\alpha}R(\varphi^i)\varphi^i=\lambda B[\bar{c}(t)]^{-\alpha}\qquad(\text{系})$$

Ⅳ　目的関数

均等な分配のケースでは代表的世帯は任意に選ばれ，時間選好関係は次のような効用積分

$$V^s(\bar{c})=(\gamma)^{1-\eta}P(0)\int_0^{\infty}e^{-\beta t}u[\bar{c}(t)]dt,\quad \beta=\rho-n\cdots\cdots\cdots(16)$$

によって定義される。(16)式は(1)と形式的には同一である。政策立案者は人口が成長するにつれて消費の充足度が減少していく事を予想する時，人口の成長率よりも大きな率 ρ で将来を割引くことを代表的世帯にすすめるであろう。そのような $\rho>n$ は十分大きな t に対して効用積分の値が発散するのをふせぐ。

他方，不均等な分配のケースでは，代表的世帯（それがどれかは不明）を通じて設定されるならば，効用積分

$$V^s(c^i)=(\gamma)^{1-\eta}\int_0^{\infty}e^{-\beta t}u_i[c^i(t)]dt,\cdots\cdots\cdots(17')$$

は仮に i を代表とした時に定義される。

代表を考えない場合に効用積分は

$$V^s(c)=(\gamma)^{1-\eta}P(0)\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\sum_{i}^{J}u_i[c^i(t)]R(\varphi^i)dt\cdots\cdots\cdots(17)$$

で与えられる。

(17)式を全微分すると共に $dV^s(c)=0$ とおき，t，θ を残すと

$$e^{-\beta\theta}\sum_{i}^{J}u_i'[c^i(\theta)]R(\varphi^i)dc^i(\theta)+e^{-\beta t}\sum_{i}^{J}u_i'[c^i(t)]R(\varphi^i)dc^i(t)=0$$

（系より）θについて

$$e^{-\beta\theta}\sum_{i}^{J}B_i[c^i(\theta)]^{-\alpha}R(\varphi^i)\varphi^i d\bar{c}=e^{-\beta\theta}\lambda B[\bar{c}(\theta)]^{-\alpha}d\bar{c}(\theta),$$

t についても同様である。かくて $dV^s(c)=0$ は

$$e^{-\beta\theta}\lambda B[\bar{c}(\theta)]^{-\alpha}d\bar{c}(\theta)+e^{-\beta t}\lambda B[\bar{c}(t)]^{-\alpha}d\bar{c}(t)=0$$

と縮約される。上の式は世帯当り平均消費量 $\bar{c}$ に関する異時的限界代替率を

導く。すなわち，

$$\frac{-d\bar{c}(\theta)}{d\bar{c}(t)}=\left[\frac{\bar{c}(t)}{\bar{c}(\theta)}\right]^{-\alpha}e^{\beta(\theta-t)} \quad \cdots\cdots(18)$$

(18)式は，代表的世帯を想定しない場合の任意の異なる時点の異時的限界代替率は，世帯当り平均消費量 $\bar{c}$ に帰着して求まる事を意味している。分配パターンが不変に保たれる限り(18)式の右辺は

$$\left[\frac{c^i(t)}{c^i(\theta)}\right]^{-\alpha}e^{\beta(\theta-t)}$$

に等しい。これは i が代表として選ばれた時の c^iに関する異時的限界代替率である。i を任意に選んだとしても，その場合の異時的限界代替率は(18)の $\bar{c}$ に関するそれに等しく，従って(18)を通じて任意の代表は同一の異時的限界代替率を持つ。すなわち，

$$-\frac{dc^i(\theta)}{dc^i(t)}=-\frac{dc^j(\theta)}{dc^j(t)}=\cdots\cdots=-\frac{d\bar{c}(\theta)}{d\bar{c}(t)}, \quad \cdots\cdots(19)$$

従って

$$\delta_{c^i}(t)=\delta_{c^j}(t)=\cdots\cdots=\delta_{\bar{c}}(t)=\delta(t)+n$$

かくて，我々の効用関数のもとでは，任意の世帯が「代表的世帯」に選ばれるための必要十分条件は初期の不均等な分配パターンが保たれる事である。その限りにおいて，政策担当者は価値判断から独立に代表を選ぶことができるのである。

この結論により，以下では世帯当り平均消費水準に等しい分配を受けている世帯を「代表的世帯」と考えて行くことにする。

1） Hicks〔3〕 21章の付録参照。
2） この命題は Feldstein〔2〕に負うている。

技術的制約

以下では混乱のない限り，世帯当り平均消費水準を c(t) と記すことにし，その技術的制約を考察していく。

言うまでもなく，消費財は一種類のみであり，消費は連続的時点について

なされるという前提にたつ。

初期の世帯当り資本ストックk(0)から出発して次の(20)式をみたす実現可能な消費径路{c(t)}のうち，代表的世帯のもつ時間選好率と人口成長率のもとで，最適な径路を選ぶことを考えよう。[3)]

$$c(t)=e^{\Omega t}\{f[k(t)]-(g+\mu)k(t)-\dot{k}(t)\}\cdots\cdots(20)$$

$$g=n+\Omega$$

μ：減価償却率

新古典派均衡成長径路に沿って成長する時，$\dot{k}=0$，$\dot{c}/c=\Omega$であるから，経済の世帯当り平均消費水準の成長率は，技術進歩率Ωに等しくなる。

さて，最適径路を求めるためには(20)式の動学過程について，異時的限界変換率を計算する必要がある。資本の純自己利子率r(t)は

$$r(t)=f'[k(t)]-\mu\cdots\cdots(21)$$

である。いまt時点での追加的貯蓄の収益がθ時点まで連続的に再投資される時，θ時点での総消費の増分は[4)]

$$\exp\left\{\int_t^\theta r(\tau)d\tau\right\}\cdots\cdots(22)$$

である。これをθ時点での世帯主１人当りの消費に換算すると，人口成長率nを考慮すれば

$$\exp\left\{\int_t^\theta [r(\tau)-n]\,d\tau\right\}\cdots\cdots(23)$$

となる，(23)の変化率を$\theta=t$で評価したものが異時的限界変換率$\pi(t)$である。すなわち，

$$\pi(t)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\log\,\exp\int_t^\theta[r(\tau)-n]\,d\tau\right]\Bigg|_{\theta=t}\cdots\cdots(24)$$

これを計算すると，

$$\pi(t)=r(\tau)-n\cdots\cdots(25)$$

となり，異時的限界代替率は資本の純自己利子率から人口成長率を引いたものとして与えられる。$\pi(t)$は投資機会曲線の接線の勾配の変化率であり，投資の技術的収益と費用の関係を示すものである。

3)　新古典派生産関数f[k(t)]は2回微分可能な凹関数である。すなわち$f'>0$，$f''<$

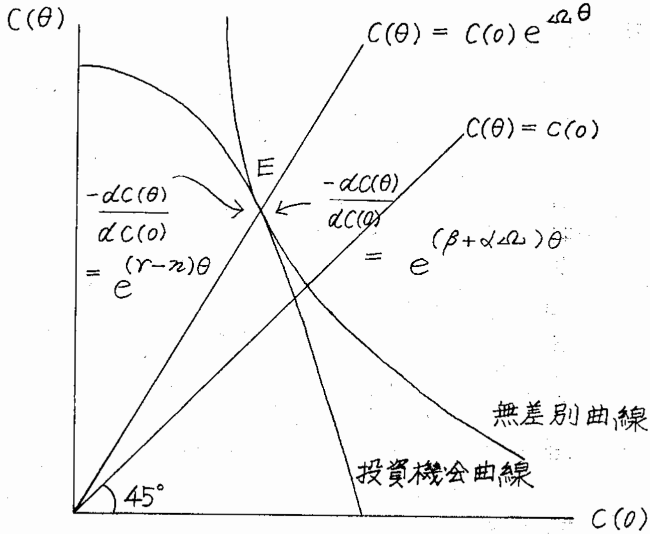
0また $f'(0)=\infty$ が仮定される。k(t)は効率単位ではかった世帯当り資本ストックであり，$k(t)=\frac{K(t)}{L(t)e^{\Omega t}}$ である。Ω は Harrod 中立的技術進歩率をあらわす。(20)式は世帯(主)当り平均消費水準の制約式であり，従来の「1人当り」消費に対応している。

4)　0時点での貯蓄＝投資の収益は (t, θ) 期間にわたって連続的に再投資される限り，すべての τ 時点 $(t<\tau<\theta)$ でのはじめの消費計画は変更を受けない。従って(22)式は θ 時点で利用可能な消費量の増分である。これが投資の純収益にほかならない。

なお，Nordhaus and Tobin[5]を見よ。

最適貯蓄―消費径路

投資の費用及び収益に対する評価は，ひとつには技術的に決まるものであり，他方はそれが世帯の時間選好関係をつうじて社会的価値判断として決まるものである。形式的には投資機会曲線と無差別曲線の接点によって，2つの評価が一致することが示される。すなわち，2つの評価が一致する事が「最適性」の必要条件である。



第2図

$$\pi(t)=\delta(t) \cdots\cdots (26)$$

新古典派成長径路に沿ってこの条件は，

$$r-n=\beta+\alpha\Omega \cdots\cdots (27)$$

と表わされる，この条件を満たす点は第2図のE点で典型的に示されている。45度線は世帯当り平均消費の定常的径路であり，我々の持続的成長径路はその上の直線で示される。E点において，投資機会曲線と無差別曲線は接しており，生産関数が凹であることと無差別曲線が原点に対して強く凸であることから，接点は一意的に決まる。

(27)式はまた変分法によって求めた必要条件（オイラーの条件）に一致する。いま，

$$H=e^{-\beta t}u(c) \cdots\cdots (28)$$

を定義する。変分法の計算過程を書くならば，

$$\frac{\partial H}{\partial k}=e^{-(\beta-\Omega)t}\{r(t)-g\}u'$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{k}}=e^{-(\beta-\Omega)t}(-1)u'$$

$$d\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{k}}\right)/dt=e^{-(\beta-\Omega)t}\varDelta u'$$

ここで

$$\varDelta=-\frac{cu''}{u'}\cdot\frac{\dot{c}}{c}+\beta-\Omega$$

オイラーの条件は

$$\frac{\partial H}{\partial k}=d\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{k}}\right)/dt \cdots\cdots (29)$$

であるから $u'>0$，$\alpha=-cu''/u'$ を考慮して

$$r(t)-g=\varDelta$$

$$=\alpha\frac{\dot{c}}{c}+\beta-\Omega \cdots\cdots (30)$$

殊に，均衡成長径路上では $\dot{k}=0$ より $r(t)=r$，$\dot{c}/c=\Omega$ であるから，上の条件は

$$r-g=\alpha\Omega+\beta-\Omega$$

$$r-n=\beta+\alpha\Omega \cdots\cdots (31)$$

となり，(27)式に一致する。

安　定　性

世帯当り平均消費の持続的成長径路の安定性を考える時，次のような変数変換をすると便利である。

$$\tilde{c} = c e^{-\Omega t} \quad \cdots\cdots (32)$$

このように $\tilde{c}$ を定義した時，$\dot{k} = 0$，$\dot{c}/c = \Omega$ に対応する特異曲線は次のようになる。

$$\dot{k} = 0 \rightleftarrows f(k) - \tilde{c} - (g + \mu)k = 0$$

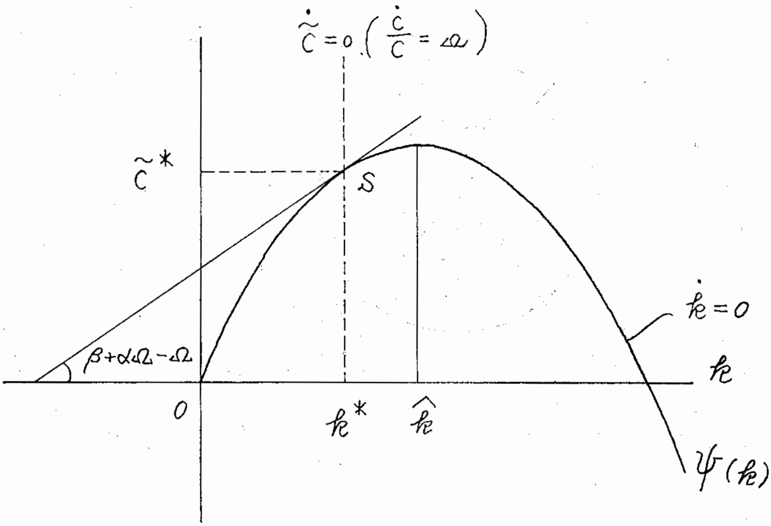
$$\dot{\tilde{c}} = 0 \rightleftarrows \dot{c}/c = \Omega \rightleftarrows \{f'(k) - \mu - \rho\}\frac{1}{\alpha} - \Omega = 0$$

以下では $\Psi(k) = f(k) - (g + \mu)k$ と定義し，特異曲線をそれぞれ

$$\dot{k} = 0 \rightleftarrows \tilde{c} = \Psi(k) \quad \cdots\cdots (33)$$

$$\dot{\tilde{c}} = 0 \rightleftarrows \dot{c}/c = \Omega \rightleftarrows \Psi'(k) = \beta + \alpha\Omega - \Omega \quad \cdots\cdots (34)$$

と簡単に表わすことにする。[5)] 2つの特異曲線は第3図において示されている。



第3図

均衡成長径路 k^* と持続的消費成長径路 $\tilde{c}^*$ の近傍での動きについて見るために新変数 $(v,\ x)$ を次のように定義する。

$$\left.\begin{array}{l} v = k - k^* \\ x = \tilde{c} - \tilde{c}^* \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (35)$$

さらに，関数P，Qを次のように定義する。

$$P(k,\tilde{c}) = \Psi(k) - \tilde{c}$$

$$Q(k,\tilde{c}) = \left[\{\Psi'(k) - \beta + \Omega\}\frac{1}{\alpha} - \Omega\right]\tilde{c} \quad \cdots\cdots (36)$$

テイラー展開して線型近似すると

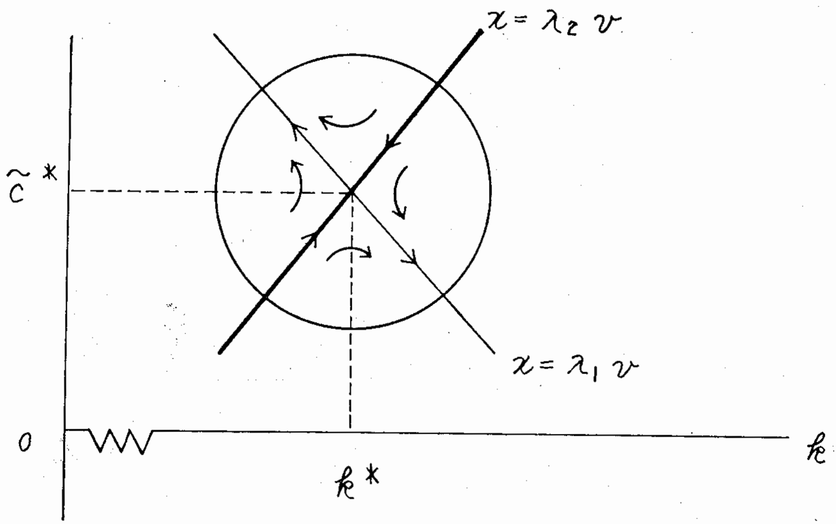
$$P(k,\tilde{c}) = P(k^*,\tilde{c}^*) + P_k(k^*,\tilde{c}^*)v + P_c(k^*,\tilde{c}^*)x$$

$$Q(k,\tilde{c}) = Q(k^*,\tilde{c}^*) + Q_k(k^*,\tilde{c}^*)v + Q_c(k^*,\tilde{c}^*)x$$

ここで $P(k^*,\tilde{c}^*) = Q(k^*,\tilde{c}^*) = 0$ であるから，次の連立微分方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k(k^*,\tilde{c}^*) & P_c(k^*,\tilde{c}^*) \\ Q_k(k^*,\tilde{c}^*) & Q_c(k^*,\tilde{c}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (37)$$

すなわち



第4図

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi'(k^*) & -1 \\ \Psi''(k^*)\dfrac{\tilde{c}^*}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (37')$$

である。特性方程式

$$\begin{vmatrix} \Psi'(k^*) - \lambda & -1 \\ \Psi''(k^*)\dfrac{\tilde{c}^*}{\alpha} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots (38)$$

を解いた時の特性根をλ_1，λ_2とすると，λ_1，λ_2は点$(k^*, \tilde{c}^*)$の近傍の様々な初期条件に対応して完全に決定される。そのうち，ある特定の径路は実際に最適となるであろう。

$\Psi'(k^*) > 0$，$\Psi''(k^*) < 0$ であるから

$$\lambda_1 < 0 < \Psi'(k^*) < \lambda_2 \quad \cdots\cdots (39)$$

である。これより点$(k^*, \tilde{c}^*)$は鞍点 Saddle point となる。[6)]

5) $\{\Psi'(k) + g - \rho\}\dfrac{1}{\alpha} = \Omega$，ここで$g = n + \Omega$，$\beta = \rho - n$より$g - \rho = -\beta + \Omega$であるから整理すると$\Psi'(k) = \beta + \alpha\Omega - \Omega$

6) $\lambda_1 = \left(\Psi'(k^*) - \sqrt{\Psi'(k^*)^2 - 4\Psi''(k)\cdot\tilde{c}/\alpha}\right)\dfrac{1}{2}$

$\lambda_2 = \left(\Psi'(k^*) + \sqrt{\Psi'(k^*)^2 - 4\Psi''(k)\cdot\tilde{c}/\alpha}\right)\dfrac{1}{2}$

これより

$$\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} = m_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + m_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

がでる。なお，Schittko〔7〕を見よ。

結語的覚え書き

不均等な消費の分配を受けている世帯から成る国民経済において，政策担当者が個々の生活単位に「ものをいわせる」ことを怠ることなしに「目的関数」を選択することが望ましい。我々は，以上の考察の結果，不変の分配パターンと効用関数の性格に依存する時，任意の世帯を「代表的世帯」とすることができ，その限りでは実体のある代表を基本として，目的関数を選択することができた。

「代表的世帯」は任意に選ばれる。従って我々は，世帯当り平均消費水準に関しての最適な持続的成長径路の決定に関して議論をする事ができた。「代表的世帯」の消費径路がこれである。しかしながら，この径路の決定に対しては，他のすべての世帯も異存がないはずである。何故なら，任意の世帯の消費に関する社会的時間選好率は等しくなるからである。換言すれば，「代表的世帯」は任意だからである。

不均等な分配パターンの不変性はむしろ一般性をもっているであろう。従って，我々の結論は，社会的厚生関数が分離可能であるという仮定と，世帯の効用関数の単純性に依存していると言う事ができる。しかしながら，これら関数の一般化は本稿の枠外にあるとともに，今後の議論を呼ぶところとなろう。

消費者主権とは，国民経済のコンポーネントたる個々の生活単位の評価がすべて尊重されて社会的厚生関数の中に入れられていることこそ重要とする理念である。当然，目的関数としての操作性は犠牲になりがちである。他方，我々の問題は，各人の評価がどのように総合されて１つの社会的評価がつくり出されるかであった。この問題はむしろ操作性にかかわっている。消費者主権の要求に沿うような，しかも，操作性を備えた目的関数の構築は，それ自体多くの困難を含んでいるのは明らかである。しかしながら我々の採用した目的関数は上の現代的社会理念の要求を多少なりと満たしていると言えよう。

参考文献

1) Cass D. : "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", Rev. Econ. Studies. 32(3), July 1965.

2) Feldstein M. S. : "The Derivation of Social Timepreference Rates", Kyklos, 18, 1965.

3) Hicks sir J. R. : Capital and Growth. Oxford U. P. 1965.

4) Koopmans T. C. : "On the Concept of Optimal Economic Growth", The Economic Approach to Development Planning, Pontificia Academia Scientarum, North-Holland P. C. 1965.

5) Nordhaus W. and J. Tobin : "Is Growth Obsolete?", Economic Reserch ; Retrospect and Prospect. NBER General Series 96; Economic Growth. 1972.

6) Ramsey F. P. : "Mathmatical Theory of Saving", Econ. J., Dec. 1928.

7) Schittko U. K. : "Euler–und–Pontrjagin–Wachstumspfade : Ein Beispiel", Jahrbuch Für Sozialwissenschaft 23(1), 1972.

8) 宇沢弘文；「最適経済成長理論の再検討：解説」季刊理論経済学 20(2) Angust 1969.