分散分析における組合せ計算について

遠　藤　　　薫

目　　次

1. はじめに

本稿は分散分析の操作を組合せ計算論の観点から考察しようとする一つの試みである。計量経済学的分析手法のうちとくに分散分析の問題をとりあげるのはなぜか，またなぜ組合せ計算論の観点と結びつけなければならないかという点について最初に少し述べておこう。計量経済学は一方ではすでに分析の定型[1)]を確立したようにみえ，他方ではその定型に固有のさまざまな難点[2)]を乗りこえる方法をまだ確定できないでいるようにみえる。こうした状況の中で一方ではその複雑性のゆえに解析的な取扱いができないような型のモデルの研究が進められ，他方では比較的単純な仮説の導出および検定がかえって有用である[3)]ような分野が絶えず発見される。前者の場合についてコンピューター・シミュレーション実験の手法が使われることが多くなるにつれ，又後者について統計的仮説検定の多様な型を時と場合に応じて適用する工夫が必要であるゆえに，実験計画に関する諸問題は大きな比重をもつようになる。現在分散分析を含む実験計画法の研究が広い意味の計量経済学にとって本質的な意義を有するのはまずこのような理由によると考えられる。

更に従来の実証分析の通例として係数のスペシフィケーションが何らかの方法で行なわれたのちにもモデルのいわばあてはまりのよさをたしかめる意

味でシミュレーション実験が行なわれた。つまり最後の段階のために実験計画法の考え方が援用されたにすぎない。しかし与えられたデータの広範囲な利用のためには現在の定型とは異なった多様な模型構成の考え方が必要でありその理論的前提として実験計画法，さらに進んで組合せ理論の研究がきわめて有用であると考える。

1)　集計的な線形ないし非線形モデル。例えばクライン・ゴールドバーガー〔5〕。
2)　多重共線性，変数間の同時関係，誤差項の自己相関，観測誤差，データの欠落，観察値が少ないこと。オーカット他〔8〕，6ページ。
3)　ボーツ・スタイン〔1〕。

2.　分 散 分 析

分散分析について簡単に述べ，データ解析の結果得られる分散分析表について検討する。[1)]

線形モデル

(1)　$y_i=\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\cdots+\beta_px_{ip}+e_i$,　$i=1,\cdots,n$

を考える。y_iは観測可能な確率変数，$\beta_1,\cdots,\beta_p$は未知のパラメーター，$x_{i1},\cdots,x_{ip}$は確率変数でない観測可能な変数，e_iは観察不可能な確率変数とする。e_iは誤差項と呼ばれ，その確率分布について(1) $E[e_i]=0$，(2) $Var[e_i]=\sigma^2$（未知の定数），(3) $Cov[e_i, e_j]=0$，$i\neq j$，の仮定をおく。なお一般に $x_{i1}=1$，$i=1,\cdots,n$，である。

x_{ij}，$i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,P$を要素とする行列のランクがPであるとき（$n\geqq P$）未知のパラメーターβ_jについての推定値を求めることができそれを$\hat{\beta}_j$で表わす。任意の二つ以上のβ_jが等しいという帰無仮説を検定するためには誤差項e_iについてさらに仮定(4) e_iは正規分布をする，を置いてF値を求めF分布を利用する。これを分散分析といい，そもそも実験計画モデルにおける結果についての仮説検定として考え出されたものである。二元配置モデルを例にしてあらましを述べると次のようになる。

観測値に影響をおよぼすと考えられる二つの因子AとBをとりあげ，因子Aについては全部でＩ個の水準を設定し，因子Bについては J 個の水準を設定し，それらのすべての組合せのもとでＩＪ個の観測値 y_{ij} を得たとする。このときは線形モデル

$$(2)\quad y_{ij}=\mu+a_i+b_j+e_{ij},\quad i=1,\cdots,I,\quad j=1,\cdots,J$$

が考えられる。μ は平均，a_i は i 番目の水準のときの因子Aの効果，b_j は j 番目の水準のときの因子Bの効果を表わす。e_{ij} は誤差項である。ab_{ij} という記号で因子Aと因子Bの交互作用を表わす。これは繰返しのある二元配置モデル

$$(3)\quad y_{ijk}=\mu+a_i+b_j+ab_{ij}+e_{ijk},$$
$$i=1,\cdots,I,\quad j=1,\cdots,J,\quad k=1,\cdots,K$$

に現われる。k は繰返しを表わし，i と j の同一の組合せのもとでK回の実験が繰返されることになる。ab_{ij} を(2)式に項として入れることができないのは計算によってこの推定値を求めることができないからである。このようなとき交互作用項 ab_{ij} は誤差項 e_{ij} に含まれたままであり分離することができない。これを交絡という。

(2)式を行列で表わすと，

$$Y=X\beta+e$$

となる。例えば，I＝2，J＝3のときは

$$Y=\begin{pmatrix} y_{11}\\ y_{12}\\ y_{13}\\ y_{21}\\ y_{22}\\ y_{22} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} 1&1&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \mu \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \end{pmatrix}$$

である。これをみると行列Xの要素 x_{ij} は0または1のいずれかの値をとっており，(1)のモデルの特別な場合であることがわかる。

ところが行列Xの列の間には線形従属の関係がありランクは6より小さい。したがってパラメーターβを推定するための正規方程式

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

においてX'Xは正則行列でなく，その逆行列が存在しないので，$\hat{\beta}$のユニークな値を求めることはできない。そこで(2)のモデルに対しては

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{I} a_i = \sum_{j=1}^{J} b_j = 0$$

という制約式をつけ加えて解を求める。(3)式の場合はこの他にさらに

$$\sum_{i=1}^{I} ab_{ij} = \sum_{j=1}^{J} ab_{ij} = 0$$

という制約式をつけ加える。

例えば(2)のモデルにおいて$I=2$，$J=3$のときは(4)より

$$a_2 = -a_1$$

$$b_3 = -(b_1 + b_2)$$

を得,これを(2)に代入し,それから正規方程式を作って解を求める。その結果

$$\hat{\mu} = y_{..},\ \hat{a}_1 = y_{1.} - y_{..},\ \hat{a}_2 = y_{2.} - y_{..},$$

$$\hat{b}_1 = y_{.1} - y_{..},\ \hat{b}_2 = y_{.2} - y_{..},\ \hat{b}_3 = y_{.3} - y_{..}$$

が得られる。ただし $y_{1.} = \Sigma_{j=1}^{3} y_{1j}/3$ のようにドット記号を用いる。しかしこのように(4)の制約式を付加して得られた推定値はμ，$a_1, \cdots, b_3$の推定値ではなく，(2)を変形して，

$$y_{ij}=(\mu+a.+b.)+(a_i-a.)+(b_j-b.)+e_{ij}$$

あるいは，$\tilde{\mu}=\mu+a.+b.$ 等とおいて，

$$y_{ij}=\tilde{\mu}+\tilde{a}_i+\tilde{b}_j+e_{ij}$$

と書いたときの，$\tilde{\mu}$, $\tilde{a}_1,\cdots$, $\tilde{b}_3$ の推定値となっている。

我々は(2)のモデルで $a_1,\cdots$, a_I の間に差があるかどうか，あるいは $b_1,\cdots$, b_J の間に差があるかどうかを知りたい。そのためには a_i についてであると帰無仮説

$$H_0: a_1=a_2=\cdots=a_I=\text{定数}$$

をたてることになるが，これは定数として a. を与えると，

$$H_0: a_1-a.=a_2-a.=\cdots=a_I-a.=0$$

あるいは，

$$H_0: \tilde{a}_1=\tilde{a}_2=\cdots=\tilde{a}_I=0$$

と同じことである。したがって $\tilde{a}_i$ が等しく０であるという帰無仮説を検定することにより，所期の目的であった a_i の間に差がないという帰無仮説の検定を行なえることになる。

次に $\tilde{a}_i$ についての仮説検定のためのＦ値は

$$F=\frac{\Sigma_i\Sigma_j(y_{i.}-y_{..})^2/(I-1)}{\Sigma_i\Sigma_j(y_{ij}-y_{i.}-y_{.j}+y_{..})^2/(I-1)(J-1)}$$

によって与えられる。この値が自由度（Ｉ－１)，（Ｉ－１)(Ｊ－１）のＦ分布の右端５％点あるいは１％点を越えるなら，a_i の間に差はないという帰無仮説は棄却されることになる。この帰無仮説が正しいのにこれを誤まって棄てる確率はそれぞれ0.05と0.01である。$\tilde{b}_j$ についてのＦ値は

$$F=\frac{\Sigma_i\Sigma_j(y_{.j}-y_{..})^2/(J-1)}{\Sigma_i\Sigma_j(y_{ij}-y_{i.}-y_{.j}+y_{..})^2/(I-1)(J-1)}$$

となる。$\tilde{a}_i$ についての場合とは分子が異なるだけであり，分母は同じである。ここで

$$\sum_i\sum_j(y_{ij}-y_{..})^2=\sum_i\sum_j(y_{i.}-y_{..})^2+\sum_i\sum_j(y_{.j}-y_{..})^2$$
$$+\sum_i\sum_j(y_{ij}-y_{i.}-y_{.j}+y_{..})^2$$

表1　二元配置モデル(2)の分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方
A	$\Sigma_i\Sigma_j(y_{i.}-y_{..})^2=SS_A$	$I-1$	$SS_A/(I-1)$
B	$\Sigma_i\Sigma_j(y_{.j}-y_{..})^2=SS_B$	$J-1$	$SS_B/(J-1)$
誤差	$\Sigma_i\Sigma_j(y_{ij}-y_{i.}-y_{.j}+y_{..})^2=SS_e$	$(I-1)(J-1)$	$SS_e/(I-1)(J-1)$
総計	$\Sigma_i\Sigma_j(y_{ij}-y_{..})^2$	$IJ-1$	

という関係が成立する。このため表1のような分散分析表を作ると容易にF値を求めることができる。まず誤差平方和は総平方和（変動）から他の要因の平方和を引くことにより求めることができる。次にそれをその行の自由度で割るとF値を求めるための分母の部分が得られることになる。分子には各要因の行の平均平方をあてるとよい。また自由度についても総平方和についての自由度は各要因についての自由度の和となる。すなわち，

$$IJ-1=(I-1)+(J-1)+(I-1)(J-1).$$

次に三元配置モデル

(5)　$y_{ijk}=\mu+a_i+b_j+c_k+ab_{ij}+ac_{ik}+bc_{jk}+e_{ijk}$

を考えると分散分析表は表2のようになる。きわめて規則的な形で平方和を計算していくとよいことがわかる。さらに例えば表2の要因Aについての平方和が

(6)　$\sum_i\sum_j(y_{i.}-y_{..})^2=\sum_i\sum_j y_{i.}^2-\sum_i\sum_j y_{..}^2$

表2　三元配置モデル(5)の分散分析表（平均平方の欄は省略）

要因	平方和	自由度
A	$\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k(y_{i..}-y_{...})^2$	$I-1$
B	$\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k(y_{.j.}-y_{...})^2$	$J-1$
AB	$\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k(y_{ij.}-y_{i..}-y_{.j.}+y_{...})^2$	$(I-1)(J-1)$
C	$\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k(y_{..k}-y_{...})^2$	$K-1$
AC	$\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k(y_{i.k}-y_{i..}-y_{..k}+y_{...})^2$	$(I-1)(K-1)$
BC	$\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k(y_{.jk}-y_{.j.}-y_{..k}+y_{...})^2$	$(J-1)(K-1)$
誤差	$\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k(y_{ijk}-y_{ij.}-y_{i.k}-y_{.jk}+y_{i..}+y_{.j.}+y_{..k}-y_{...})^2$	$(I-1)(J-1)(K-1)$
総計	$\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k(y_{ijk}-y_{...})^2$	$IJK-1$

となることを利用してこの右辺の形で，左辺の形でよりも容易に計算を行なうことができるが，桁数の限られている計算機で計算を行なうときは精度の点からいって左辺の形で計算するほうがよい。右辺の形で行なうと被減数と減数の値が近いときに有効桁数が少なくなる恐れがあるからである。なお(6)式の左辺は，

$$\sum_i \sum_j (y_{i.} - y_{..})^2 = J \sum_i (y_{i.} - y_{..})^2$$

となるので，実際にはこの右辺の形で計算することになる。

このような計算は表1あるいは表2の平方和の欄をみるとわかるようにいろいろな平均を適当に組合せて行なう。そのためには各データについてすべての種類の平均を作っておく必要がある。データ y_{ij} については

$y_{i\cdot}$, $y_{\cdot j}$, $y_{\cdot\cdot}$

ですべてであり，y_{ijk} については

$y_{ij\cdot}$, $y_{i\cdot k}$, $y_{i\cdot\cdot}$, $y_{\cdot jk}$, $y_{\cdot j\cdot}$, $y_{\cdot\cdot k}$, $y_{\cdot\cdot\cdot}$

ですべてである。なお添字の数が2のときは3種類の平均が得られ，添字の数が3のときは7種類の平均が得られる。一般に添字の数がNのときは 2^N-1 種類の平均が得られる。

以上，二元配置，三元配置（一般的には多元配置となる）を例にして分散分析のあらましを述べ，分散分析表について検討した。

1） ハマール〔4〕，PP. 162―203 にもとづく。

3．組合せ言語によるプログラム

分散分析表作成のために必要な計算を行なう計算機プログラムには前節で述べたような基本的な多元配置モデルを中心に処理するものとしてハートレイ[1]，さらにハマール[2]によるものがある。本節ではハマールの方法を検討しながら組合せ言語[3]によるプログラムを試みる。表2の平方和を求めるためには全部で7種類の平均を必要としそれらを一つ一つのエリアに納めるとするとインプット・データの分も含めて8個のエリアを必要とする。そして1次元

表3　N＝3のときのインプット・データとすべての平均

エリア	平均の種類	エリアの大きさ
1	y_{ijk}	ＩＪＫ
2	$y_{ij\cdot}$	ＩＪ
3	$y_{i\cdot k}$	ＩＫ
4	$y_{i\cdot\cdot}$	Ｉ
5	$y_{\cdot jk}$	ＪＫ
6	$y_{\cdot j\cdot}$	Ｊ
7	$y_{\cdot\cdot k}$	Ｋ
8	$y_{\cdot\cdot\cdot}$	1

配列ＡＲＲの中に表3のように納めることにする。ハマールの方法ではまず各エリアの大きさを求めて一つの配列に入れておきそれを多くの目的のために用いている。

すなわち平均を求めるためにインプット・データあるいはすでに計算された平均のはいっている一次元配列ＡＲＲのどの要素から何個とびに（ＩＮＣ）何個加える（ＮＰＭ）とよいか，そのようにして計算される種類の平均の内容は全部で何個となるか（ＭＥＡ，エリアの大きさのこと）ということを知る必要があり，ＭＥＡとＩＮＣは各エリアの大きさを入れてある配列で求められる。さらに加えるべき要素のはいっているエリアの最初のロケーション（ＬＯＣ１）と，計算された平均を入れるエリアの最初のロケーション（ＬＯＣ２）も知ることができなければならない[4)]。エリアの大きさはエリア１から順にＩＪＫ，ＩＪ，ＩＫ，Ｉ，ＪＫ，Ｊ，Ｋ，１となっている。最初の四つは最後の四つにＩをかけたものであり，最後の四つの中でもその中の最初の二つは最後の二つにＪをかけたものである。このような規則になっていると添字の数がどんなに増えても同じ方法でエリアの大きさを求めていくことができる。

添字が三つの場合配列Ｑ（一般に大きさは10ぐらいで十分である）を用意してＩ，Ｊ，Ｋの値を入れる。

	1	2	3
Q：	I	J	K

次に $2^3 = 8$ の大きさの配列Rを用意してその最後に1を入れる。

	1	2	3	4	5	6	7	8
R：								1

Q(3)をR(8)に乗てじその結果をR(7)に入れる。

	1	2	3	4	5	6	7	8
R：							K	1

Q(2)をR(8)とR(7)に乗じてその結果をR(6)とR(5)に入れる。

	1	2	3	4	5	6	7	8
R：					JK	J	K	1

Q(1)をR(8)～R(5)に乗じてその結果をR(4)～R(1)に入れる。

	1	2	3	4	5	6	7	8
R：	IJK	IJ	IK	I	JK	J	K	1

以上で終了し配列Rにはいっている数値は表3のエリアの大きさの欄の内容と一致する。

以上の操作をフォトランで表わすと図1のようになる。Nは添字の数，L

```
      LL=1
      LA=2**N
      L1=LA
      R(LA)=1
      DO  1  I=N, 1, -1
      L2=LA
      DO  2  J=1, LL
      L1=L1-1
      R(L1)=R(L2)*Q(I)
      L2=L2-1
2     CONTINUE
      LL=2*LL
1     CONTINUE
```

図1　各平均のエリアの大きさを求めるためのプログラム

1は配列Rに計算された値がはいるときのロケーション，L 2は配列Qの要素を配列Rの要素に乗じるときの配列Rのロケーションを示す。またプログラム中の変数IとJは添字の限界I，Jとは関係がない。このプログラムでの計算経過をトリーで表現すると図2のようになる。各ノードからは二つのリンクが出ており，これは図1のプログラム中の

LL＝2*LL

の行に対応する。

図2における最終結果は図3のトリー表現によっても得ることができる。

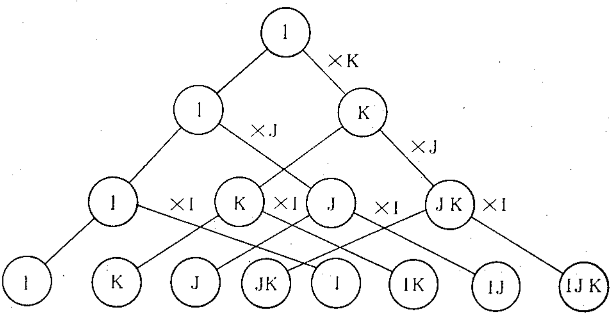


図2　図1のプログラムによる計算経過

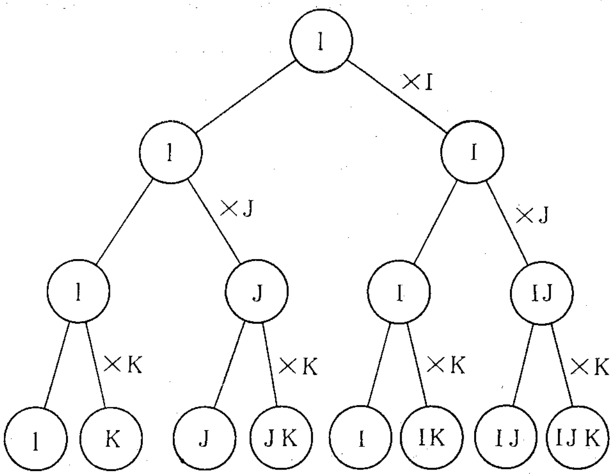


図3　図2と同じ結果をもたらすトリー

```
k = 2³ + 1
for  d1 = 1, Q1 :
     for  d2 = 1, Q2 :
          for  d3 = 1, Q3 :
               k = k − 1
               Rk = d1d2d3
```

図4　図3のトリーに対する組合せ計算言語によるプログラム

```
k = 2^N + 1
with  i = 1  to  N :
 ・
  ・
   for  di = 1, Qi :
    ・
     ・
        k = k − 1
        Rk = d1d2…dN
```

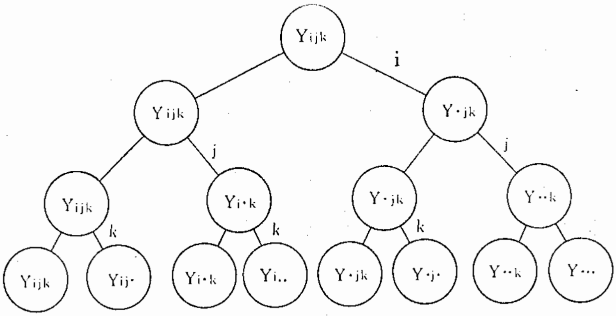
図5　図4のプログラムの一般化

これに対してはウエルズの組合せ計算用の言語を用いることができ，そのプログラムは図4のようになる。Nが3だけでなく他の値もとりうるように一般的に書くと図5のようになる。このプログラムにおいて Q_i は Q(i), R_k は R(k) のことである。図4のプログラムは前の例でのと同じ Q_i を与えられると

$$R_8 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$
$$R_7 = 1 \times 1 \times K = K$$
$$R_6 = 1 \times J \times 1 = J$$
$$R_5 = 1 \times J \times K = JK$$
$$R_4 = I \times 1 \times 1 = I$$
$$R_3 = I \times 1 \times K = IK$$
$$R_2 = I \times J \times 1 = IJ$$
$$R_1 = I \times J \times K = IJK$$

のように計算を行なって，結果も前の例での $R_{(k)}$ と同じになる。

次にすべての平均を求めるため，あらかじめ図6のようなトリーを作る。



	1	2	3	4	5	6	7	8
MEA	IJK	IJ	IK	I	JK	J	K	1
NPM	K	J	K	I	K	J	K	
INC	1	K	1	JK	1	K	1	

図6　すべての平均を求めるためのトリーとMEA，NPM，INCの値

ハマールの方法は平均の計算についても図1のプログラムあるいは図2のトリーと同じ形式をとるのであるが，これに対して図5のプログラムと図3のトリーを新しく考えたように，図6のトリーを作るのである。MEA，NPM，INCの役割はそのまま用いることにするが途中の計算経過が異なるためその数値は異なった値をとることになる。

MEAは配列Rにはいっている値と同じである。NPMとして必要な値を配列Sに入れるとすると，図7のようなプログラムを考えることができる。

```
m = 1
with   i = 1  to N :
 ･･
   for  di = 1 , Qi :
        if  di = Qi :
              Sm = Qi
              m = m + 1
         ･･
```

図7　NPMを配列Sに納めるためのプログラム

```
m = 1
with  i = 1  to  N :
  ⋱
    for  di = 1 , Qi :
       if  di = Qi :
         Tm = 1
         for  j = i  to  N :
            Tm = QjTm
         m = m + 1
       ⋱
```

図８　ＩＮＣを配列Ｔに納めるためのプログラム

```
m = 1
k = 2^N + 1
with  i = 1  to  N :
 ⋱
  for  di = 1 , Qi :
     if  di = Qi :
        Npm = Qi
        Inc = 1
        for  j = i  to  N :
            Inc = QjInc
        m = m + 1
        L = 2^(N-i)
     ⋱
        k = k - 1
        Rk = d1d2…dN
        LOC2 = LOC2 + Rk
        Lm = 0
        for  l = m - L  to  m :
            Lm = Rl + Lm
        LOC1 = LOC2 - Lm
        if  Rk = 1  : reiterate
        heikin (Nmp, Inc, Rk, LOG1, LOC2)
```

図９　平均を計算するために必要なＮＰＭ，ＩＮＣ，ＭＥＡ，ＬＯＣ１，ＬＯＣ２を求めるためのプログラム（ＭＥＡはＲｋにはいる）

ＩＮＣについては図８のようなプログラムによりその値が配列Ｔにはいる。

Ｎ＝３のときは図６に示されるＭＥＡの値が配列Ｒに，ＮＰＭの値が配列Ｓに，ＩＮＣの値が配列Ｔにはいる。これらを用いて平均の計算は図６のトリーの左下のノードから右端のノードにかけて行なわれる。すなわちインプット・データ y_{ijk} は配列ＡＲＲの最初の部分にＩＪＫだけの大きさをエリアとして入れられる。次にそれらについて最初の要素からＩＮＣ＝１個とびにＮＰＭ＝Ｋ個合計し，それをＫで割って配列ＡＲＲの中のまだ使われていない部分に次々と入れていく。次に y_{ijk} の j に関する平均を求める。これは y_{ijk} の最初の要素からＫ個とびにＪ個合計し，Ｊで割ることによって求めていく。なお最初の平均 $y_{ij\cdot}$ はＩＪ個求めることにより完成し，次の平均 $y_{i\cdot j}$ はＩＫ個求めることにより完成する。これらのためのプログラムは，平均そのものについてはハマールの方法を用いることにすると図９のようになり，ＮＰＭ，ＩＮＣは配列に入れておかなくてもよい。以上のようにして組合せの観点から計算を行なうことができる。

1)　ハートレイ〔2〕。
2)　ハマール〔3〕,〔4〕,シュレーター・ハマール〔9〕。
3)　ウエルズ〔11〕。
4)　ハマールの用いる記号はＩＮＣ１，ＭＥＡＳＴ等であるが，ここでは簡略化して用いる。

参考文献

〔1〕 Borts, G. H., and J. L. Stein, Economic Growth in a Free Market, Columbia Univ., 1964.（中川・坂下訳，地域経済の成長理論，勁草書房，1965）

〔2〕 Hartley, H. O., "Analysis of Variance", A. Lalston, H. S. Wilf 編, Mathematical Methods for Digital Computers, 第20章, John Wiley, 1960, pp. 221—230.（久武雅夫監訳，電子計算機のための数学的方法，鹿島出版会，1972, pp. 205—214）

〔3〕 Hemmerle, W. J., "Algebraic Specification of Statistical Models for Analysis of Variance Computations", Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 11, No. 2, 1964, pp. 234—241.

[4] Hemmerle, W. J., Statistical Computations on a Digital Computer, Blaisdell Publishing, 1967.
[5] Klein, L. R., and A. S. Goldberger, An Econometric Model of the United States 1929—1952, North-Holland, 1955.
[6] 増山元三郎，実験計画法，第2版，岩波書店，1972.
[7] Naylor, T. H., Computer Simulation Experiments with Models of Economic Systems, John Wiley, 1971.
[8] Orcut, G. H., M. Greenberger, J. Korbel, and A. M. Rivlin, Microanalysis of Socioeconomic Systems : A Simulation Study, Harper & Row, 1961.
[9] Schlater, J. E., and W. J. Hemmerle, "Statistical Computations Based Upon Algebraically Specified Models", Communications of the Association for Computing Machinery, Vol. 9, No. 12, 1966, pp. 865—869.
[10] 田口玄一，実験計画法，上，下，丸善，1962.
[11] Wells, M. B., Elements of Combinatorial Computing, Pergamon Press, 1971.