HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	購買者行動と確率過程モデル:マルコフ過程モデルを中心として
Author(s)	黒田, 重雄
Citation	北海道大學　經濟學研究, 25(2), 1-58
Issue Date	1975-06
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/31314
Type	bulletin (article)
File Information	25(2)_P1-58.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

購買者行動と確率過程モデル

—— マルコフ過程モデルを中心として ——

黒 田 重 雄

目　　次

1. マーケティング問題における購買者行動
2. 確率過程モデルの適用
2.1 典型的マルコフ過程モデル
2.2 その問題点
3. マルコフ過程モデルの発展
3.1 購買間時間
マルコフ純跳躍過程
セミ・マルコフ過程
3.2 非定常性
3.3 集計の問題（ベクトル・マルコフ過程）
4. マルコフ決定過程
5. マルコフ過程モデル以外の主要な理論（マルコフ過程モデルの批判との関連において）
5.1 線形学習理論
5.2 反復購買モデル
6. 確率過程モデルの一考察
参 考 文 献

1. マーケティング問題における購買者行動

マーケティング研究は,伝統的には，①経済学からの企業理論，②機能的・制度的・商品的アプローチ，③広義における企業と市場との相関関係にみられるマーケティング組織の分析，などからアプローチされている。しかし，これらの研究と経営者が実際に行う意思決定の基準，または経営者的観点と

は，かならずしも連結されていないのが現状である。[1]

企業の立場からするとマーケティング分析が必要な第一の理由は，それがデシジョンメーキングの誤りによる損害を少なくしてくれるということであろうから理論と現実の乖離は未然に防がねばならないわけで，より一層の理論的発展が期待される。こうした点は，今日，組織理論と決定理論と行動理論による新しいマーケティングの理論体系形成へと発展しつつある。[1] すなわち，マネジリアル・マーケティング（managirial marketing）あるいは企業としてのトータル・マーケティング（total marketing）の出現である。[2]

このような理論体系の分析視点は，マーケティングをマーケティング担当の経営者であれ，総括的表現としての購買者[1]であれ，結局，人間が行う選択問題として処理する形をとっている。

このような問題設定がとられるのは，マーケティング問題を他の経営機能における諸問題と区別して考えねばならないということに帰因している。すなわち，マーケティング決定が企業の観点からは，外的で直接的に統制しえない人間行動にかかわるものとなるからである。こうして，近代マーケティングの実践と理論の根底に横たわるべき理念として，生産指向ではなく，消費者（購買者）指向（consumer oriented）あるいは市場指向に企業経営のかじをとるべきであるという観点が生起する。

以上の認識に立って，マーケティング研究者は，今日までのところ，規範的な意思決定モデルの開発あるいは，マーケティング環境を構成する購買者行動，競争者行動，販売者行動を説明し，記述するモデルを開発するべく努力を重ねている。特にマーケティング決定においては購買者行動理論が重視される。

ところで，意思決定者は，購買者行動の情報を具体的にどのような段階で必要とするのであろうか。

チャールズ・ヤンによれば，[3]「まず第一に，市場にあらわれた徴候から問題へと分析が進む段階で，購買者分析が重要になる。[2]

第二に，購買者分析と商品分析が統合的に行なわれる。[3]

第三に，競合分析のきめが細かくなる。[4]」となっている。次に，こうしたさまざまな考察を必要とする購買者行動を記述し，説明し，論ずる方法はどうであろうか，それは大きくわけて，行動科学的アプローチと計量的アプローチの二つになる。行動科学的アプローチは経済学，臨床心理学，実験心理学，社会心理学，社会学の研究成果に従って購買者が現実にいかに購買決定しているかを仮説的な理論モデルとして扱うものである。

一方，計量的アプローチは，実測データとモデルが代表するシステムの論理構造との組合わせを問題にする。このうち本稿では計量モデルにかかわって論じられる。ここにおいて，決定問題が計量的にモデル化されるに際して，その計量モデルが研究者あるいはマーケティング担当経営者の行う適切な情報収集にとって唯一最上の手引きとはいえないまでも，その一つにはなるという前提がとられている。そして，理想的にいえば，彼らが，ある一定の問題に直面したときに，一連の可能な打ち手の中からどれを選択すべきか教えてくれる基になるモデル（あるいはモデル群）すなわち，操作モデルがあらかじめわかっていることが望ましい。

管理科学者達は，このような操作モデルの開発に関する膨大な量の研究を発表している。[66]

ところで，こうした操作モデルの問題展開の中で，計量モデルの解を求める方法も２大別されて考えられている。[68] すなわち，数学解析法（Analytical）と数値解析法（Numerical）（シュミレーション法）とである。数学解析法は，演繹的に解に到達しようとするもので，マーケティング・ミックス・モデルなどがこの範疇に属する。これに対して，数値解析法は帰納的に解に到達しようとする方法である。これは，確率を導入しつつ現実を描写し，種々の代替案の成果を予測する手法で，具体的には，制御できる変数の値をいろいろ変化させて計算し，どの変数値の組合わせが，最善の結果になるかをみつけだすのである。

いずれにしろ，ここ十数年ばかりの間に，経営上の複雑な問題を解くための新しい経営管理手法が，高速度計算機の急速な普及とあいまって開発され

てきた。[5]

これまで，マーケティング分析で使用されてきているモデルとその解法の主なものは，およそ以下のようなものである。[68]

○数理解析（Calculus）

微分概念を適用できる形にし，極大，極小値を求めていく。これは，決定＝静止型モデルであり，宣伝の総予算の決定とその配分を求める問題の例がある。

○線形計画法（Linear Programming）

分析対象における関係を線形で近似的に表現し，最適化をはかる。このタイプのモデルに入る問題の解法は数多くある。変形法として，パラメトリック計画法，ストカスティック計画法，非線形計画法が考えられている。

○動的計画法（Dynamic Programming）

段階的解法を特色とし，決定型，確率型両方のケースがあり，最も制限の少ない配分モデルを解く問題に数多く応用されている。

○クリティカル・パス・メソッド（Critical Path Method）

複雑な活動のスケジュールを作成する場合予定日数の短縮や資源の配分（費用問題を含む）を体系的に考察する方法である。例えば，こうした考えに基づく手順の一つの（PERT）は，新製品の発売とか，宣伝キャンペーンのような不確実性下のマーケティング活動の計画を体系的にとらえる方法を与えている。

○マルコフ・ブランド切替モデル

このモデルは，購買者行動に確率過程論を適用する典型であり，確率＝時間依存型モデルの形をとる。すなわち，マルコフ過程をある問題（例えば，購買者のブランド切替え行動）に適用できるものとの前提に立ち種々の状況の考察を行う。

○シュミレーション・モデル

これは，ビジネス・ゲーム，実験ゲーム，人間のデシジョン過程のモデ

ル化（ヒューリスティック計画法）などの数値解析法の総称である。この方法は，対象とする system を数学的・論理的モデルとして表現し，電子計算機の中に入れてその現象を再現してさまざまな条件下で実験するのをいう。[6] そして，反復的解法の扱い方に特徴があり，例えば，線形計画法のような数式的処理の仕方とは相違している。

シュミレーションのテクニックにおいて重要なのは，モンテカルロ法であり，それによって，確率過程の特性をあらわすものとして「現実の状態」の分布を求める。そして，コンピュータ・シュミレーションでは，[5] 例えば，購買者行動には多くの決定要因が考えられるが，それらの影響する要因を変数としていろいろ動かしてみて，各要因の重要性を評価する。

以上のようなモデルが，如何にマーケティング過程に応用可能であるか，という点については，マーケティングでモデルが実際にどのように応用され成功しているかをみることと意思決定理論として各モデルが共通にもっているモデルのもつ基本的な特性を把握することとに関連していると思われる。[6] 特に後者は，決定理論のメタ理論へとつながっていくものであり，[7][8] そこで，諸モデルの共通の特性が明らかにされつつある。[7]

以上，さまざまなモデルをいくつかの観点から概観した結果，結局マーケティングにおける購買者行動理論のモデル形成過程で確率の概念や確率過程論が重要な役割を演じていることがわかった。[8]

本稿では，これらのモデルを中心として，それらをめぐって展開される諸問題を特に確率過程論との関連に限定して考察することとしたい。

1）消費者
　産業購買機関
　流通購買者（卸売業，小売業など）
　制度的購買者（ホテル，レストラン，病院など）
　総括的表現として「購買者」という。本稿ではこの意味において用語「購買者」を用いる。

2）「生産量や会計上の売上げとは別に購買現場の実勢を反映できるような情報を入

手し分析することが最低限必要になる。消費者は，商品を，いつ，どこで，一回にどのくらい，どのくらいの期間をおいた後で買うのだろうか。

商品を買った後，消費者は生活のどのような場面で，何といっしょに，何の代りに，一回にどのくらい，どのくらいの頻度でその商品を使い消費するのだろうか。

そして，要するに，この商品をよく使う人の特徴的な相貌（プロフィル）はどうなっているのか，逆に，この商品をあまり使わない人は，どんな人か。

消費者分析は，ざっと以上のような問いかけを行ないながら，市場の実情を生き生きと描きだして行く。

そして，さらに，市場の変化の方向を予測する上でも，次のような分析方法を可能にする。すなわち，現在その商品をつかっていない人のうちで，新しく使用をはじめると予測される人の割合や使用量を増やしてあまり使わない層からよく使う層へ移る人の割合をはじく一方，各層の平均使用量の伸びをも織り込んで，市場規模の変化を予測するわけである。」

3)　「企業が送り出す商品は，消費者の要求と欲求を体現したものでなければならない。

商品の基礎的な品質，性能はもちろん，その外形，包装，あるいは価格でさえ，買って使ってもらいたい消費者の意向に沿って定められるべきである。」

4)　「どの点をどう改めたら，新しくその商品を使うようになる人を自社の銘柄へ引き寄せることができるか。

その商品をよく使う人のうちで，圧倒的に人気がないのはなぜか。自分の銘柄を継続している人の平均消費量をあげることはできないか。」

5)　企業経営を定量的に分析するために電子計算機により経営システムのモデルを作成し，経営者が環境変数（自らコントロール不能な変数）や政策（＝計画）変数（コントロール可能な変数）をデータとしてインプットし，ある経営活動をする場合，それが経営にいかなる変化を及ぼすかを実験分析する手法である。[9]

6)　◎　経営計画のモデル

「多要因による損益分岐」モデル

「トータル・システム」モデル（インダストリアル・ダイナミックス）

「回帰モデルによる財務予測」モデル

「長期経営計画シュミレーション＝ HICAP について＝」モデル

「技術進歩予測」モデル

「テクノロジー・アセスメント」モデル

「プラスチック廃棄物＝」モデル

「Four Firm Oligopoly Systems Dynamics」モデル

◎　営業活動のモデル

宣伝効果を扱ったモデル
セールスマンの最適訪問回数を定める問題
セールスマンの給与制度
技術サービス
製品保証政策
訪問販売のための訪問先の選定

◎ 価格政策のモデル
生産財の価格政策問題にベイジアン決定理論の応用
ガス会社の最適な価格計画
競合入札の戦略
会社発行の有価証券の発行価格のつけ方

◎ 製品決定のモデル
候補にあがった製品の数をしぼる「一種のプロフィル」分析
新製品開発の評価にネットワーク・モデルの検討
製品の品質を評価するための行動尺度を用いたモデルを作って現製品の改良および新製品の機能特徴を発見する手引き
モデルチェンジにあたっての新型車のボデー組立工程
基本工程設計のシュミレーション
新製品開発に伴うスケジュールのつくり方その他の活動に対してクリティカルパス法（経理分析，市場実験，パッケージ・デザイン，宣伝キャンペーンの計画などの活動の作業順序）

◎ 流通チャンネル，物的流通，立地問題モデル
流通チャンネル・モデル
各種の配給業者の効率を比較評定する問題に，回帰分析の応用
倉庫の位置を地理的に決めるモデル
敷地をどこにするかの問題（小売りショッピングセンター・スーパーマーケットなどの敷地）

◎ 購買者行動のモデル
マルコフブランドの切替モデル
定常的購買行動モデル
コンピューター・シュミレーションモデル
学習理論による購買者行動モデル
生産財の購入デシジョンや販売業者（たとえば代理店，卸業者，小売業者）による仕入先選択についてのモデル

さらに詳しくは，村田〔66〕p. 93，p. 94 参照のこと。

7) 一方 Ehrenberg〔10〕によれば，根本的にみてモデルの成功を評価する基本は

① 到達された一般化の程度

② 各結果の単純性

の二つになるという。

8) また，有用なモデルの構築の観点からみて，購買者行動の確率モデルを2分するのは，ブランド切替モデルと購買生起モデルとであるという。[11]

2. 確率過程モデルの適用

前章において，購買者行動の研究に対して最近数年間にみられる方法論上の進歩のうち，とくに重要だと思われるものの一つに，マルコフ・ブランド切替モデルがあることをみた。

そして，そこでは，購買者行動に対するモデル・ビルディングとして後に考察する，Howard–Sheth–Amstatz 等の Total System Model や Ehrenberg[10] の定常的購買行動 Model と並んで，重要な確率過程論の応用 Model が考えられている。

これは，もともと，購買者の購買系列を調査観察した結果，ある時間的長さに対してブランド・ロイヤルティ（商標忠実性）が存在するという発見[14]が，契機となり，購買行動の分析に確率的方法を適用しようとする試みに端を発している。

そこでは，購買の時系列が確率的に発生するものとの前提で議論することから確率過程論の問題となる。

2.1 典型的マルコフ過程モデル

確率過程論のうち，ブランド切替モデルへの適用として重要なものが，マルコフ過程である。

ここで言うマルコフ過程とは，単純に言って，確率過程によってつくられると仮定する事象の時間軸上の系列を扱っており，そして，その事象のおこる確率は，一定数のその直前の結果だけに左右されるのであって，それより前の事象には影響されないという前提に立っている。この前提は，一次性といわれている。[48]

またブランド切替え問題の考察は，購買変数すなわち，ある与えられたブ

ランドあるいは製品の購買と反復購買，そして，それらへの切替え（switching）と他のブランドからの切替えの観点からなされる。

こうした問題にマルコフ過程を適用する典型的で簡単な場合を考えてみる。[15] [47] [49]

最も近い購入の機会にブランドｉを購買した個人が，次の機会にブランドｊを購買する確率（推移確率）を測定する。

表１はこの場合の推移確率を仮りに示したものである。

表1　推移確率表

		次の購買 1	2	3 ……	i	j ……	確率の行和
最近の購買	1	P_{11}			⋮	⋮	1
	2				⋮	⋮	1
	3				⋮	⋮	1
	4				⋮	⋮	⋮
	⋮						⋮
	i	……			P_{ii}	P_{ij}	1
	j	……			P_{ji}	P_{ji}	1
	⋮						

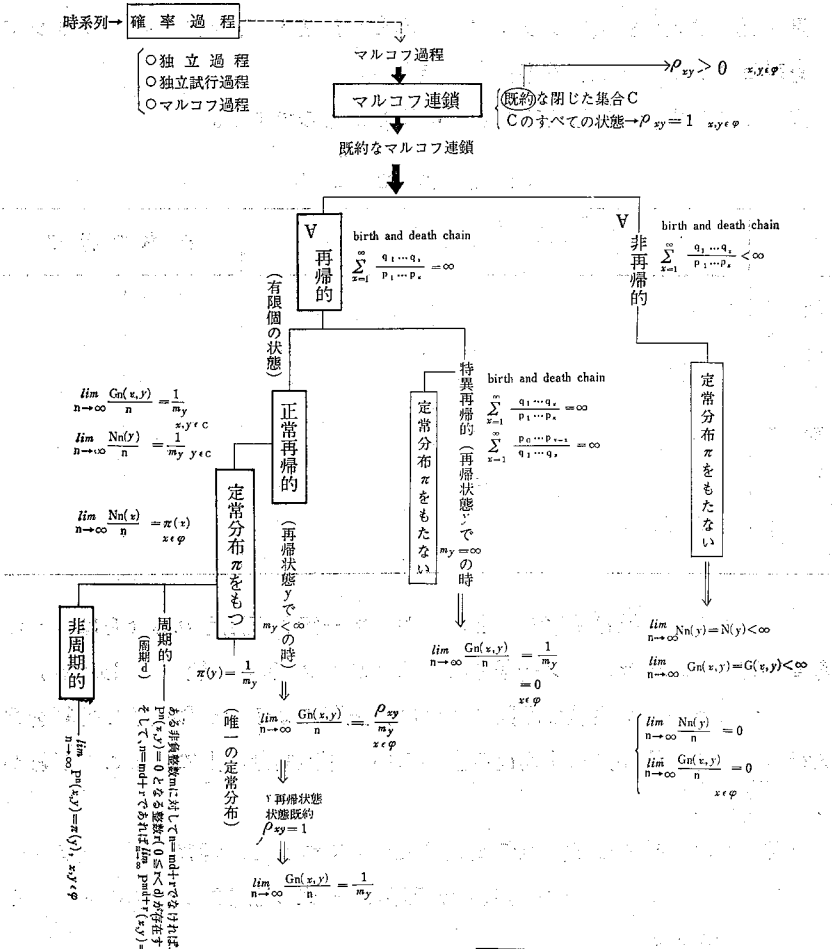
もし，こうした推移確率が，各期において一定を仮定されるならば，その購買系列は，単純マルコフ過程あるいはマルコフ連鎖に従うといわれる。

ここで，マルコフ連鎖の理論によれば，上記のような推移確率の計算を逐次行っていくと最終的に「均衡値」あるいは「定常分布」になることがわかっている。[16] [17] [48]

換言すれば，推移の回数が無限大に近づくにつれて，購買者が，ブランド１，２，３……ｉ，ｊ……を購買する確率は，一組の定常的な値になってくるというのである。

また，こうした定常分布は，一組の線形式を解くことによって得られるものである。

従って，このように単純な前提に立つブランド切替えモデルは，マルコフ連鎖モデルという数学解析的モデルであって，モデル式を「解く」だけでよ


時系列→
確率過程
○独立過程
○独立試行過程
○マルコフ過程
マルコフ過程
マルコフ連鎖
既約な閉じた集合C
Cのすべての状態→ρxy=1 x,y∈φ
ρxy>0 x,y∈φ
既約なマルコフ連鎖
∀ 再帰的
birth and death chain
∑ q1…qx / p1…px =∞
∀ 非再帰的
birth and death chain
∑ q1…qx / p1…px <∞
(有限個の状態)
正常再帰的
lim Gn(x,y)/n = 1/my x,y∈C
lim Nn(y)/n = 1/my y∈C
lim Nn(x)/n = π(x) x∈φ
定常分布πをもつ
非周期的
lim pn(x,y)=π(y), x,y∈φ
周期的
(周期d)
ある非負整数mに対してn=md+rでなければ pn(x,y)=0 となる整数r(0≦r<d)が存在する。そしてn=md+rであれば lim pmd+r(x,y)=dπ(y)
π(y)=1/my
(唯一の定常分布)
lim Gn(x,y)/n = ρxy/my x∈φ
∀ 再帰状態
状態既約
ρxy=1
lim Gn(x,y)/n = 1/my
(再帰状態yで my<∞ の時)
特異再帰的
(再帰状態yで my=∞ の時)
定常分布πをもたない
birth and death chain
∑ q1…qx / p1…px =∞
∑ p0…px-1 / q1…qx =∞
lim Gn(x,y)/n = 1/my = 0 x∈φ
定常分布πをもたない
lim Nn(y)=N(y)<∞
lim Gn(x,y)=G(x,y)<∞
lim Nn(y)/n = 0
lim Gn(x,y)/n = 0 x∈φ
はHowandの完全エルゴード的な場合

いのであり，例えば，推移確率行列の定常性を前提として諸個人の各ブランドのシェアーが将来どうなるかを測定評価する結果がでてくる。[18] その数学的な解釈は流れ図で示されている（図１）。太枠がマルコフ連鎖を適用する際の仮定である。[16]

このマルコフ過程理論は，他の購買行動の分析，例えば，新製品の成功度の測定，店舗忠実性の測定，態度と行動との関係を示すモデル等に用いられている。

こうした，購買者行動にマルコフ過程論を適用することに対して，いくつかの重要な問題が提起されている。[19]

この問題のうちいつくかは次節で議論される。次節における問題展開が，どちらかというとモデルの「想定」に関するものであるに対し，ここでは，「マーケティング努力」に関連して問題を考えてみたい。

企業にとって関心のある問題は，購買者の推移確率を自社のブランドに有利になるように変化させる努力を行うことである。

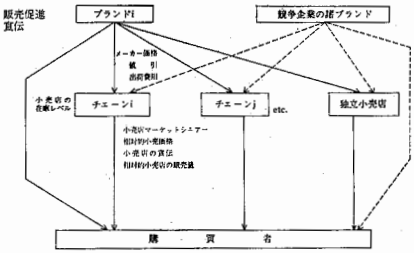
これは，増々自社のブランドの確率を増加させるという「ロイヤルティー（忠実性）」尺度の増大と，他のブランドから自社のブランドへの切替え確率を大きくしたいという「吸引力 attractiveness」尺度の増大の問題ということになる。

ところで，一方において，競争相手の諸企業も同様の問題で努力を払うであろう。

このような諸企業のマーケティング努力による相互作用の結果，購買者の推移行列は変化せざるを得ないであろう。

こうした状況を把握するためと次節の問題点との関連において，簡単なブランドｉのマーケティング・システムを示しておく（図２）。このシステムは，購買者の世界のみに限定されている。

このようなマーケティング・システムを念頭においた場合，現実に近いモデルを作成するには，推移確率行列の変化とそれに与える影響まで計算に入れるべくかなり大幅な拡張が不可欠となる。



R. E. Frank and W. F. Massy, 1965

図2　ブランドiのマーケティング・システム

しかし，推移確率行列が，刻々変化する場合を考察しようとすると，標準的な解析的マルコフ過程（マルコフ連鎖）モデルでは，はなはだ計算が困難である。

以上のような考察から，標準的な解析的モデルであるマルコフ過程モデルは，いわゆる購買者行動，あるいはマーケティング・システム（購買者を中心とした）の本質を把握するという作業には向いていないのだろうか。

この点の議論展開は後にゆずるとして，ここでは，次のような見解をとる立場もあることを紹介するにとどめたい。

すなわち，マルコフ過程による演繹的なモデル構築過程は，現実の個々の購買者の行動を「マルコフ過程」という数学システムでも処理しうるように若干の想定をおくことによって単純化していく過程，であると解釈するものである。[20] [30]

2.2　その問題点

前節にも指摘されたごとく，購買者行動にマルコフ過程を適用する場合，すなわち，いくつか候補にのぼっているマーケティング戦略の中から企業者にとって最適なものを一つ選択するための基本手段としてこれを適用するとなると，マーケティングシステム上の多数の要因を考慮外に置かねばならないことになる。

本節では，こうした考慮外となっている要因を中心に議論してみたい。こ

の点を明らかにすることが，マルコフ過程適用の意味を浮き彫りにすることであるかもしれない。

マルコフ連鎖の適用上の問題点または問題とするべき事項としていつもとりあげられるものを簡単に列記するとおよそ以下のようにまとめられるであろう。

(1). 各購買者の各期における購入ブランドは２つ以上にわたることが多い。したがって購入ブランドの多様性が無視されている。

(2). 購入時点の時間間隔は一定でないのが普通であろうが，この点マルコフ連鎖の適用にかかわる想定では，ある購入と次の購入との時間幅に「指数分布」をおいている。この点は，購買間時間の問題として後に考慮される。[1)]

(3). 購入機会一回毎の購買数量（購買単位数）に多少の変動があることの無視である。これは各ブランドの質，包装サイズの差違とも関連して大きな問題を含んでいるようにも思える。すなわち上記(1)，(2)等へ影響を及ぼすことはもちろん，ひいては，推移確率の変化につながると思われるからである。こうした点の考慮は，Ehrenberg 等の定常購買行動論においてきめこまかく展開されているものである。[2)]

(4). 市場に新しく入ってくる顧客と市場からでていく顧客では，購買行動にいささか相違があるのではないか。

(5). マーケティング努力等によって推移確率行列が変化するというのは，購買者のブランドに対する態度に影響するからで，態度変化と購買行動の関係を明らかにする必要がある。

この点は特に定常性⇨非定常性の問題として後に考察する。

(6). 一般にマルコフ過程適用の想定では，各購買者の推移確率行列を同一とみなしている。各購買者は，もっと異質性を有するものとして規定せねばならないであろう。

(7). マルコフ過程論では，今期の購買は前期の購買のみに依存するものとする一次性を仮定しているが，比較的遠い過去の購買を考慮することはそれほど稀ではない。

(8). 企業にとって関心のある市場におけるブランドのシェアーを問題にする必要がある。もし，各購買者の購買系列がマルコフ連鎖に従うものであるとした場合，その集計された購買系列はどうなるか。これは，「aggregationの問題」として R. A. Howard がとりあげている。この点も後の節でとりあげる。

(9). 市場に新しく登場したブランド（新製品）は，これまで市場に存在していたブランドに少なからず影響を及ぼすにちがいない。新製品それ自体は，消費者革新行動理論などで問題にされている。

(10). 推移確率行列の推定に関するもので，既存の知識を利用しての推定には，いくつかの問題が提起されている。こうした点はある種のベイジアン・アプローチへの移行を示唆するものであるが，ベイジアンそのものの問題点は依然内包されたまま残ることになる。

1) ここで〔11〕による関数の分類をあげる。

(1)と(2)との関係では，

		購買単位数	
		捨象しない	捨象
単位期間の長さ	ヨリ短かくする。	A 非購買，同時重購買	D 非購買，同時重購買
	平均購買頻度にもとづく	B 非購買，複購買，同時重購買，異時購買，重複購買	E 非購買，同時重購買，異時重購買
	ヨリ長くする	C 複購買，同時重購買，異時重購買，重複購買	F 異時重購買，同時重購買

2) そして

(1)と(3)との関係は，

		購買単位数		
		零	単数	複数
購買銘柄数	零	非購買	×	×
	単数	×	モデル	重購買
	複数	×	複購買	重複購買

3.　マルコフ過程モデルの発展

3.1　購買間時間

購買者行動にマルコフ・モデルを適用する場合(例えば，銘柄遷移モデル)，その行動に一定の期間が必要であるという仮定が入っているということは，若干疑問であるという指摘がなされている。すなわち，方法的には時点nという呼び方で，nは整数値をとる場合（離散的）のみを考察しているだけなのでこれは，2.2節の(2)の単位期間の長さの問題を無視するものとなっていた。

したがって，購買間時間を無視した場合，非購買，重購買，複購買，重複購買などの問題が，考慮外になってしまうわけである。[11]

それはもちろん，購買者個人の問題であるが，購買者グループの中の個人間にある購買サイクルの相違と一緒になって複雑性を形成している。

この種の問題の発展方向は，時間の離散性を連続性の仮定にする場合の考察と，そこでの時間間隔分布に対する前提（指数分布）の疑問から一般的な分布へと拡張する（セミ・マルコフ過程）検討に進んでいる。[12]

まず，購買間時間のズレの問題の発展は，時点の離散性を排除することから始まった。

すなわち，購買間時間にランダム性を導入するマルコフ過程の連続パラメータの場合の考察になる。これは方法的には，マルコフ純跳躍過程（Markov Pure Jump Processes）の適用である。

最初にマルコフ純跳躍過程を概観する。これは，大部分文献〔16〕によっている。

マルコフ純跳躍過程

ここでは，X_tの t を連続的に変わりうるものとした上で，X_tがマルコフ性をもつという場合を考える。

購買者が時刻0において Brand x_0 を購入するとする。ここで購買者は，

ある正の時刻 τ_1 まで Brand x_0 のままであり，時刻 τ_1 において，購買者が新しい Brand x_1 （≠ Brand x_0）に変わると仮定する。購買者は永久に Brand x_0 にとどまっていてもよいとする。（ただしこのときは $\tau_1=\infty$ とおく）

τ_1 が有限ならば，x_1 に到達するやいなや，購買者はある時刻 $\tau_2>\tau_1$ まで Brand x_1 にとどまり，時刻 τ_2 で Brand x_2（≠ x_1）に跳ぶ。（購買者が x_1 から動かなければ，$\tau_2=\infty$（$n>m$）とおく。さて，時刻 t における購買者の状態を

$$X(t)=\begin{cases} x_0 & 0\leq t<\tau_1 \\ x_1 & \tau_1\leq t<\tau_2 \\ x_2 & \tau_2\leq t<\tau_3 \\ \vdots & \end{cases}$$

で定義される $X(t)$ で表わす。

このとき，上で定義された過程を跳躍過程 Jump Processes という。

$P_{xy}(t)$ を状態 x から出発した過程が状態 y に入る確率とする。

$$P_{xy}(t)=P_x(X(t)=y)$$

$$\sum_y p_{xy}(t)=1$$

特に

$$P_{xy}(0)=\delta_{xy}$$

また初期分布 $\pi_0(x)$（$x\epsilon\varphi$）に従って初期状態を選ぶことができる。ただし

$$\pi_0(x)\geqq 0 \text{ かつ}$$

$$\sum_x \pi_0(x)=1$$

このとき

$$P(X(t)=y)=\sum_x \pi_0(x)P_{xy}(t)$$

である。

一般に推移関数 $P_{xy}(t)$ を用いて，

$$P\{X(t_1)=x_1,\ \cdots\cdots,\ X(t_n)=x_n\}$$

のような確率を直接計算することは，できない。このとき跳躍過程$X(t)$がマルコフ性，すなわち，

$$0 \leq s_1 \leq \cdots\cdots \leq s_n \leq t$$

および

$$x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n,\ x,\ y \in \varphi$$

に対して

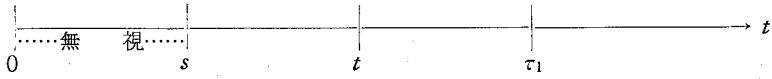
$$P\{X(t)=y \mid X(s_1)=x_1,\ \cdots\cdots,\ X(s_n)=x_n,\ X(s)=x\}$$
$$=P_{xy}(t-s)$$

が成立するとき，計算可能となる。

跳躍過程がマルコフ性を満たすとき，マルコフ跳躍過程という。そして，跳躍過程がマルコフ型になるための必要十分条件は，すべての非吸収状態xに対して，

(1)　$Px(\tau_1>t+s \mid \tau_1>s) = P_x(\tau_1>t)$　　$s,\ t \geq 0$

（状態xから出発するとき，以前の時刻sには（無関係に）依存することなく，前の時刻tのみに依存する。）



である。これはまた(1)式より

$$\frac{P_x(\tau_1>t+s \cdot \tau_1>s)}{P_x(\tau_1>s)}=P_x(\tau_1>t)$$

(2)　$$\frac{P_x(\tau_1>t+s)}{P_x(\tau_1>s)}=P_x(\tau_1>t)$$

ところで，

$$F_x(t)=P_x(\tau_1<t)$$

より　$P_x(\tau_1>t)=1-F_x(t)$

同様に，　$P_x(\tau_1>t+s)=1-F_x(t+s)$

$P_x(\tau_1>s)=1-F_x(s)$

以上より(2)は，

(3) $$\frac{1-F_x(t+s)}{1-F_x(s)}=1-F_x(t)$$

となる。

ところが，分布関数$F(x)$が(3)を満たすための必要十分条件は，この関数が指数分布関数であることである。

よって，跳躍過程がマルコフ型になるための必要十分条件は，すべての非吸収状態xに対してF_xが指数分布関数になることである。

2状態マルコフ連鎖の例として，任意の時点で Brand x_0 か Brand x_1 のどちらかの状態にある購買者を考える。購買者が第n時点に Brand x_0 にいるとき，第$(n+1)$時点の始めに Brand x_1 である確率をλとする。また第n時点の始めに，Brand B で第$n+1$時点の始めに Brand A となる確率をμとする。そして，$\pi_0(0)$を購買者が Brand x_0 を最初に，すなわち第0時点に購入する確率とする。状態0を Brand x_0，状態1を Brand x_1 に対応させる。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix} \end{array}$$

$X(t)$を時点tの Brand の状態を示す確率変数とする。

このとき，この過程は状態空間$\varphi=\{0.1\}$をもつ出生死滅過程の変形と考えられる。すなわち2状態出生死滅過程の仮定

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\lambda_0 & \lambda_0 \\ \mu_1 & 1-\mu_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

において，$\lambda_0=\lambda$，$\mu_1-\mu$とおいたものになっている。ここでは，0と1はともに非吸収状態と仮定されている。

Brand x_0 から出発すれば，購買者はパラメーターλの指数分布に従う時間の間，Brand x_0 のままであり，Brand x_1 の状態から出発すれば，購買者はパラメータμの指数分布に従う時間の間 Brand x_1 のままである。

さて，後向きの方程式を解いてこの過程の推移関数を求める。

後向きの方程式は，

(4)　$P'_{xy}(t)=\sum_{z} q_{xz}P_{zy}(t) \qquad t \geq 0$

とあらわされ，一般に，出生死滅過程に対しては，

(5)　$P'_{xy}(t)=\mu_x P_{x-1,y}(t)-(\lambda_x+\mu_x)P_{xy}(t)+\lambda_x P_{x+1,y}(t) \qquad t \geq 0$

と具体化される。

(5)において，$y=0$ とおけば，

(6)　$P'_{00}(t)=-\lambda P_{00}(t)+\lambda P_{10}(t) \qquad t \geq 0$

(7)　$P'_{10}(t)=\mu P_{00}(t)-\mu P_{10}(t) \qquad t \geq 0$

となる。

(6)から(7)を引くと，

$$P'_{00}(t)-P'_{10}(t)=\frac{d}{dt}\{P_{00}(t)-P_{10}(t)\}=-(\lambda+\mu)\{P_{00}(t)-P_{10}(t)\}$$

よって，時間の関数

$$f'(t)=-\alpha f(t)+g(t), \qquad t \geq 0$$

ならば，

$$f(t)=f(0)e^{-\alpha t}+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}g(s)ds \qquad t \geq 0$$

を適用して，

(8)　$P_{00}(t)-P_{10}(t)=(P_{00}(0)-P_{10}(0))e^{-(\lambda+\mu)t}=e^{-(\lambda+\mu)t}$

ただし，

$P_{00}(t)-P_{10}(t)=f(t)$

$\therefore \quad P_{00}(0)-P_{10}(0)=f(0)$

ところで，$P_{00}(0)=1$，$P_{10}(0)=0$ であるので，また　$\alpha=\lambda+\mu$，$f(0)=1$ を用いた。

さて，(6)より

$$P'_{00}(t)=-\lambda\{P_{00}(t)-P_{10}(t)\}=-\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}$$

となる。したがって，

$$P_{00}(t)=P_{00}(0)+\int_0^t P'_{00}(s)\,ds=1-\int_0^t \lambda e^{-(\lambda+\mu)s}ds$$

$$=1+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[e^{-(\lambda+\mu)s}\right]_0^t=1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\{1-e^{-(\lambda+\mu)t}\}$$

すなわち

(9)　$P_{00}(t)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\qquad t\geq 0$

が得られる。

次に，(8)より，$P_{10}(t)=P_{00}(t)-e^{-(\lambda+\mu)t}$であるので

(10)　$P_{10}(t)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}-\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\qquad t\geq 0$

次に後向きの方程式において，$y=1$とおく（あるいは，1からそれぞれ，$P_{00}(t)$，$P_{10}(t)$を引く）と

(11)　$P_{01}(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}-\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\qquad t\geq 0$

(12)　$P_{11}(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\qquad t\geq 0$

(9)から(12)までを用いると

(13)　$\lim\limits_{t\to+\infty}P_{xy}(t)=\pi(y)$

が成立する。ただし

(14)　$\pi(0)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$，$\pi(1)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

π_0がこの過程の初期分布ならば，(9)，(10)より

$$P(X(t)=0)=\pi_0(0)P_{00}(t)+\{1-\pi_0(0)\}P_{10}(t)$$

$$=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\left(\pi_0(0)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)t}\qquad t\geq 0$$

同様に

$$P(X(t)=1)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\left(\pi_0(0)-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)t}\qquad t\geq 0$$

よって，$P(X(t)=0)$と$P(X(t)=1)$がtに無関係となるための必要十分条件はπ_0が(14)の分布π（定常分布）になることである。

このことは先に考察した，2状態マルコフ連鎖の$n\to\infty$となるときの値に等しくなる。

いいかえると，「連続時点をパラメーターとするコルコフ連鎖とは，状態変化の間隔の長さが指数分布に従い，その分布のパラメーターは，そのときの状態にのみ依存し，かつ状態変化のときにだけ注目すれば離散パラメーターのマルコフ連鎖とみなせるようなものである。

しかし，銘柄転移の問題の場合，このモデルでは，いささか不自然になってくることが多い。[20]」ということになる。

そこで，そういう場合に備えて，次に述べるセミ・マルコフの概念が登場する。

セミ・マルコフ過程

連続パラメーターの場合は，ジャンプの間の時間間隔分布が指数分布をなすことが仮定されていた。これはいささか問題があった。Semi-Markov Process はこうした問題の解決を意図したもので，その考え方は，指数分布というのでなくその分布を一般のものでよいとした点で前者の拡張した形である。

すなわち，このモデルによって記述される過程が，状態の推移系列については，マルコフ的であるけれども，しかしある一時点から，つぎの一時点にかけて，状態が変化する確率については，マルコフ的でないことによる。

セミ・マルコフ過程を一般的な形で述べると次のようになる。[21]

可能な状態は，1，2，……，NのN個とし，現在の状態がiであるときに，次の状態がjになる確率はp_{ij}で与えられ，この確率は過去の状態の推移とは無関係に定まる。

そして，状態iになった時点から，つぎの状態jになるまでの時間間隔τ_{ij}は確率変数であって，その密度関数を$h_{ij}(\tau)$であらわす。

さらに，状態iが次の状態jになり，その次に状態kに変わるとき，iからjに移るまでの時間間隔τ_{ij}とjからkに移るまでの時間間隔τ_{ik}とは独立であるとする。このような確率過程がセミ・マルコフ過程なのである。

セミ・マルコフ過程における状態の推移だけに着目すれば，p_{ij}を推移確率

とするマルコフ連鎖が得られる。

これをセミ・マルコフ過程に埋蔵されたマルコフ連鎖 (imbeded Morkov chain) とよんでいる。

さて，0時点で状態 i にある系が，t 時点で状態 j にある確率を $\Phi_{ij}(t)$ とし，$\Phi_{ij}(t)$ を区間推移確率 (interval transition probability) とよぶことにしよう。

この $\Phi_{ij}(t)$ はつぎの関係式をみたすことが示されている。

$$\Phi_{ii}(t)=1-\sum_{v=1}^{N}p_{iv}\int_0^t h_{iv}(\tau)d\tau+\sum_{v=1}^{N}p_{iv}\int_0^t h_{iv}(\tau)\Phi_{vi}(t-\tau)d\tau \qquad (i=j)$$

$$\Phi_{ij}(t)=\sum_{v=1}^{N}p_{iv}\int_0^t h_{iv}(\tau)\Phi_{vj}(t-\tau)d\tau \qquad (i\neq j)$$

この式によって購買者の銘柄購買系列をセミ・マルコフ過程としてモデル化しようとするさいに直面する第1の問題

推移確率 p_{ij} と持続時間密度関数 $h_{ij}(.)$ をどのように推定するか。

推移確率 p_{ij} の推定は，p_{ij} はすべての購買者について同一と想定し，各購買を分離する区間にかかわりなく，データにおいて Brand i の購買に Brand j の購買がつづく頻度を観察することによって推定される。

つぎに持続密度関数 $h_{ij}(.)$ は，Brand i の購買に Brand j の購買がつづくすべての場合について Brand i と Brand j の購買を分離する時間についてのヒストグラムをつくることによってみいだされる。[11]

セミ・マルコフ過程も，その推移確率が定常である場合の極限分布がわかることが，その理論の現実問題に役立つゆえんであろうから，ある人の購買行動を観察して得た，情報を推移確率に集約して，それにやや遠い将来の Brand のシェアを予測したいところである。

そのためには推移確率が定常であることが要求される。

しかし，現実の問題を観察してその推移確率を知るだけでも大変であり，その定常性を確かめることは更に困難な仕事であろう。

「もし，仮りに，このような定常性が認められたとしても，もう一つ大きな問題は，それは個人間の一様性（購買者大衆間の類似性）である。すなわ

ち，Brand 切替を考えたいということの裏には，広告やいろいろの販売政策をこのまま続けていった時の各 Brand のシェアを知ることによって，いま打つべき有効な政策をみつけたいという希望があるはずである。

とすると，これはその商品を買う全購買者を対象にして眺め，その結果その商品の各 Brand シェアが予測されねばならない。[20]

換言すれば，市場の全体的行動を記述するために個人購買者の行動を相互にどのように関連づけるかということである。

母集団全体についての購買間時間の平均，個人購買者についての購買間時間の平均の分布，そして推移行列の数学的定式化が与えられれば，上式によって市場の行動の記述が可能となる。

R. A. Howard は上式の解法として変換法とコンピュータによる数値解法の２つをすすめている。[11]

さらに Howard は，この連続パラメーターのマルコフ過程とセミ・マルコフ過程を決定過程の問題に適用している。[21]

この外，セミ・マルコフ過程は，最適置換モデル，生産管理問題等に応用されている。[22][23][24][50]

3.2　非定常性

一般にマルコフ連鎖論の長所は定常的推移確率を想定し，そのベキを乗じてゆくという簡潔性とその結果極限値としての定常分布を推定できる点にある。

しかし，現実の購買者のブランド選択の推移状況が時間的に一定であるかどうかは疑問である。

定常性の存在の有無に関して統計的吟味を行った例は，Styan and Smith[26] にみられ，そこでは定常性の存在を確認している。ところが，これに対しては，推移行列の定常性を検討するべく対象となった25期間データに疑義が生じた。すなわち，使用されたデータは，最初から均衡状態にあったもののみであったということである。つまり，「単純マルコフ過程モデルによって算出した各状態の極限分布とそれを算出するための基礎となったデータにおけ

る各状態の分布とは，ほとんどかわらない[11]」のである。

こうした定常性の存在そのものについての検討もたしかに重要ではあるが，もう一方のそしてより有力な見方もありうる。先に述べられていたように，現実の購買者行動は企業側のマーケティング努力によって影響されることが大きい，という観点である。そうであるとすれば，マルコフ過程モデルがより現実的であるためには，このようなマーケティング変数との関連を明確にし，同時に非定常モデルを形成する必要がある。時系列の単なる非定常過程の問題ならば，確率過程としては，例えばウイシャート過程，非定常ポアソン過程等で考えられているが[27][28]，ここでは，非定常マルコフ過程をモデルに導入する場合である。（時系列に対する傾向線のあてはめで，線形回帰を仮定する際，系列に自己相関を想定した時そこにマルコフ性を導入する方法もあるが[29]，ここでは理論前提からして明らかに違うものである。）

ところで購買者行動に非定常性を導入する場合，次の2つの観点から考察することが可能であるという。すなわち，

(1)　非定常的なマルコフ過程をどう記述するか。

(2)　マーケティング努力と非定常性の関係をどう設定するか。

である[11]。

まず，(1)の問題に関して言えば，定常性の想定では，各期における推移確率行列 p の一定性の仮定より，第 n 期のブランド・シェア分布 π_n が

$$\pi_n=\pi_0 p^n \qquad (p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n=p)$$

で求められていた。これがもし，非定常ということであれば，例えば p^n のかわりに

$$\prod_{i=1}^{n} p_i$$

の型の連乗を考えることになる。しかしながら，こうすると定常性の仮定におけるように極限値の推定などを簡潔に達成できる面白味は失なわれるし[30]，それにもまして，推移行列の時間的経過における変化の予測問題が出現してくる。

この種の問題に対する典型的なアプローチの仕方に Pessemier 流の考え方がある。[31]

これは(2)との関連において考察するもので，時間的経過における推移行列の変化を企業のマーケティング努力との対応において把握しようとするものである。

例えば，吉田[30]は，広告キャンペーンの効果を測定する目的にこの考え方を採用している。ただこの場合は，期間を比較的短期間と限定することによって，推移確率行列の変化をとり扱い計算を可能なものとしている。すなわち，企業が新製品を発売するに当り，広告を行う観点から推移確率をいろいろ変えてみて，その間の状況を比較検討してみるわけである。

そして，この検討の際いくつかの内容条件がとり入れられている。例えば，新製品を発売するに当たり，あと戻りするかしないか，比較的速い推移か遅い推移か，ある時点まで広告し途中で広告が打ち切られた場合，偏見がある場合，キャンペーンに分配がある場合等々の各推移確率の差を問題とし，そうした場合の購買行動の立上りや状況を考察するわけである。[32] また特に(2)に関して言えば，この観点はさらに二つの問題にわけて考察することができるという。まず第一に，マーケティング努力とは具体的に何を指しているか，すなわち例えば推移行列の変化をもたらす要因は主要な政策変数と考えられる価格，広告，品質，チャネル等々であるとした場合に，それらの諸要因のうち一つがより強い影響力をもつのか，あるいはそれらの mix か，の問題であり，第二に，これらの政策変数は直接的に影響するかあるいは間接的に（媒介項の存在）影響するか，そして影響に要する時間（過程の時間的次元）はどれほどのものかである。[33]

こうした点のある種の配慮をしたモデルとして，Lipstein の非定常マルコフモデルがある。[34]

Lipstein モデルでは，購買者のブランド切り替え行動を二段階すなわち，(1)現実に行なわれるブランド切り替えと，(2)態度段階における切り替えとで考え，(2)の段階の切り替え（推移）確率に非定常性を導入している点に特徴

がある。

こうしてみてくると，購買者のブランド切り替え行動に非定常マルコフ過程モデルを考える時にも，当然のことながら，マーケティング理論の一般的な諸問題と密接に関連させていかねばならないことがわかる。

3.3　集計の問題（ベクトル・マルコフ過程）

2.1節でも述べたごとく，ブランド切替えモデルにマルコフ過程特にマルコフ連鎖が適用されるときは，典型的には，ある一人の購買者がどのような確率で，種々にブランドへ推移するか，というものであった。しかし，実際には，この点の解釈があいまいになっている。というのは，そのブランド推移確率をして，何パーセントの購買者が，そのブランドを購入しているかを示しているある種のフロー・モデルを想定しているものがあることである。この点は，マーケティング努力との関連で購買者行動を考えている論文には多く見うけられるところである。たしかに，マーケティング管理者の関心は，将来の他社を含めた自社のブランドのシェアである。しかしながらそこへマルコフ連鎖の典型的議論を単線的に結びつけていけないところが問題となる。

このような，マルコフ連鎖適用上の想定と市場におけるブランド・シェアとの関連に Howard は言及し，「ベクトル・マルコフ過程」モデルを提案した。[19]

Howard モデルの特徴を要約してみよう。まずこのモデルの仮定は三つある。

第一に，各購買者は，離散的な一次の定常マルコフ過程（マルコフ連鎖）に従う。第二に，各購買者の行動は，同質的（同一推移確率）である。第三に，各購買者は，独立に行動し，そして購買者間に相互作用はないものとする。[11][35]

この仮定の下に，典型的マルコフ連鎖の適用どおり解釈して，各購買者がマルコフ連鎖に従うとしたならば，そうした購買者の多数を結合（集計）して市場全体のモデルを形成するにはどうしたらよいかを考察する。

具体的にいえばもし，期間Oにおいて，ブランドi（$i=1, 2, \cdots, k$）を購入する初期の購買者がC_{io}である場合に，期間nにおけるブランドiの購買者数C_{in}がどうなるかを求めることである。さらに付け加えれば，期間nにおけるブランドiの購買者数分布の積率を求めたい。すなわち，C_{in}の分布の平均および分散等を得たい。

こうした問題に答えるために以下の想定をおく。期間nにおけるブランドiの購買者数は確率変数であり，初期にブランドiを購入した購買者が期間nでブランドiを購入する確率は，マルコフ連鎖のn段階推移確率の形で与えられ，期間nのブランドiの購買者総数は，成功（すなわちブランドiの購入）確率と試行数（段階数）の2項分布によって与えられるとする。

したがって期間nにおけるブランドjの購買者総数は，これら相互に独立な2項分布のたたみ込みによって計算される。すなわち，

$$P_r[C_{jn}=m]=\mathop{*}_{i=1}^{k} P_r[m \mid C_{io}, P_{ij}(n)$$

ここで，$*$はたたみ込みの記号。

$P_r[m \mid C_{io}, P_{ij}(n)]$はブランド$i$の購入の確率$P_{ij}(n)$をもち$C_{io}$に等しい段階数であるという条件の下での$m$人のブランド$j$の購買者の2項確率

上式では，期間nにおけるブランドjの購買者総数を得るには，各ブランドの初期購買数に等しい段階数とマルコフ連鎖のn段階確率とからなる購入確率をもつk個の異なる2項分布をたたみ込まねばならない。

こうしてHowardは，マーケティング管理者にとって興味のある市場における期間nのブランドiの購買者数分布の積率を求めることを可能にした。

しかし，このような形でなされる「ベクトル・マルコフ過程」モデルに対していくつかの反論が提起されている。そのうち，代表的な二，三のものをとりあげる。

まず，Shethによれば[36]，各購買者は独立に行動することが仮定されているが，革新の普及過程，オピニオンリーダー，準拠集団，危険負担といったよ

うな，人と人との非公式な接触から得られる情報を積極的に求めそして影響された購買者は無視できない存在であるが，そうした購買者は上記の仮定とは合い入れないという。

ただ，このShethの批判の妥当性については，田村が若干の注意をうながしている。[11]

すなわち，まず「購買者間の相互作用関係が，個々の購買者の行動の重要な規定因になるのは，購買者が何らかの新製品に直面して革新行動を要求される情況においてであるが，ところが，一方諸状態がエルゴード集合をなすようなマルコフ過程モデルが主たる対象としているのはこのような購買者の革新行動ではなくて，競争構造の相対的な安定下におかれた購買者行動である」，ということであり，また，「マルコフ過程モデルが一般にモデル化の対象としている購買者集団の特殊性に関連している。マルコフ過程モデルは，一般に直接にその市場における全購買者の行動をそのモデルによって記述しようとしているわけではない。それは購買者が過去に購入したブランドについてのサーベイあるいは継続的な購買者パネルから得られるデータをインプットとしており，そしてこれらが標本抽出によってえられるものである以上，直接的には，これらの全購買者からの標本の行動をそのモデル化の対象としている。

そして，Howardのベクトル・マルコフ過程モデルはまさにこのような標本の行動をモデル化しようとしたものであった。そうである限り，たとえ，母集団において購買者間の相互作用があったとしても，標本をなす購買者間におけるそれはきわめて偶然にしか存在しないことになる。」という二点であった。

「ベクトル・マルコフ過程」モデルに対する他の問題点は，上記のような定式化は，推移行列を推定する問題でなく，ある推移行列の一定の有意水準での存在のテストになっている，ということに対してである。[35]

もう一つの反論は，フランク・モーレイとキューンおよびモリソンらによってなされている。[37] すなわちHowardが同一推移行列をもつ同質的な購買者

群を仮定していることに対して，彼らは，実証データを観察した結果により，この仮定を受け入れ難いとしている。[35][37]

4．マルコフ決定過程

企業のデシジョン・メーキングの過程で，過去の経験とか知識とかが利用できない決定の状況として，たとえば，新製品の市場への導入とか新しい広告媒体の販売促進への利用などがあげられ，このした場面でも，ある行動や戦略が選択されなければならない。

このような場合，逐次決定法が有力な武器の一つと考えられている。[38] ここでいう逐次決定とは，たとえば，1カ月毎に前月の売れ行きの状態に応じて生産量を加減したり，広告方式をかえたり，モデルチェンジしたり等の戦略をとることにし，こうした状態から状態への推移に伴うコストまたは損失を勘案しながら，最も有利な戦略を多段的に決定しようとするものである。[39]

逐次決定法は，Wald の決定理論体系にとり入れられていたベイズ接近が有力なものと考えられているが，ここでは，もう一つの重要な応用の確率過程論的接近をとりあげる。上記の例で，ある日の売れ行き状態から次の月の売れ行き状態への推移の確率が利用可能である場合，それを利用して動態的に最適な決定を行うものとすると，確率過程論的[42]に扱い易い問題となってくる。

時に，推移確率が，その前月の売れ行き状態とそこでなされた政策およびその月（時間）のみに依存するというのであれば，推移の過程がマルコフ過程とみなせるので数学的処理も比較的容易になる。

この点，R. A. Howard が Dynamic Programming とマルコフ過程の問題[18]を論じて以後多くの研究成果が生まれている。

Howard は，はじめ母関数を用いて総期待利得の漸近的な状況を把握し，次いで，そこからある割引率 β（$0<\beta<1$）を考えた場合とそれを考えない場合（$\beta=1$）との完全な解法を明らかにした。その後 D. Blackwell が，離散パラメーターについて母関数を使用しない方法[43]を示している。

以下，Howardを発展させた線上にある，D. J. Whiteに従ってそのアウトラインをみてみる。[44]

初期状態ととられる行動（手段または政策）のみに依存しつつある状態から他の状態へ移る推移確率をもち，有限の状態数よりなる有限マルコフ過程を想定する。そして離散的時間区間nにわたる総期待利得を最大または総期待費用を極小にするためには毎期どのような行動を選択したらよいかを決定する問題を考える。

まず，初期状態iから状態jに移るとき行動kをとるならば，第1期の収益は$r_{ij}{}^k$である。そしてこれは推移確率$p_{ij}{}^k$をもってなされるものとする。

こうして上記の条件の下で以後のn期間で総期待費用を極小化したい。いま，状態iから出発して各期ごとに最善の行動をとったときのn期間にわたる総期待費用を$v_n(i)$とし，これをDynamic Programming[45][46]で定式化すると，通常の漸化式

$$v_n(i)=\min_k[q_i{}^k+\Sigma_j\, p_{ij}{}^k\, v_{n-1}(j)]$$

$$v_1(i)=\min_k[q_i{}^k]$$

ここで $q_i{}^k=\Sigma_j\, p_{ij}{}^k\, r_{ij}{}^k$　　（4・1）

が導かれる。

この式は，任意の有限値nに対しては後向き(backwards)に次々に解いていくことによってもとめられる。しかし，多くの場合nは非常に大きく（すなわち計画期間無限），この時の解がどうなるかが問題である。このような場合には，$n\to\infty$として考えて行く。[21]

いま，

$$v_n(i)\to ng+v(i)+\varepsilon_n(i)$$

と仮定する。ここで$n\to\infty$のとき，$\varepsilon_n(i)\to 0$

これは最適政策に対する推移行列が，regularである場合，すなわち特性方程式

$$|P-\lambda I|=0$$

が1の単根のみをもつときである。

このとき，

$$ng+v(i)+\varepsilon_n(i)=\min_k[q_i^k+\Sigma_j\, p_{ij}^k(n-1)\,g$$
$$+\Sigma_j\, p_{ij}^k\, v(j)+\Sigma_j\, p_{ij}^k\, \varepsilon_{n-1}(j)] \qquad (4\cdot 2)$$

を導く。これから十分大きな n に対して，$g\neq 0$ とすると，

$$g+v(i)=\min_k\,[q_i^k+\Sigma_j\, p_{ij}^k\, v(j)] \qquad (4\cdot 3)$$

が得られる。

R. A. Howard は，（4・3）式を解くアルゴリズムを与えている。その手続きは，次のようなものである。

(1)　初期政策 $\{k_0(i)\}$ を選択する。

(2)　もし，m コの状態があるならば，$v_0(m)=0$ とおいて，$v_0(1)$，$v_0(2)$，……，$v_0(m-1)$ と g_0 を与えて，m コの方程式を解く。すなわち，

$$g_0+v_0(1)=q_1^{k_0(m)}+\Sigma_j\, p_{ij}^{k_0(m)}\, v_0(j)$$
$$g_0+v_0(2)=q_2^{k_0(m)}+\Sigma_j\, p_{2j}^{k_0(m)}\, v_0(j)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$g_0+v_0(m)=q_m^{k_0(m)}+\Sigma_j\, p_{mj}^{k_0(m)}\, v_0(j)$$

(3)　上で計算された $\{v_0(i)\}$ を用いて，i について，

$$q_i^{k_1(i)}+\Sigma_j\, p_{ij}^{k_1(i)}\, v_0(j)$$

を極小にする $k_1(i)$ の値を見い出す。

(4)　この新しい政策 $\{k_1(i)\}$ を用いて，(2)の手続きを繰り返す。こうして過程が収束するまで行う。

このアルゴリズムは，行列 $\{p_{ij}^k\}$ が，完全エルゴード（1に等しい一つの固有値のみをもつ）であれば作用する。なぜならば，その時においてのみ，(2)で解が存在するからである。しかし，もし完全エルゴードの条件が成立しない場合は別のアルゴリズムが必要となる。

Howard は，最適政策が recurrent chain（反復的連鎖）において生じている状況を考え，（4・3）の変形について考察した。

一般に，次のようなアルゴリズムとするものである。

$$v_n(i)\rightarrow ng(i)+v(i)+\varepsilon_n(i) \qquad (4\cdot 4)$$

こうしたアルゴリズムについての見解は，いくつかの問題を残している。

たとえば，$v_n(i)$ の極限形に関する仮定に対してである。これには，特に2つの顕著な問題が附随している。

(1) 方程式（4・1）から直接的に極限形を確立することは困難である。

(2) どんな場合においても，それは，振動するかもしれない（すなわち，$\varepsilon_n(i) \to 0$ でない）。

ここにおいて Howard は本質的に定常状態政策を扱っていたのであり，従ってそれに対して $v_n(i)$ の極限形を分析していたのである。[44]

しかしながら，定常状態政策が最適政策を含むかどうかは明らかになっていない。そうした疑問をあらわす例示が D. J. White によってなされている。

以上の問題点を踏まえて，White は，ある条件の下で用いられるアルゴリズムを考えている。

しかし，これは単に，定常状態政策の推移行列にあてはまるものでなく，単に，一連の行動に対して，有限の段階数で，任意の状態から他の状態へ推移する non-zero の確率が存在するという条件であるにすぎない。

アルゴリズムは以下のような形をとる。

$$V_n(i) = \min_k [q_i{}^k + \Sigma_j\, p_{ij}{}^k\, v_{n-1}(j)] \qquad (4 \cdot 5)$$

ここで

$$g_n = V_n(m),\quad v_n(i) = V_n(i) - g_n$$

$$v_0(i) \equiv 0$$

系列 $\{v_n(i)\}$，$\{g_n\}$ は，Howard の final equation の解に一様に収束する。ここにおいても反復方程式（4・1）より最適政策が得られていないことをみる。この方法の完全な証明は White に与えられている。[44][51]

これまでの検討は，最適政策を求めるためのアルゴリズムのうち，数値決定計算（value determination operation）の問題といわれるもので，他に，

政策改良ルーチン（polity improvement routine）

線形計画法を利用する法――Manne, D' Epenoux 等による――

などがある。[21][52][53]

一方では，購買間時間のときに考察されたように，マルコフ決定過程に，

Semi-Markovを仮定した場合のアルゴリズムも検討されている。[21]

5．マルコフ過程モデル以外の主要な理論

5.1　線形学習理論

購買者（消費者）行動の研究上の傾向は，大きく二つに分けられる。購買者が現実にどう行動するかという点を量的詳細さにおいて理解しようとする立場と購買者がなぜそうした行動をとるかを説明する立場である。

この説明的接近（"explanatory" approach）のもっとも発展したものの一つは，おそらく Howard-Sheth 理論〔12〕〔13〕〔62〕であろう。購買者行動の Howard-Sheth モデルは購買者のブランド選択行動を全体的，包括的に説明する学習理論を主体にした一般的モデルであり，言語モデルである〔63〕。

この種の理論は，以後も多くの研究を生んできている。[1)]

しかし，一方において，Ehrenberg 等は，若干批判的立場をとっている。〔10〕〔64〕

すなわち，いかに諸仮定が明らかにされたといっても，このような言語モデル的諸理論が購買者行動のある一般的な知識を含んでいるかどうか，また，用いられた分析技術が現実の分析に適合するかどうかは明らかでない，という考えである。ただ，Ehrenberg は，購入頻度とブランド選択の観点からではあるが，経験的に購買者行動を調べた結果，Howard-Sheth 流の諸理論は瞬間的な行動可能性を示す場合に適切である，と述べている。

一方，量的詳細さにおいて購買者行動を理解しようとする立場は，また，方法論的にみて種々分類されるようである。これらは，学習理論や，経済理論や定常的購買者行動理論（Ehrenberg 等）などにわたっている。定常的購買者行動理論については次節で考えるとして本節では，学習理論と確率過程の関係という観点で考察する。

経済理論においても消費関数論争の中に習慣形成理論があって学習についての重要性を強調しているが，実際に学習が具体的にどのようになされるかという点はかならずしも明らかにされていない。この点，単純化された状況ではあるが，学習についての実験がいろいろ行なわれている。そうした様々

な実験結果を観察してみると偶然誤差といわないまでも，どうにも説明できない変動が生じているという。こうした説明不能の変動の存在を勘案すると学習モデルを構成するときには決定論的な立場に立ちうることも確かであるが，確率論的な立場に立つことの妥当性が大きいようである。[54]

以下，学習理論を確率論的モデルに限定して考察する。学習過程を確率論的な観点で（すなわち，確率過程として）モデル化する場合，いくつかの考え方および，そうした諸モデルの精緻化がある。

代表的モデルとして，漸増モデル（incremental model），悉無モデル(all-or-none model)，ランダム試行増分モデル（random-trial increments model)，多段階学習モデル，誤反応排除モデル（error-elimination model）等があげられている。[54]

このうち，まず悉無モデルが最も簡単な確率過程＝マルコフ連鎖を仮定している。

この学習モデルでは，学習過程にあってまったく学習していない状態$\overline{C}$と完全に学習した状態Cとの二つの状態のみの想定を行い，その推移行列を次のようなものと考えている。

$$
\begin{array}{c|cc}
n \backslash n+1 & C & \overline{C} \\
\hline
C & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1-c \end{pmatrix}} \\
\overline{C} &
\end{array}
$$

ここでは，状態Cは吸収状態であり，状態$\overline{C}$から次の段階で状態Cへの推移確率は，cとなっている。

このモデルは，モデルの構造が簡単であるので種々の統計量（学習完成までの総誤数，初発生反応の生起試行，最終誤反応の生起試行）の分布を導くことを可能にしている。

一方において悉無モデルでは，〔2.2〕節でもとりあげたように，マルコフ連鎖の仮定の定常性の問題が浮かび上がっている。ここでもモデルの吟味から非定常性が残っている。

次にこの種のモデルを一般化ないし拡張するモデルとして，ランダム試行増分モデルや多段階学習モデルが提案された。

たとえば，多段階学習モデルでは，悉無モデルの拡張として，$\overline{C}$とCの中間にいくつかの学習段階（不完全学習状態）をもつマルコフ連鎖を考える。中間の学習状態C'をひとつだけを想定する推移確率行列は以下のようなものである。

$$
\begin{array}{c|ccc}
n \backslash n+1 & C & C' & \overline{C} \\
\hline
C & 1 & 0 & 0 \\
C' & b & 1-b & 0 \\
\overline{C} & 0 & a & 1-a
\end{array}
$$

以上のモデルを購買者行動の学習モデルと考えれば，ブランド切替モデルにマルコフ過程を適用した状況と同一である。

ところで，購買者行動を学習理論的に考察する場合は，もう少し立ち入った検討が必要とされている。すなわち，マルコフ過程モデルでは，ある時点での購買者のブランド選択は直前の経験（状態）によってのみ規定されるものと想定されている。[30][60] したがってもし，ブランド切替が過去数時点の経験（状態）に影響されて生じると仮定するならば違った観点から問題を処理せねばならなくなる。

こうした点の一つの解決法は，線形学習モデルを利用することである。[3]

線形学習モデルは，もともとブランド・ロイヤルティの測定に対して一次の定常マルコフ過程＝マルコフ連鎖が適当であるかどうかの疑念から出発して開発されたモデルである。

〔14〕，〔36〕，〔55〕，〔56〕等によって，理論的実証的に研究されてきている。

このようなモデルは結局のところ，過去の経験を集約して表現しようとしている（たとえば，受容作用線と拒否作用線によって）ことはもちろん，そこでの学習過程が均衡状態に向かっていくこととマーケットシェアが予測できるようにすることを目論んでいる。

このような学習モデルは，生まれた状況からして，学習効果を処理する上で，確率過程論を応用するブランド切替モデル（たとえば，マルコフ連鎖モデル）よりすぐれたモデルと考えられるが，ここにもいくつかの問題点が指摘されていた。[35]

たとえば，(1) あるブランドの購買確率のみが示されているが，他のブランドの購買確率への波及効果を不問にしている。(2) 特定ブランドの購買は常にその反復購買確率（Repeat-Buying Probability）を増加させると仮定している点について，それが仮定できるのは，ある種の商品に限定されるのではないか，すなわち，反復購買確率を高めるのは，特定な商品（コーヒー，ジュース）の独特な性質とそこで作用する購買者の心理的要因に依存して決まるのではないか。(3) 購買確率に，マーケティング・ミックスのバリエーションが及ぼす効果を検討していない。

このような Kuehn 等に対する批判は，その後も線形学習モデルの発展の中で次第に解決されてきているようにみえる。一つは，Kuehn 自らが示したデータによる支持であり，他は，W. F. Massy その他による方法論上の発展である。[47] 後者の点はさらに以下の人達によって理論的に精緻化されてきている。[61]

Norman は数学的厳密性を心ざし，具体的には，マルコフ過程との関連において，"Fine-Operator Linear Model", "Fixed Sample Size Model", 等々のモデルを提起している。[57]

また，G. L. Lilien は，価格の刺激（Pricing Stimuli）の反応を考慮して，過去の購入行動と市場における価格変動の結合したもので購買者の購買確率を修正した線形学習モデルを考察している。[58]

前者との関連では，阿部が，Kuehn の結果を修正したデータを用いて母数の推定を行う幾通りかの方法を考え，それによる計算事例を明らかにした。[59] しかし，この点はパネル形式のデータがあれば，一層有効となるということを強調しなければならない。

1) Howard-Sheth (1969)

消費者行動の全く多くの直観的理論のうちの唯一のものであり，いく分かは verbal で いく分かはより数学的である。

marketing behavioral point of view	→ largely verbal theories of buyer behavior	Engel et al (1968) Ehrenberg and Pyatt (1970) Kollat et al (1970) Robertson (1970) Walters and Paul (1970) Holloway et al (1971) Kotler (1967)	texts and Readings on marketing and Consumer behavior

Ferber (1962)　　Economics

経済学においてさまざまな，多かれ少なかれ古典的消費者理論の review

Nicosia (1966)

消費者決定過程のより数学的定式化の例

Amstutz (1967)

マーケティングの分野においてもっともよく知られたコンピュータに基づかれたシュミレーション手法

King (1967)

マーケティング問題への量的 "management Science" 接近

Montgomery and Urban (1969, 1970)

〃

Simon and Freimer (1970)

〃

5.2　反復購買（定常的購買者行動）モデル

第1章(注8)で，購買者行動の確率モデルを2分するモデルは，ブランド切替モデルと購買生起モデルであると述べたが，ここでは後者のモデルについて考える。その代表的なものは，Ehrenberg 等が提起するモデルである。[10]

Ehrenberg は，しばしば買われる brand のついた商品の反復購買を扱う。そして，購買者の観察された反復購買に規則性が生起していることを強調する。そこで，実際に起っている規則性を説明し，そして相互関係づけられる理論的なフォーミュレーションを導入し，諸結果の実際的な適用を明らかにする。

用いられた接近は，特定の時間期間において，ある与えられた brand を

購入する個々の購買者の購買数（購買頻度）の分析である。

そして，主要なモデルビルディングの特徴は，ある時間期間から次の期間までそのブランドの集計された購入水準において変化がないという，定常的な状態に関してである。

この前提により，単純で，さらに高度に一般化可能な諸結果へと導くとしている。

すなわち，定常的な状態というのは，大部分の市場および大部分のブランドに対して最も普通のことであると考える。それはまた，たまたま起っているかもしれないマーケティングのインプットにおける変化，例えば，価格の変化，広告の変化あるいは配給の変化等々の変化がそのブランドの販売に純効果をもたなかったこと，そしてその分析に入ってこなかったことを意味している。

この定常的な状態を表わす様子は表2のようなものである。

表2　4週間期間において集計された購買データ

	購買数				Total
	期間1	期間2	期間3	その他	
第1の購買者	非購買	3A	2A，1B	—	5A，1B
第2の購買者	3A	非購買	非購買	—	3A
第3の購買者	1B	1B	1A	—	1A，2B
その他	—	—	—		
Total	3A，1B	3A，1B	3A，1B		9A，3B

このような場合は，購買者間では，Brand の種類および，Total な購買数量に差違がでているが，各期毎の購買者の Total な各 Brand の購買数量には変化がない。

そして規則性がどのようになっているかを実際のデータから検討する。

それは，さまざまな時間期間（1週間から半年まで），連合王国あるいはアメリカ合衆国におけるさまざまな資料，1951年から1963年までの時点，そしてさまざまなブランドにわたっている，約1万3千人の標本を用いている。

そのうち，20個の事例について問題を展開している（表３）。

そしてそこに６つの主要な規則性を見い出している。

(1)．反復購買者は，45％から94％まで次第に増加する販売のパーセンテージを考えている。それ故に，それはwの値を増加させるのである。すなわち，購買者当りの平均購入頻度が高くなればなるほど，問題のパーセンテージがより高くなる。

(2)．ある期間において，少くとも２個の購入（すなわち$r=2$）をする購買者による販売のパーセンテージは，表より41％から48％まで正確に増加している。それ故に，それはまた直接的にwに関連されている。

(3)．２つの議論されたパーセンテージは，少くとも２個の購入をする購買者による販売のパーセンテージであるが，そしてまた反復購買者によるものであるが，それは３％の平均的な範囲内においての値であり，大部分近似値となっている。これはまた，もうひとつの非常に単純な規則性になっている。

(4)．分析期間に於て，少くとも３個の購入をなしたところ３の購買者によってなされた販売のパーセンテージもまた，wの増加とともに，増大する傾向がある。さらに一層の重購買者にもそれが起っている。

(5)．rの相対的に高い値に対しては，ある分析期間に於て，たとえば週の数よりも大きいか，またはそれに等しい値に対して(4)におけるパターンからの乖離が，時々起こる。そのような観察された値が，カッコで示されている。

(6)．ある分析期間において，新しい購買者当りの平均購入数は，1.5単位ほどである。この購入率は，多かれ少なかれ一定であるようにみえるし，非常に単純な結果であるようにみえる。

こうして Ehrenberg は，反復購買理論へと進む。以下 Ehrenbrg 理論の要約を行う。

まず第一に表３によって起ってくる自然の疑問はなぜそのパターンが生じるかということであろう。

ところで反復購買の状況は，実際には，諸要因の大きな多様性に依存しているということが考えられるかもしれない。

表3　前期からの反復購買者と与えられた期において r 個購入した消費者による総販売高の割合および他の観察された統計量

製品	Brand	時と場所	一購買者あたりの平均購買数 w	販売高の 反復購買者	少くとも r 個購 2	3	4	6
粉石けん	A	Midl. '65	1.3	45	41	21		
被服	B	U.K. '65	1.4	55	54	17	8	3
粉	C	U.S. '51	1.8	65	67	41	41	13
洗剤	D	Lancs. '63	1.8	69	72	39	25	
粉石けん	A	Midl. '65	1.9	*	67	53	29	16
洗剤	E	Lancs. '63	2.2	83	81	59	40	(6)
粉石けん	F	Midl. '65	2.5	82	78	70	58	38
飲料	G	U.K. '55	2.6	76	81	68	55	39
洗剤	H	Lancs. '63	2.9	84	88	80	54	(27)
燃料	I	U.K. '66	3.1	85	89	78	63	(36)
飲料	G	U.K. '53	3.3	*	87	76	65	49
洗剤	D	Lancs. '63	3.3	78	88	74	67	48
粉石けん	F	Midl. '65	3.8	*	88	82	74	56
粉石けん	J	U.S. '51	3.9	89	90	82	67	62
マーガリン	K	U.S. '51	3.9	87	91	84	72	72
石けん	L	U.K. '58	4.7	*	94	87	82	71
洗剤	D	Lancs. '63	4.7	93	94	89	84	67
粉	I	U.K. '66	4.8	*	94	88	84	69
洗剤	H	Lancs. '63	6.2	94	96	93	90	86
洗剤	H	Lancs. '63	10.1	*	98	95	93	91

* 前期情報なし　　** 販売高水準の純効果なし，すなわち定常的

割合 入する購買者 8	12	16	20	新規購買者あたりの平均購入数	購買者数（標本の%として）	販売高：100人の回答者あたり購入数	分析期間（週）	他のブランドの購買	マーケティング活動
				1.2	2	3	12		
				1.5	45	63	1		
				1.6	21	36	13		
				1.3	8	14	4	N	N
				*	4	8	24	O	O
								T	T
				1.3	21	45	4		
19				1.3	4	10	12	S	S
29	19	2		1.6	15	38	13	P	P
(27)				1.6	14	40	4	E	E
(21)	(6)	(4)		1.8	27	85	4	C	C
								I	I
37	22	14	11	*	19	63	26	F	F
38	(18)			1.7	13	43	12	I	I
46	32	17		*	5	19	24	E	E
46	33			1.5	16	65	13	D	D**
53	33	33	15	1.8	26	100	13		
63	50	38	30	*	14	66	26		
55	(20)	(3)		1.6	30	140	12		
58	(32)	(15)	(8)	*	46	221	8		
75	47	(26)	(26)	1.7	18	108	12		
87	77	64	49	*	22	219	24		

例えば，次のようなものがある。現在，あるいは過去のマーケティングの活動，すなわち広告，消費者促進，配給，価格づけ等々といったようなもの，それから，問題のブランドと製品分野の性格，ブランドの販売水準あるいはマーケットのシエア，ブランドの浸透水準，購買者1人当りの購買の平均率，分析された時期の長さ，競争的なブランドに対する購入パターン，製品クラスにおけるブランド切替えの一般的な程度，ブランドへの消費者の態度，主要な習慣，そしてデータに帰するところの特定な時間と国あるいは地域のようなまったく特定な諸要因といったものである。

しかしながら，表3は定常的な購買行動の規則的なパターンが存在するということのみならず，また問題の値の変動が大きくひとつの単純な測度の購買者1人当りの購入の平均率wによって説明されることができる。あるいはwから予測されることができるということをも説明しているのである。すなわちすべての反復購買の指標はwがそうであったように任意の列において，その数字を読んでいくと増加する傾向があったということである。

そしてこのパターンは，表3におけるデータの特定な選択に対して一致したばかりではなく，また他の場合の数千例において一般的にみい出されたのであった。

上で述べられた他の諸要因，たとえばこの様なブランドあるいは製品そして分析期間の長さ等々といったものは，その諸結果に関して，ほとんど明白な関係を持たないか，あるいは全く関係ないということになる。これはある理論的な考察，あるいは仮説的な仮定の結果ではなくて表3で示されているように経験的な観察と分析の直線的な事柄なのである。数学的な分析がこれまで必要とはされていなかった。これらのパターンが単純に存在しているということにおいて必要ではなかったからである。そしてそれらパターンが，上記の様に観察することができる。この発見の重要性は，これが経験的に確立されていたということにおいて，様々な状態の広い範囲に及んでいるのである。

これらの諸関係の量的な詳細を描くために，ある都合のよい数学的な式で

おのおのの規則性をモデル化する必要がある。

その諸式は単にwすなわち購買者当りの購買の平均頻度を含むところの一般的な反復購買理論のある特定な変型からすべてが導びかれるのである。この理論を適用する為に，ひとつの相対的に複雑なステップを持って始めなければならない。すなわち新しい量であるqを計算するという必要である。これは，直接的にwすなわち購買者当りの購入の平均頻度に関連されている。表3はwのいろいろな値の一つの選択に対してqの数値的な値を与えている。かくして，$w=1.3$に対して，それは表3の第1列にブランドAに対して観察されているものであるが，qは約0.40である。おのおの観察されたwに対応するqの値を与えて，そこには，6つの経験的な結果に対応する6つの理論的な式がでてくる。表3に対して注目されたところの6つの経験的な結果に対してである。しかし，その式はそれ自身非常に単純なものである。

(1). 最初に，反復購買者によって考えられた総販売高の割合に対する式である。これは簡単にqである。あるいはまた，パーセンテージで表わして100qでもある。かくして表に於けるブランドAの様な項目に対して，それは$w=1.3$そしてこれから$q=0.4$の様な項目に対しては，前の期からの反復購買者は理論的にみて，現在の期における総販売高の0.4または40％を考えていることになる。このことは，45％の観察された値と比較されるかもしれない。一般に，これらの理論的な推定値は表3における反復購買者によって，考慮されている3％のポイントの平均内における販売高の割合に対しての観察された値にフイットしているのである。

(2). 次に与えられた時間期間において少くとも2つの購入をしたところの購買者によって考慮された販売高の割合である。これに対する理論的な推定値もまたqである。表において，観察された数字それは$r=2$の列であるが，それに対する適合は2％の平均内にあるのである。

(3). これら2つの式の両方とも値qをとる。そしてそれ故に，反復購買者によって考えられた販売高のパーセンテージが，理論的には，一回以上の購

買者によって，考えられたものに等しいと言うことができる。このことは，3％の平均内に於て表3で観察されたデータによってそうであることが，見い出されたのである。

(4). その期間に於て，少くとも r 個の購入をするところの購買者によって考えられた販売高の割合に対する理論式は，q^{r-1} である。これは，(2)における式 q に対応するより一般的な結果である。すなわち $r=2$ の時の q^{r-1} ということになる。この式は，3％の point の平均内で表3に与えられたすべての観察値に対してあてはまっている。それは，かっこの値に対して以外はすべてである。

(5). 表3におけるかっこの値は項目4におけるパターンの例外である。これらのかっこのついた値は，q^{r-1} よりも低いということを示している。その結果理論的な値は，それ自身系統的であるようなこの特定なサブパターンを示しているのである。

(6). 最後に我々は，新しい購買者当りの購入の平均頻度に対する理論式を持つ。これに対する理論式は

$$\frac{q}{\log e\,(1+q)}$$

である。この式の数値的な値は w が約2よりも大きいとき q の様々な値に対して，ほとんど変動を示さない。その結果，新しい購買者の購入の理論的な平均頻度は1.4という本質的に一定な値のような型をとることになる。これは約0.2の平均内で表における観察された値に一致しているのである。

これらの理論式の重要性は三重の意味がある。

まず第一に，それらが非常によい近似の密接さに観察結果を描いていることである。すなわち表におけるおのおのの項目の w の観察された値に対して表における与えられた q の値を用いることによって詳細にかつすみやかにチェックすることができるようにである。

第二番目に，その式は非常に単純なものである。w すなわち，すべての購買者において観察された購入の平均頻度であるが，それによって，それ自身

uniquely に決定されているところの一つの単純な統計量 q に関して，それらが，すべて変化するといった様に非常に単純なものである。

第三に，それらはデータの様々な集りに対して単純に最善のフィットをするという孤立化された式ではなく，すべて相互関係におかれているのである。このことは量 q の観点において，それらの共通な式から明らかである。そして式がとられるところのＬＳＤ理論において明らかにされたものである。定常状態のもとでの反復購買の多くの付加的な見解はＬＳＤ理論から，そしてより一般的なＮＢＤ理論から演繹されることができる。実例が，反復購買者の数に対して購入の平均頻度に対して，新しい購買者の数（すなわち上の(6)において与えられたものであるが，平均購入頻度は

$$\frac{q}{\log e\,(1+q)}$$

というものである。）等々に対する式がのっている。

ＮＢＤ（Negative Binomial Distribution）理論

負の２項分布を消費者購買データへあてはめることにおいて，よいあてはまりが定常的な場合において得られていた。すなわち，そこでは総販売水準におけるいちじるしいトレンドがないということである。ある典型的な例が，最も初期に分析されたデータから得られており，表に示されていた。ゼロの数字と対応する観察された値に理論的な分布の平均を等しくすることによって通常あるようなあてはまりがあったのである。この場合におけるあてはまりは目で見て明らかなように一致的なものであった。適合の要約的な測度は，観察されたものと理論的な分布2.12と2.05の標準偏差を比較することによって得られている。広く異った特性を持つさらに数千の場合において，表４に要約されているように適切に，分析されているのである。いくつかの最近の例が示されている。そこでは，たしかに観察されたものと理論的な度数との間には，ある一定の乖離が議論されていたのであるが，一般に観察された購入データへの理論的なＮＢＤの適合はよいようである（表５）。特別な例外が起っているいくつかは，すでに最も初期の研究において注目されていたし，

表4　購入データへのＮＢＤの適合例

（200世帯の26週間データ）

購入数	世帯数 観察値	世帯数 理論値	購入数	世帯数 観察値	世帯数 理論値
0	1,612	(1,612)*	7	12	11
1	164	157	8	5	8
2	71	74	9	7	6
3	47	44	10	6	5
4	28	29			
5	17	20	11—15	11	12
			16+	8**	7
6	12	15			

非購買者の割合：$p_0=.806$*
購買者の割合：　$b=1-p_0=.194$
世帯あたりの平均購入数：　$m=0.64$*
購買者あたりの平均購入数：$w=m/b=3.3$
負の２項指数：$k=0.115$,　$a=m/k=5.56$
標準偏差：観察値＝2.12
　　理論値＝2.05
*理論的分布に適合するべく使用された。
**現実値：17，17，20，22，22，25，26，26

参考文献〔10〕

分析単位における週の数にあるいは近くにむらがる傾向を含んでいる。このことは，最小の購入間期間の堅持であろう。かくして，せいぜい週一度買われる傾向がある製品に対しては26週間期間において26回以上買うという数は，理論的な値よりも小さいのである。そこでは，週に一度のラフなサイクルに対して彼らの購入を規則化することを人々に提供される超過量に対しての何かがある。しかしこの効果は単に週に一度購入する購入者の数が知覚できうるところの製品に対して示されていたものである。より多く購入する購入者（重購買者）が少いということは結局理論的なＮＢＤの標準偏差に対して観察された分布の標準偏差あるいは分散に対して，より低い値へと導くのである。これは，分散乖離と呼ばれている。そこに又，その適合が今だ完全に理解されていないという点で，よくわからないいくつかの製品がある。本質的にこのことは多分，パンとかタバコとかミルクとか，あるいはある場合にお

表5　2項分布が一般にその下で適合した諸状態

——製品分野の多様性，すなわち，
Breakfast Cereals, Butter, Canned Vegetables, Cat and Dog Foods, Cocoa, Coffee, Confectionery, Convenience Foods, Cooking Fats, Detergents, Disinbectants Flour, Food Drinks, Household Soaps, Household Cleaners, Instant Potatoes, Jams and Marmalade, Margarine, Motor Oil, Petrol, Polishes, Processed Cheese, Refrigerated Dough, Sausages, Shampoos, Soft Drinks, Soup, Take-home Beer, Toilet Paper, Toilet Soap.
——各製品分野の先導的 Brand
——大•中•小のパックサイズと全体としての Brand
——大英帝国，ヨーロッパ大陸，アメリカ合衆国
——1950—1970
——様々な人口的サブ・グループ
——1週間から12カ月までの範囲におよぶ分析期間

参考文献〔10〕

いては総製品クラスのような特に規則的に購買された項目にあてはまるように見える。各々のブランドや，パック・サイズがよい適合を与えるときでさえも，そうである。

表6　任意に与えられた期間におけるNBDを得る時間に関しての確率的モデル

消費者	時間期間						長期平均	個々の消費者の購買数分布 (horizontally)
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	•	•		
a	x	x	x	x	x	x	μ_a	Poisson
b	x	x	x	x	x	x	μ_b	Poisson
c	x	x	x	x	x	x	μ_c	Poisson
d	x	x	x	x	x	x	μ_d	Poisson
•	x	x	x	x	x	x	μ	Poisson
•	x	x	x	x	x	x	μ	Poisson
xの平均 $E[x]$	m	m	m	m	m	m	m	
分布 (vertically)	NBD	NBD	NBD	NBD	NBD	NBD	Gamma	

注意　表中のxは，観察された購買数であり，種々の値をとるわけで，値が等しいことを意味するものではない。

これまでの分析を踏まえて，ＮＢＤモデルの基本的な構造を考えた場合表6のように想定される。

表6の具体的な意味は，次のように要約される。

(1) 継起的な諸期間においてなんらかの特定の購買者の（個々の購買者）の購買数（x）を生みだす過程はポアソンである。すなわち

$$p_r[x=k \mid \mu]=f(x \mid \mu)=\frac{exp(-\mu)\mu^k}{k!} \tag{1}$$

ここでμは，個々の購買者の購買数量の長期平均である。

(2) 長期の平均購買量は消費者によって異なっており，その分布はガンマ分布である。

すなわち，

$$f(\mu)=\frac{\beta exp(-\beta\mu)(\beta\mu)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \mu>0 \tag{2}$$

ここで　$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$

α，βはガンマ分布のパラメーター

以上のように，ある一週間における個々の購買者の購買数が，諸期間にわたって，ポアソン分布に従い，そしてそのパラメーターμが購買者の母集団においてガンマ分布に従うという想定をおくならば，このことからなんらかの1期間における購買者の購買数xの分布は，負の2項分布（ＮＢＤ）に従う結果がえられる。

これは，次のようにして求められる。

仮定(1)，(2)より

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^\infty f(x \mid \mu) f(\mu) d\mu \\
&= \int_0^\infty \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \cdot \frac{\beta e^{-\beta\mu}(\beta\mu)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\mu \\
&= \frac{\beta^\alpha}{x!\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \mu^{x+\alpha-1} e^{-\mu(1+\beta)} d\mu \\
&= \frac{\beta^\alpha}{x!\Gamma(\alpha)(1+\beta)^{x+\alpha-1}} \int_0^\infty \{(1+\beta)\mu\}^{x+\alpha-1} e^{-\mu(1+\beta)} d\mu
\end{aligned}$$

$$\left(\text{ここで } k=(1+\beta)\mu \text{ とおく} \rightarrow \frac{dk}{d\mu}=(1+\beta)\right)$$

$$=\frac{\beta^{\alpha}}{x!\,\Gamma(\alpha)(1+\beta)^{x+\alpha-1}}\int_0^{\infty}k^{x+\alpha-1}\cdot e^{-k}\cdot\frac{dk}{(1+\beta)}$$

$$=\frac{\beta^{\alpha}}{x!\,\Gamma(\alpha)(1+\beta)^{x+\alpha}}\underbrace{\int_0^{\infty}k^{(x+\alpha)-1}e^{-k}\,dk}_{\Gamma(x+\alpha)}$$

$$=\frac{\beta^{\alpha}\Gamma(x+\alpha)}{x!\,\Gamma(\alpha)(1+\beta)^{x+\alpha}}$$

$$=\frac{\Gamma(x+\alpha)\cdot\beta^{\alpha}}{\Gamma(x+1)\cdot\Gamma(\alpha)\cdot(1+\beta)^{\alpha}(1+\beta)^{x}}$$

$$=\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{\alpha}\cdot\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha)}\cdot\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{x}$$

$$=\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{\alpha}\cdot\frac{(x+\alpha-1)!}{x!\,(\alpha-1)!}\cdot\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{x}$$

$$=\binom{x+\alpha-1}{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{x} \qquad (3)^{1)}$$

一方，負の２項分布の考え方からみれば，次のようになる。

$x+\alpha-1$ 回目までの試行で$(\alpha-1)$回成功（非購買）し，x 回不成功（購買する）である。したがって，

$$p_r(x)=\binom{x+\alpha-1}{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{x}$$

そして，$x+\alpha$ 回目に成功（非購買）する確率 $\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)$ の積をとって，x だけ購買する確率は，

$$p_r(x)=\binom{x+\alpha-1}{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{x}$$

と求まり，(3)式にあてはまることになる。

1)　ここで(3)式に，$E(x)=\frac{\alpha}{\beta}=m$ として，$\beta=\frac{\alpha}{m}$ を代入

$$=\binom{x+\alpha-1}{\alpha-1}\left(1+\frac{m}{\alpha}\right)^{-\alpha}\left(\frac{m}{m+\alpha}\right)^{x}$$

$$=\left(1+\frac{m}{\alpha}\right)^{-\alpha}\cdot\frac{(x+\alpha-1)!}{x!\,(\alpha-1)!}\cdot\left(\frac{m}{m+\alpha}\right)^{x}$$

$$=\left(1+\frac{m}{\alpha}\right)^{-\alpha}\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha)}\cdot\left(\frac{m}{m+\alpha}\right)^{x}$$

ＬＳＤ (Logarithmic Series Distribution) 理論

ある状況の下で持つところの負の２項分布への単純な近似は，対数級数分布あるいは，ＬＳＤである。それは分析期間においてその項目を購入する人々の割合が相対的に低いおおざっぱに b あるいは $1-p_0$ が，約0.2あるいは20％以下であるという時にあてはまるのである。それ故に非購買者数は購買者達からは別々に処理される。そしてＬＳＤは単にひとつのパラメーターをもっており，そして２つもっているＮＢＤよりもより単純である。ＬＳＤは，ＮＢＤに対して画一的なものではない。しかし単に，ある条件のもとで，すなわちおおざっぱには，b が0.2よりも小さいというところで,同じ結果を本質的に与える。しかしより単純であるところの，その特別な場合にあたっている。ＬＳＤが単にひとつのパラメーターを持っているから反復購買等に対しての多くの式は，特に，ＬＳＤの型において直接的にあてはまっている。

ひとつの極端な例が，分析期間において r 回以上ある項目を買うところの項目に対して相対的に自由な購買者によって考慮される項目の総販売高の１部分に対しての式である。ＬＳＤ理論においては非常に単純な式 q^r である。ＮＢＤ理論においては，同じ様な単純な式はない，概念的にＬＳＤの重要性は，現実の購買者数と比較して，これが充分大きい，すなわち，$b<0.2$ ほどである限り，潜在的な購買者の人数の正確な定義から購買者行動がいかに独立であるか，あるいは少くともかなり独立的であるかを示しているということである。

ここにＬＳＤモデルは，一般に次のように書かれる。

$$p_k=\frac{-q^k}{k\log e(1-q)},\qquad k\geq 1$$

ここで q はその分布のパラメーターである。

ＮＢＤのパラメーター α と m と，それらの比率 $a=m/\alpha$ が非ゼロの極限値に近づくようなやり方で，ゼロへ近づけるにつれて，ＮＢＤの非ゼロ部分，

つまり$k=0$をのぞいたＮＢＤは上述のＬＳＤへ近づくということが数学的に知られているのである。したがって十分に低いαの値をもつ観察されたＮＢＤの非ゼロ部分はＬＳＤによって近似することができる。

6.　確率過程モデルの一考察

消費者および購買者の選択行動の問題を論じる仕方は，それが任意の人間行動であっても，大別して，理論構成史としてみて２つに分けられることをみた。

一つは，その行動に対して動機づけ（causes）と説明づけ（explanations）が可能という立場であり，他はその行動が少なくとも部分的には確率的であるとする立場である。ところで前者においても確率的要素を導入しないわけではなく，ずい所にそれが導入されていることをこれまでみてきた。

それだけ消費者の選択行動が実際のランダムネスによって特徴づけられる事実が増大してきていることを示している。

確率的要素の導入を前提するならば，消費者の Brand 選択行動の過程は確率過程の問題として処理されることを示唆する。こうして，確率過程モデルが，さまざまな形で議論されている。特にマルコフ過程は種々の問題点を追求されながらも発展的に適用されてきている。

例えば，購買者の購買間時間に対する仮定として，離散時間から連続時間へ，そして指数分布から一般分布へ，すなわち，セミ・マルコフ過程応用へと発展してきている。

また，個人がこのような確率過程に従うとした場合，市場における集計的なBrand Share は，どうなるかの問題などへと考察対象領域も拡大してきている。

以上，前章までにおいて購買者行動に確率過程モデルの応用，ないしは考え方を概観してきたが，そうした観点をふまえてここで，現段階での一つの検討を試みる。

この検討は次の三つのような形に要約される前提ないし特徴を有している。

① 各個人の Brand 切り替え行動は，マルコフ過程に従い購買間時間は連続的（指数分布）あるいは，セミ・マルコフ（一般分布）であると仮定する。

② 企業は，市場における自社の Brand Share に関心がある。

③ ある一定の時点で市場に入ってくる顧客（新規購買者）と市場からでていく顧客（喪失購買者）がいる。

ある市場に，t 時点で，k_t 人の購買者が存在する。一方 $t+s$ 時点には ξ_{t+s} 人の新規購買者が流入してくる。時刻 t における各人は，市場内の各人とは独立に行動し，しかもこの市場に流入してくる人に対しても独立に行動するとし，それぞれ確率 a（<1）で時刻 $t+s$ に市場に残り，確率 $1-a$ で時刻 $t+s$ に市場から流出する。

ξ_tは独立でパラメーター λ のポアソン分布をする。この時 k_t はマルコフ連鎖となる。

t 時点での Brand y_i（$i=1, \cdots, n$）の購買者数が，C_i 人であるとする。

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = k_t$$

そして，$t+s$ 時点には，k_t 人のうち，k^*_{t+s} 人市場から流出し，（ξ_{t+s} 人流入）結局 $t+s$ 時点での市場に存在する購買者総数は k_{t+s} となる。（$k^*_{t+s}+k_{t+s}=k_t+\xi_{t+s}$）

但し，$t+s$ 時点での各ブランドの購買者数は，C^*_iとする。

$$\sum_{i=1}^{n} C^*_i = k_{t+s}$$

この時，$t+s$ 時点における Brand に対する購買者数分布（Brand y_i の市場占有率）はどれほどであろうか。

（但し，時間を連続としてマルコフ性を仮定した場合には，時間の指数分布を前提したことになるので，一般分布を仮定すべくセミ・マルコフの場合も検討する。従って最初指数分布を仮定し，次に一般分布を仮定する。）

ところで，購買者が新規に市場にやってくる場合，どの Brand を目あて

にするかわからないものとする。したがって，Brand に対する新規購買者数の分布は，π_i $(\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1)$（初期分布と考えられる）に従うものとする。

さらに各購買者について，t 時点で Brand y_i であったものが，$t+s$ 時点に Brand y_j である確率は，

$$P_{ij}(t+s)$$

とあらわされる。

ここで，$P_{ij}(t+s)$ は，チャプマン＝コルモゴロフの式を満たす。すなわち，s で微分できて，

$$P'_{ij}(t+s) = \sum_{u} P_{iu}(t) P'_{uj}(s) \qquad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

よって，$t+s$ 時点における Brand Y_j の期待購買者数は，（Howard のベクトル・マルコフ仮定より）

$$\overline{C}_j(t+s) = \sum_{i=1}^{n} C^*_i P_{ij}(t+s)$$

したがって $t+s$ 時点に Brand y_j の期待購買者数が $\overline{C}_j(t+s)$ 人である確率は

$$P(\overline{C}_j(t+s)) = p(\sum_{i=1}^{n} C^*_i p_{ij}(t+s)) = \sum_{i=1}^{n} P(c^*_i) P_{ij}(t+s) \qquad \text{—(1)}$$

一方 k_t はマルコフ連鎖であり，t 時点で市場にあって，しかも $t+s$ 時点で市場に残っている購買者数を $R(k_t)$ であらわすと，

$$k_{t+s} = \xi_{t+s} + R(k_t)$$

あきらかに

$$P\{R(k_t) = z \mid k_t\} = \binom{k_t}{z} a^z (1-a)^{k_t - z} \quad \left(\begin{array}{l} t+s \text{ 時点に } z \text{ 人市場} \\ \text{に残る確率} \end{array}\right)$$

$$P(\xi_t = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

より市場に $t+s$ 時点に k_{t+s} 人いる確率は，

$$P(k_{t+s} \mid k_t) = \sum_{z=0}^{min(k_t, k_{t+s})} \frac{\lambda^{k_{t+s}-z} e^{-\lambda}}{k_{t+s}-z)!} \binom{k_t}{z} a^z (1-a)^{k_t - z}$$

各 Brand の購買者数についても同様

（但し　$C^*_i = \pi_i \xi_{t+s} + R(C_i)$）

のことが成立すると，

$$P\ (C^*_i \mid C_i) = \sum_{z=0}^{min\ (C_i, C_i^*)} \pi_i \frac{\lambda^{C_i - z} e^{-\lambda}}{(C^*_i - z)!} \binom{C_i}{z} a^z\ (1-a)^{C_i - z}$$

これを(1)式に代入すれば，

$$P(\overline{C}_j(t+s)) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \frac{\lambda^{C_i^* - z} e^{-\lambda}}{(C^*_i - z)!} \binom{C_i}{z} a^z\ (1-a)^{C_i - z}$$

$$\times P_{ij}(t+s) \qquad \text{—(2)}$$

これまでは，Brand y_i から Brand y_j への切り替え時間にマルコフ性すなわち指数分布を仮定していたが，次に，一般の分布を仮定するセミ・マルコフ性を導入した場合を考察する。

すなわち，y_i から y_j への時間間隔 τ_{ij} は，確率変数であって，その密度関数を $h_{ij}(\tau)$ であらわす。

t 時点で y_i にある購買者が $t+s$ 時点で y_j にある確率を状態の推移にのみ着目した場合 $P^*_{ij\ (t+s)}$ としたとき，これは次の関係式を満たす

$$P^*_{ij}(t+s) = \sum_{u=1}^{n} P_{iu} \int_t^{t+s} h_{iu}(\tau)\ P^*_{uj}(t+s-\tau)\, d\tau$$

これより時間間隔にセミ・マルコフを仮定したときの Brand Share は，(2)式を変形した

$$P\ (\overline{C}_j(t+s)) = \Sigma_i \frac{\lambda^{C_i^* - z} e^{-\lambda}}{(C^*_i - z)!} \binom{C_i}{z} a^z\ (1-a)^{C_i - z}\ P^*_{ij}(t+s)$$

となろう。

参　考　文　献

〔1〕 J. A. Howard, Marketing : Executive and Buyer Behavior, Columbia Univ. Press, 1963. 三浦一訳『新しいマーケティングの理論――経営者と購買者行動』ダイヤモンド社，1967年

〔2〕 林　周二著『企業と市場創造』筑摩書房，1969年

〔3〕 チャールズ・ヤン著『広告の科学——その発想と戦略——』中央公論社，1974年

〔4〕 R. E. Frank and P. E. Green, Quantitative Method in Marketing, Prentice-Hall, Inc. 1967, 土岐坤訳『マーケティングに必要な計量技法』ダイヤモンド社，1973年

〔5〕 Franklin A. Lindsay, New Techniques for Management Decision Making, MaGraw-Hill 1958, 鈴木恒男訳『経営意思決定の新技術』ダイヤモンド社，1963年

〔6〕 内海武士「CSMP の Social Systems Simulation への適用 PART. I——Computer Simulation の変遷」『数理科学』12月号，1972年

〔7〕 Ian. I. Mitroff and Frederick Betz, "Dialectical Decision Theory : A Meta-Theory of Decision-Making," Management Science, Vol. No. 1, Sept. 1972

〔8〕 F. Betz and I. I. Mitroff, "Representational Systems Theory," Management Science (Theory,), Vol 20, No. 9 May 1974

〔9〕 小林龍一他「財務におけるシュミレーション」『数理科学』12月号，1972年

〔10〕 A. S. C. Ehrenberg, Repeat-Buying : Theory and Applications, London : North-Holland Inc., 1972

〔11〕 田村正紀著『消費者行動分析』白桃書房，1972年

〔12〕 J. A. Howard and J. N. Sheth, The Theory of Buyer Behavior, New York : John Wiley, 1969

〔13〕 A. E. Amstutz, Computer Simulation of Competitive Market Response, The M. I. T. Press, 1967

〔14〕 A. A. Kuehn, "Consumer Brand Choice as a Learning Process," Journal of Advertising Research, Vol. 2, Dec. 1962,（田村〔11〕による）

〔15〕 R. B. Maffei, "Brand Preferences and Simple Markov Processes," Operations Research, Vol. 8. Mar. 1960

〔16〕 P. G. Hoel, S. C.Port and C. J. Stone, Introduction to Stochastic Processes, Houghton Mifflin Company, Boston 1972, 岩本誠一訳『確率過程入門』東京図書，1974年

〔17〕 北川敏男編『マルコフ過程』共立出版，1967

〔18〕 Ronald A. Howard, "Dynamic Programming and Markov Processes" (Boston : Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, 1960.).

〔19〕 R. A. Howard, "Stochastic Process Models of Consumer Behavior," Journal of Advertising Research, Vol.. 3, 1963,（田村〔11〕による）

〔20〕 森村英典「マルコフチェーンのはなし」『数理科学』1968年，4月号

〔21〕 小山昭雄著『マルコフ過程とその周辺』東洋経済，1971年

〔22〕 Cyrus Derman, Finite State Markovian Decision Processes, Academic Press, 1970

〔23〕 E. P. C. Kao, "Optimal Replacement Rules when Changes of State are Semi-Morkovian," Operations Research, Vol. 21, No. 6, Nov.-Dec., 1973

〔24〕 Hirohide Hinomoto, "Sequential Control of Homogeneous Activities-Linear Programming of Semi-Markovian Decisions," Operations Research Vol. 19, No. 7, November-December 1971

〔25〕 William Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I Vol. II 1966, John Wiley and Sons, Inc.

〔26〕 G. P. H. Styan and H. Smith, Jr. "Markov Chains Applied to Marketing," Journal of Marketing Research, Vol. 1, Feb. 1964 (田村〔11〕による)

〔27〕 小河原正己「時系列における定常と非定常」『数理科学』1974年, 7月号

〔28〕 藤井光昭「時系列のモデルとその分析」『数理科学』1974年, 7月号

〔29〕 G. Tintner, Econometrics, Wiley, 1963

〔30〕 吉田正昭「とくに広告キャンペーンの効果について」『数理科学』1974年, 9月号

〔31〕 A. Pessemier, Experimental methods of Analyzing Demand for Branded Consumer Goods with Applications to Problems in Marketing Strategy, 1963, (田村による)

〔32〕 吉田正昭「ブランド・ロイヤルティについて」『数理科学』1968年, 4月号

〔33〕 H. Luss and S. K. Gupta, "Allocation of Marketing Effort Among P Substitutional Products in N Territories," Contents, Vol. 25, No. 1, March, 1974

〔34〕 B. Lipstein, "The Dynamics of Brand Loyalty and Brand Switching," (eds) ; Marketing Management and Administrative Action, 1963 (田村〔11〕による)

〔35〕 吉田正昭, 村田昭治, 井関利明共編『消費者行動の分析モデル』丸善, 1969

〔36〕 J. N. Sheth, "A Review of Buyer Behavior, Management Science, Vol. 13. No. 12, 1967

〔37〕 R. E. Frank, "Brand Choice as a Probability Process," Journal of Business, Vol. 35, No. 1. Jan. 1962 (阿部〔59〕による)

〔38〕 竹内　清「デシジョン・メーキング序説」『小樽商科大学創立五十周年記念論文集 ――商学討究篇 ――』1961年

〔39〕 金子哲夫著『マルコフ決定理論入門』槇書店, 1973年

〔40〕 H. Raiffa and R. Schlaifer, Applied Statistical Decision Theory, Harvard Univ. 1961

〔41〕 鈴木雪夫「決定理論」『現代経済学の展開』第16章, 勁草書房, 1971年

〔42〕 北川敏男編『確率過程論』共立出版，1969年
〔43〕 D. Blackwell, "Discrete Dynamic Programming," Ann. Math. Stat. 33, 1962
〔44〕 D. J. White, Dynamic Programming, Oliver & Boyd, 1969
〔45〕 R. E. Bellman, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, 1957
〔46〕 R. E. Bellman and S. E. Dreyfus, Applied Dynamic Programming, Princeton Univ. Press,
〔47〕 W. F. Massy, D. B. Montgomery and D. G. Morison, Stochastic Models of Buying Behavior, The M. I. T. Press, 1970
〔48〕 J. G. Kemmeny and J. L. Snell, Finite Markov Chains, Van Nostrand, Princeton, 1960
〔49〕 F. S. Hillier and G. J. Lieberman, Introduction to Operations Research, Holden-Day, Inc. Sixth Printing, 1970
〔50〕 S. Osaki and H. Mine, Linear Programming Algorithms for Semi-Markovian Decision Processes,
〔51〕 S. Y. Su and R. A. Deininger, "Generalization of Whites' Method of Successive Approximations to Periodic Markovian Decision Processes," Operations Research, Vol. 20, No. 2, March-April 1972
〔52〕 S. C. Albright, "A Markov-Decision-Chain Approach to a Stochastic Assignment Problem," Operations Research, Vol. 22, No. 1. Jan-Feb. 1974
〔53〕 R. C. Grinold, "A Generalized Discrete Dynamic Programming Model," Management Science, Vol. 20, No. 7, March 1974
〔54〕 小野　茂「学習過程のモデル」『数理科学』1974年，9月号
〔55〕 R. R. Bush and F. Mosteller, Stochastic Models for Learning, 1955
〔56〕 J. D. Herniter, Stochastic Market Models and the Analysis of Consumer Panel Data, 1966
〔57〕 M. F. Norman, Markov Procesces and Learning Models, Academic Press 1972
〔58〕 Gary L. Lilien, "A Modified Linear Learning Model of Buyer Behavior," Management Science (Theory) Vol. 20, No. 7, March 1974
〔59〕 阿部周造「ブランド選択と線形学習モデル ——母数の推定を中心として——」『ビジネス・レビュー』Vol. 21, No. 2, 1973
〔60〕 P. Sappes and R. C. Atkinson, Markov Learning Models for Multiperson Interactions, Stanford Univ. Press, 1968
〔61〕 J. M. Carman, "Brand Switching and Linear Learning Models," Journal of Advertising Research, Vol. 6, No. 2 (June, 1966) (阿部〔59〕による)
〔62〕 J. F. Engel, D. T. Kollat and R. D. Blackwell, Consumer Behavior, (Holt,

Rinehart and Winston), 1968

〔63〕 T. S. Robertson, Consumer Behavior, Scott, Foreman and Compamy, 1970 河村訳『消費者行動の科学』ミネルバ書房

〔64〕 F. M. Bass, "The Theory of Stochastic Preference and Brand Switching," Journal of Marketing Research, Vol. XI, February 1974

〔65〕 J. Jacoby, D. E. Speller, and C. A. Kohn, "Brand Choice Behavior as a Function of Information Load," Journal of Marketing Research, Vol. XI, February 1974

〔66〕 村田昭治編『現代マーケティング論』有斐閣, 1973年

〔67〕 C. Chatfield, "Some Comments on Spectral Analysis in Marketing," Journal of Marketing Research, Vol. XI, February 1974

〔68〕 P. E. Green and R. E. Frank, "A Manager's Guide To Marketing Research," John Wiley & Sons, Inc., 1967, 土岐坤訳『マーケティングリサーチはどこまで進んだか』ダイヤモンド社