HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	銘柄占有率と購買者行動:確率過程論的理論形成
Author(s)	黒田, 重雄
Citation	北海道大學　經濟學研究, 29(1), 121-138
Issue Date	1979-03
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/31446
Type	bulletin (article)
File Information	29(1)_P121-138.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

銘柄占有率と購買者行動

——確率過程論的理論形成——

黒田重雄

〔1〕

いま，ある会社（i社）があり，ある製品Bを市場に出荷している。この会社ではもっぱら，売上高（販売高）に関心があり従ってその動向に注目している。i社の売上高Vは価格Pと市場でのBのi社販売個数B_iとの積であらわされる。すなわち，

$$V=P\times B_i$$

いまもし，価格Pが時間に関して一定とすると売上高の動向はB_iの推移如何んとなる。

ところで，Qを市場におけるBの総販売個数とすると，B_iは，

$$B_i=\frac{B_i}{Q}\times Q$$

とかける。ここでB_i/Qは，ある時点でのi社製品のブランド・シェア（銘柄占有率）と考えられる。

これよりVは当該時点のブランド・シェアと総販売個数との積の動向によって決定されることになる。

問題は、B_i/QとQとの関係であるが，例えば，何らかの理由でQが大きくなる，すなわち，当該市場への購買者の流入が大きくなったとしても，i社製品のブランド・シェアにはまったく影響がないか，または，かえって小さくなることもありうる，ということで，それらの間には相関がないと仮定し，それぞれ独立に決定されるものとする。

以上よりi社はB_i/QとQとのそれぞれの決定のプロセスおよび，将来のある時点における売上高の推移（すなわち，価格を一定としたときのB_i/Q

とQの推移）を明らかにすることを目論む。

一方，ブランド・シェアは，市場において多くの競争的ブランドと対峙している企業にとって非常に重要な問題であるので，いろいろの角度（例えば，広告，販売促進など）から問題とされ，またさまざまなモデル（例えば，ブランド切替モデル，シュミレーションモデルなど）によって検討されている。しかし，小論では理論構築を確率過程論的考察によってのみ行うこととする。

〔2〕

理論を具体化するに当たり，最初に以下のような定義および，前提（仮定）を設定する。

- 購買者行動にまつわるさまざまな状況はランダムネスによって特徴づけられる。
- さしあたり，市場における販売個数は購買者数そのものであるとする（したがって，一人で何個かを購入することを認めた場合にも，その数値は延購買者数となる）。
- 時間tは適当な単位で，測定されている（例えば，分，時間，週でよい）。
- 市場に存在している，あるいは流入してくる購買者（新規購買者）は，それ以後の時点において確率aで市場に残留し，1－aで市場から退却（喪失購買者）する。そして市場内の各人はそれぞれ独立に行動し，また市場に流入してくる人に対しても独立である。
- t時点で市場に存在する購買者数（Bの潜在的購買者は含めない）は$k(t)$人である。
- t時点で市場に流入してくる購買者数は$\xi(t)$人で，これは，パラメータλのポアソン分布をする。
- t時点で，B_j（$j=1, 2, \cdots\cdots, n$；ブランドの個数n）の購買者

数は$C_j(t)$人である。

$$k(t)=\sum_{j=1}^{n} C_j(t)$$

・　新規購買者の場合はどのブランドを目あてにするかわからないものとする。したがって，B_jに対する新規購買者数分布は，初期分布π_j（$\sum_{j=1}^{n}\pi_j=1$）に従う。

いま，t時点にk(t)人であった購買者のうち，t＋s時点でも市場に残留している購買者数をk(t+s)人とすると，もしt時点直後よりt＋s時点直前まで市場の流出入がなかったか，あってもそれらの間で相殺されていればt＋s時点での総購買者数は，t＋s時点に流入してくる購買者数$\xi(t+s)$を考慮して，

$$k(t+s)+\xi(t+s)$$

となる。

ここで前提よりk(t)人がt＋s時点にz人となる確率は

$$P\{k(t+s)=z|k(t)\}=\binom{k(t)}{z}a^{z}(1-a)^{k(t)-z}=P_{a,k(t)}(Z)\cdots\cdots\cdots(1)$$

$\xi(t+s)$人がx人である確率は，

$$P\{\xi(t+s)=x\}=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}=P_{\lambda}(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

となり，(1)式は2項分布，(2)式はポアソン分布である。

一般には，時間τの間にx人到着する確率は$(\lambda\tau)^{x}\cdot e^{-\lambda\tau}/x!$である。ここで$\tau$を単位時間(＝1)としたとき(2)式となる。

以上より，t時点にk(t)人が，t＋s時点にk(t+s)人となり$\xi(t+s)$人流入する生起確率は

$$P_{a,k(t)}(z)\cdot P_{\lambda}(x)=P(x+z)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ただ通常は，(3)式は成立しない。ここではx＋z＝ℓとしたP(ℓ)を考えているわけでなく，あくまでもx＋zという特定な値x，zに対してのみ成立する式である。

また同様に，t時点でB_iの購買者$C_i(t)$人のうち喪失購買者がいるため

(t＋s)時点にy人となる確率は,

$$P\{C_i(t+s)=y|C_i(t)\}=\binom{Ci(t)}{y}a^{y}(1-a)^{Ci(t)-y}=P_{a,Ci(t)}(y)\cdots(4)$$

また，t＋s時点に市場に流入してくる購買者ξ(t＋s)人のうち，B_iを購入するのは，$\pi_i\xi$(t＋s)人であるから，その確率は(2)式より

$$\pi_i P_\lambda(x)\cdots\cdots(5)$$

よって(4)，(5)よりt＋s時点でB_iを購入する購買者数の生起確率は,

$$\pi_i P_\lambda(x)\cdot P_{a,Ci(t)}(y)=P(\pi_i x+y)\cdots\cdots(6)$$

(6)式も(3)式と同じような意味でのみ成立している。

ところで，t＋s時点でのB_iのブランド・シェアは,

$$\pi_i x+y/x+z$$

ここで$P(\pi_i x+y/x+z)$はP$(\pi_i x+y|x+z)$に等しいとおく。このことは(x+z)を与えられたものとしたときのみの特別な場合として成立している。

したがって，そのシェアの生起する確率は，(3)，(6)より

$$P\{\pi_i x+y|x+z\}=\frac{\pi_i P_\lambda(x)\cdot P_{a,Ci(t)}(y)}{P_\lambda(x)\cdot P_{a,k(t)}(z)}$$

$$=\pi_i\frac{P_{a,Ci(t)}(y)}{P_{a,k(t)}(z)}\cdots\cdots(7)$$

$$=\pi_i\frac{1}{P_{a,(k(t)-Ci(t))}(z-y)}\cdots\cdots(8)$$

以上より，t＋s時点のシェアは，2項確率をaとしたとき，$k(t)-C_i(t)$人のうち，z－y人，市場に残留する確率に依存する。しかも(8)式の諸変数の値はすべてt時点において与えられているものばかりである。

(8)式の具体的な内容は，t時点でのB_i以外のブランドの購買者数の2項分布でB_iの初期分布を割ったものになっているということである。なお，t時点のブランド・シェアは$C_i(t)/k(t)$である。

〔3〕

次に，購買者に銘柄切替え（ブランド・スウイッチング）を許した場合について将来のブランド・シェアがどうなるかを考えてみる。これまでは個々

の購買者が，現在は B_i を購入しても将来は他の銘柄を購入する可能性のあることを認めていなかった。ここでは意識的に銘柄推移性を導入する。

すなわち，ある時点に市場に存在していた購買者は，それぞれの銘柄購入の可能性（初期銘柄購入確率）をもっているが，銘柄切替え可能性を許容すると，ある時間経た後には新しい銘柄購入確率（銘柄推移確率）をもつことになる。

こうした検討の代表的な問題解決法は，マルコフ過程〔5〕，〔6〕，〔7〕を適用するものである。最も近い購入の機会 t 時点に B_j を購買した個人が，次の機会 t＋1 時点に B_i を購買する確率（すなわち推移確率）を測定する。そしてまた，それ以上の時点にはまったく影響を及ぼさないと仮定する。例えば，t 時点の購買は，t＋2 時点の購買に対しては銘柄切替え行動上問題にならないことになる。表1は銘柄数 n の場合の推移確率の状態を示している。

表1　推　移　確　率　表

		t＋1時点の購買							確率の行和
		1	2	3	……	i	j	…… n	
t時点の購買	1	P_{11}				⋮	⋮	⋮	1
	2					⋮	⋮	⋮	⋮
	3					⋮	⋮	⋮	⋮
	i	……				P_{ii}	P_{ij}	⋮	1
	j	……				P_{ji}	P_{jj}	⋮	1
	⋮							⋮	⋮
	n	……						P_{nn}	1

さらにもし，こうした推移確率が各期において一定と仮定されるならば，その購買系列は，単純マルコフ過程あるいはマルコフ連鎖に従うといわれる。

こうした考え方が将来のブランド・シェアの状態にどう関係づけられるか

をみる場合，R. A. Howard〔9〕のベクトル・マルコフ過程モデルが参考になる。

そのモデルは次のような前提から成り立っている。

(1)　各購買者は離散的なマルコフ連鎖に従う。

(2)　各購買者の行動は同質的（同一推移確率）である。

(3)　各購買者は独立に行動し，そして購買者間に相互作用はない。

そして問題は，もしt時点において，B_iを購買する初期購買者数が$C_i(t)$である場合に時間sの経過後（すなわちt＋s時点）におけるB_i（i＝1，2，……，n）の購買者数を得ることであった。

各購買者が相互に独立に行動するからB_jの購買者$C_j(t)$の各々はt＋s時点にはB_iを購買する同一確率$P_{ji}(t+s)$をもつ。

したがって，t＋s時点におけるB_iの購買者総数は，成功の確率（推移確率）$P_{ji}(t+s)$と試行数（初期購買者数）$C_j(t)$をもつ2項確率分布によってあたえられる。

いま，各銘柄B_i（i＝1，2，……，n）が初期購買者数$C_i(t)$をもつとしてみる。これらの購買者はその過程によって独立に行動している。すなわちt時点でB_1からt＋s時点でB_iへ切替える購買者は，一つの2項分布をもち，B_2からt＋s時点でB_iに切替ええる購買者はもう一つの2項分布をもつ，といった具合である。したがって，t＋s時点でのB_iの購買者総数は，これらの相互に独立な2項分布の総和によってあらわされることになる。

この総和の分布は個々の2項分布のたたみこみ（convolution）によって求められる。すなわち，

$$P[C_{i(t+s)}=m]=\mathop{*}_{j=1}^{n}P[m|C_j(t),\ P_{ji}(t+s)]$$

ここで＊はたたみこみの記号で，

$P[m|C_j(t),\ P_{ji}(t+s)]$は推移確率$P_{ji}(t+s)$を初期購買者数$C_i(t)$を条件としたときt＋s時点で$B_i$の購買者数がm人となる2項確率である。ただこの購買者数を求めるためには，n個（銘柄の個数）の異なる2項分布をたたみこむ必要がある。

２項分布の各々は各状態の初期購買者数と基礎になっているマルコフ連鎖のｓ段階推移確率によってあたえられる。

ここで，B_iのｔ＋ｓ時点の購買者数$C_i(t+s)$の分布の期待値を考える。$C_i(t+s)$の分布は，ｎ個の異なる２項分布のたたみこみであるから，$C_i(t+s)$の期待値はそれぞれの２項分布の期待値の総和である。そして個々の２項分布の期待値は，その推移確率とその購買者数の積である。

これより，ｔ＋ｓ時点でのB_iの期待購買者数$\overline{C_i}(t+s)$は

$$\overline{C_i}(t+s)=\sum_{j=1}^{n}C_j(t)P_{ji}(t+s) \cdots\cdots (9)$$

こうしてHowardは，マーケティング管理者にとって興味のある市場におけるｔ＋ｓ時点のB_iの購買者数分布の積率を求めることを可能にした。

しかし，このような形でなされる「ベクトル・マルコフ過程」モデルに対していくつかの反論が提起されている。この点に関しては筆者が別の稿〔16〕で検討している。

それはさておき，〔２〕節の文脈に立返って，

$$\sum_{j=1}^{n}C_j(t)=k(t)$$

である，$k(t)$人がｔ＋ｓ時点には$k(t+s)=z$人となり，新規に$\xi(t+s)=x$人流入してくるのでｔ＋ｓ時点の市場総購買者数はｘ＋ｚ人である。

ここで購買者の銘柄切替えを認めたときのｔ＋ｓ時点でのB_iの購買者数は$\overline{C_i}(t+s)$人と新規購買者の$\pi_i x$人の和となる。

以上より，ｔ＋ｓ時点のB_iのブランド・シェアは，

$$\pi_i x+\overline{C_i}(t+s)/x+z$$

であり，その生起確率は，〔２〕節と同様に，

$$P\{\pi_i x+\overline{C_i}(t+s)|x+z\}=\frac{\pi_i P_\lambda(x)\cdot P\{\sum_{j=1}^{n}C_j(t)P_{ji}(t+s)\}}{P_\lambda(x)\cdot P_{a,k(t)}(z)}$$

$$=\frac{\pi_i P_\lambda(x)\{\sum_{j=1}^{n}P(C_j)\cdot P_{ji}(t+s)\}}{P_\lambda(x)\cdot P_{a,k(t)}(z)}$$

$$=\pi_i\frac{\sum_{j=1}^{n}\pi_j P_{ji}(t+s)}{P_{a,k(t)}(z)} \cdots\cdots (10)$$

また，マルコフ連鎖の理論によれば，表1のような推移確率の計算を逐次行っていくと最終的に「均衡値」あるいは「定常分布」になることがわかっている〔5〕，〔6〕。

換言すれば，推移の回数が無限大に近づくにつれて，購買者がブランド1，2，……，i，j……nを購買する確率は一組の定常的な値になってくるというわけである。そして，こうした定常分布は，一組の線形式を解くことによって得られる。

従ってもし，sが無限大になることを想定すると推移確率$P_{ji}(t+s)$はある値に定まってくることになり，⑽式はある一定の値をとる。

以上，購買者行動に銘柄切替えの可能性を認めその銘柄切替えの仕方にマルコフ性を仮定することにより，結果的に将来のブランド・シェアの状態を検討した。

ところで，マルコフ性を仮定し，適用するに際してはいくつかの問題点が指摘されている〔4〕，〔16〕。例えば，そのうちの一つである購買間時間をとりあげてみよう。

上記の検討は結局のところ，sが整数値をとる（離散的）場合のみを考察していたのであり，ある購買と次の購買との時間の幅(あるいは期間の長さ)—購買間時間—は無視されていた。しかし，購買間時間を無視すると非購買，重購買，複購買，重複購買などの重要問題が不問に付されてしまうことになる。この種の問題の検討は，まず時間の離散性を連続性におきかえ，時間間隔を導入することにはじまった。そしてそこでの時間間隔に対する前提（指数分布）の疑問からセミ・マルコフ過程の前提（一般分布）へと発展してきている〔8〕。従って，⑽式における推移確率もそうした発展方向に即して置換されるべきものであろう。

また，いま一つの問題点である一次性の仮定についても同様である。すなわち，マルコフ過程モデルでは，ある時点での購買者のブランド選択は直前の経験（状態）によってのみ規定されるものと想定されている。したがってもし，ブランド切替が過去数時点の経験（状態）に影響されて生じると仮定

するならば違った観点から問題を処理せねばならなくなる。

こうした点の一つの解決法は，線形学習モデルを利用することである。線形学習モデルは，もともとブランド・ロイヤルティの測定に対して一次の定常マルコフ過程＝マルコフ連鎖が適当であるかどうかの疑念から出発して開発されたモデルである。

〔12〕，〔13〕他等によって，理論的実証的に研究されてきている。

このようなモデルは結局のところ，過去の経験を集約して表現しようとしている（たとえば，受容作用線と拒否作用線によって）ことはもちろん，そこでの学習過程が均衡状態に向かっていくこととブランド・シェアが予測できるようにすることをめざしている。このような学習モデルは，生まれた状況からして，学習効果を処理する上で，確率過程論を応用するブランド切替モデル（たとえば，マルコフ連鎖モデル）よりすぐれたモデルと考えられるが，しかし，ここにもまた，いくつかの問題点が指摘されている〔11〕といった具合である。こうした点についても筆者の別の稿〔16〕にゆずる。

〔 4 〕

この節では，ブランド・シェアを待ち行列問題によって検討する。待ち行列の問題は産業界ではしばしば遭遇し，問題が容易に認識されうるということからよく知られている〔1〕，〔3〕。

待ち行列を研究する目的は待ち時間を有効に利用しようとする人にある反応を誘発するということに対してむけられる。

すなわち，ある購買者は，一定時間以上行列に並んで待とうとはしない。待ち時間に何かもっと有用なことができると判断すれば従って機会損失費用が大きすぎると感じれば列を離れる。その結果，企業は利益の損失をこうむる。そのため，あるサービス業では窓口あるいはサーバーの数を増加させることにより問題解決をはかろうとするかもしれない。

ところで「行列」とは何か，と問われた場合，単に目にみえる人々の待ち行列を指すというだけでなく，ここではもっと広い定義を考えている。すな

わち，「サービス機能を待っている個体の総計」ということである。

したがって，その「行列」は目にみえる人々の行列をあらわすことはもとより，例えば，

- 販売されるために在庫されている品目群
- メイル・オーダーに商品の到着を待っている人々
- 購買する意思があっても交通手段など環境的ネックにより便益をそこなわれ，実際の購買に遅れている人々
- 機械加工されるのを待つ部品，着陸を待つ航空機

などが含まれる。そして，ここでの購買者という観点からのみ「行列」の定義をすると，購買するため並んでいる人ばかりでなく潜在的購買者も含めるということになる。

実際の待ち行列の問題を考察するに際しては，シュミレーション手法が応用される場合が多い。例えば，サーバーの数を変化させた場合，行列がどのように移動するかといった問題に対してである。しかし，一方において理論的方法も実際の待ち行列に適用できるようないくつかの有用な結果を導いている。こうした成果にもとづいて，将来のブランド・シェアを検討するのが本節の目的である。

まず，ブランド・シェアと待ち行列の関連について考えてみる。〔2〕，〔3〕節では，市場に存在するあるいは流入してきた購買者は，いずれもただちにサービスを受けるという意味でサービス時間の問題を考慮外においていた。しかし，待ち行列を上記のように定義した場合，市場にやってきていてもサービス時間等のため実際の流入と購買との間に時間的ずれが生じるであろう。これは待ち行列の存在を意味し，したがってある一定時点を切った場合，その時点まで並んでいる購買者は，実際の購買者としないかもしれないし，また現実の購買者に算入されるかもしれない。どちらでもよいが問題はそれによって待ち行列を考慮していない場合のブランド・シェアに何らかの変更が生じるのではないかということである。このようにブランド・シェアと待ち行列との間には関連づけが可能であることをみたので，具体的にどのような

理論によって説明されるかを考えてみよう。

以下のような問題を設定する。

「市場にある時間τにおいてk(τ)人存在している。さらに，その時間には，$\xi(\tau)$人の流入がある。一方購買者にはサービスに要する時間が必要である。時間τの間にサービスを受けることのできるのは$\eta(\tau)$人であり一人あたり流入時間よりサービス時間が長ければ待ち行列ができることになる。こうした前提のもとである一定の時間(s)経過後に市場にk(τ+s)人存在している確率はどうなるであろうか。またその時のブランド・シェアはどうなるか。」

待ち行列問題を理論的に考察する場合の基本的な構成要素は到着時間，列の規則，サービスの長さ（時間），窓口の数などである。以下，A.フレッチャー＝G.クラーク〔3〕と近藤〔10〕を参考にしつつ理論形成を試みる。

到着時間については，〔2〕節でみたように時間間隔τにx人到着する確率は$e^{-x\tau}\cdot(\lambda\tau)^x/x!$である。きわめて小さい時間$\delta\tau$のあいだに一人到着する確率は$\lambda\delta\tau$である。ここで$\delta\tau$を十分小さくとれば，$\delta\tau$のあいだに二人到着する確率は間隔が小さいので無視することができよう。（多くて一人到着できるような時間間隔を$\delta\tau$と仮定する，としても同じ）。

行列の規則については，先着順サービス，後着順サービス，任意順，優先度順，顧客のせっかち，待ち列の選択などの規則があげられているが，ここでは先着順サービスを行うものとする。サービス時間については，定常分布，幾何分布などが前提されているが，ここでは，到着時間と同形の確率曲線をもつとする。サービスの窓口はさしつかえないかぎり，一つと仮定しておく。

一人の顧客が$\delta\tau$の間にそのサービスを受け終る確率は小さい$\delta\tau$に対して$\mu\lambda\tau$である。サービスを受け終ると市場より退却する。いま，時間$\tau\geq 0$において市場に（サービスを受けている人も含めて）k(τ)人の購買者が存在する確率を考える。時間τで市場にk(τ)人の購買者のいる確率をP(k(τ),τ)とする。そして，時間$\tau+\delta\tau$において，k($\tau+\delta\tau$)人の購買者が存在している市場を考える。このような市場の時間τにおける状態は以下のような三

状態のいずれかになっている。

(a)　市場に$k(\tau+\delta\tau)$人の購買者が存在する場合。$\delta\tau$の間に一人の購買者も到着せず一人の購買者も退却しなかった（サービスを受け終っていない）か，あるいは一人到着して一人退却したか，のいずれかである。

(b)　市場に$k(\tau+\delta\tau)+1$人の購買者が存在する場合。$\delta\tau$の間には一人の購買者も到着せず一人だけサービスを受け終って退却した。

(c)　市場に$k(\tau+\delta\tau)-1$人の購買者が存在する場合。$\delta\tau$の間に一人の購買者が到着したが，一人もサービスを完了しなかった。

それぞれの場合の状態と対応する確率を表2に示す。

表2　状　態　と　確　率

場合	時間τ状態	到着*	サービス**	時間$\tau+\delta\tau$状態	確率
(a)	$k(\tau+\delta\tau)$人	■ □	● ○	$k(\tau+\delta\tau)$人	$(1-\lambda\delta\tau)(1-\mu\delta\tau)+(\lambda\delta\tau)(\mu\delta\tau)$
(b)	$k(\tau+\delta\tau)+1$	■	○	$k(\tau+\delta\tau)$	$(1-\lambda\delta\tau)\mu\delta\tau$
(c)	$k(\tau+\delta\tau)-1$	□	●	$k(\tau+\delta\tau)$	$\lambda\delta\tau(1-\mu\delta\tau)$

* 到着について：□	一人到着	$\lambda\delta\tau$
■	一人も到着せず	$(1-\lambda\delta\tau)$
** サービスについて：○	一人サービス終了（市場より退却）	$\mu\delta\tau$
●	一人もサービス終了せず	$(1-\mu\delta\tau)$

以上により，時間$\tau+\delta\tau$において$k(\tau+\delta\tau)$人存在する確率$P\{k(\tau+\delta\tau),\ \tau+\delta\tau\}$は上記，三つの場合の生起確率の和となる。すなわち，

$$\begin{aligned}P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau+\delta\tau)=&P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau)\{(1-\lambda\delta\tau)(1-\mu\delta\tau)+(\lambda\delta\tau)(\mu\delta\tau)\}\\&+P(k(\tau+\delta\tau)+1,\ \tau)\{(1-\lambda\delta\tau)\mu\delta\tau\}\\&+P(k(\tau+\delta\tau)-1,\ \tau)\{\lambda\delta\tau(1-\mu\delta\tau)\}\end{aligned}$$

これを変形して

$$\frac{1}{\delta\tau}\left\{P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau+\delta\tau)-P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau)\right\}=-(\lambda+\mu)P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau)$$

$$+\mu P(k(\tau+\delta\tau)+1,\ \tau)+\lambda P(k(\tau+\delta\tau)-1,\ \tau)$$
$$+\delta\tau\text{を含む項}$$

$\delta\tau$が小さくなるに従い，左辺は，$P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau)$の変化率，つまり$d\{P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau)\}/d\tau$となり$d\tau$を含む項は0に近づく。従って

$$\frac{d}{d\tau}P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau)=\lambda P(k(\tau+\delta\tau)-1,\ \tau)$$
$$+\mu P(k(\tau+\delta\tau)+1,\ \tau)$$
$$-(\lambda+\mu)P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau)\,k(\tau+\delta\tau)>0$$

ここで$k(\tau+\delta\tau)=z$とおくと，

$$\frac{dP(z,\ \tau)}{d\tau}=\lambda P(z-1,\ \tau)+\mu P(z+1,\ \tau)-(\lambda+\mu)P(z,\ \tau)\cdots\cdots(12)$$

また，時間$\tau+\delta\tau$において，市場に購買者が0である確率$P(0,\ \tau+\delta\tau)$は，時間τにおいて市場に一人も購買者が存在しない場合に時間$\tau+\delta\tau$に一人も到着がない，したがってサービスを受けるものもないときと一人到着して一人サービスを受けて退却した状態の確率と時間τにおいて市場に一人だけ存在したが時間$\tau+\delta\tau$で一人も到着せず，一人サービスを受けて退却したという状態の確率の和となる。

すなわち，

$$P(0,\ \tau+\delta\tau)=P(0,\ \tau)\{(1-\lambda\delta\tau)+(\lambda\delta\tau)(\mu\delta\tau)\}$$
$$+P(1,\ \tau)(1-\lambda\delta\tau)(\mu\delta\tau)$$
$$=P(0,\ \tau)(1-\lambda\delta\tau)+(P(1,\ \tau)\mu\delta\tau$$
$$+P(0,\ \tau)(\lambda\delta\tau)(\mu\delta\tau)-P(1,\ \tau)(\lambda\delta\tau)(\mu\delta\tau)$$

この右辺最後の2項は$0(\delta\tau)$とかける。結果的にこれは(12)の形で

$$\frac{dP(0,\tau)}{d\tau}=-\lambda P(0,\ \tau)+\mu P(1,\ \tau)\cdots\cdots(13)$$

とかくことができる。

次に，$P(z,\ \tau)$の母関数 (generating function) を

$$G(r,\ \tau)=\sum_{z=0}^{\infty}P(z,\ \tau)V^z\qquad(|V|\leqq 1)\cdots\cdots(14)$$

とすると

$$\frac{\delta G}{\delta\tau}=\sum_{0}^{\infty}P^{(1)}(z,\ \tau)\gamma^z\cdots\cdots(15)$$

これより

$$\gamma\frac{\delta G}{\delta\tau}=[\lambda V^2-(\lambda+\mu)\gamma+\mu]\,G-\mu(1-\gamma)P(0,\ \tau)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

となる。

ここで演算子法により

$$L[G(\gamma,\ \tau)]=G(\gamma,\ s),\quad L[P(0,\ \tau)]=P(0,\ s)$$

とすると

$$G(\gamma,\ 0)=\sum_{z=0}^{\infty}P(z,\ 0)\gamma^z$$

$\tau=0$ で市場に存在する購買者数がmであるときは,

$$P(z,\ 0)=\begin{cases}1, & z=m\\ 0, & z\neq m\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

これより $G(\gamma,\ 0)=\gamma^m$

これをGについて解くと

$$G=\frac{\gamma^{m+1}-\mu(1-\gamma)P(0,\ 0)}{(\lambda+\mu^{+s})\gamma-\mu-\lambda\gamma^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

この原関数を求めれば，$G(\gamma,\ \tau)$を与えて，それから$P(z,\ \tau)$が求まる。(18)を直接解法によって解くことにより結果として($t=\mu\tau$の置換あり),

$$P(z,t)=e^{-(1+\rho)t}[\beta_{-m}\rho^{\frac{z-m}{2}}I_{z-m}(2t\sqrt{\rho}+\beta_1\rho^{\frac{z+1}{2}}I_{z+1}(2t\sqrt{\rho})]\cdots(19)$$

ここで,

- $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$であるが，これはトラフイック密度（traffic intensity）とよばれている。
- Iは変形ベッセル関数で$I_z(T)=\sum_{h=0}^{\infty}\dfrac{(T/2)^{z+2h}}{h!(z+h)}$
  （Tは時間をあらわす関数）
  - 係数β_{-m}，β_1についてに$\beta_{-m}=1$，β_1は条件$P(0,\ t)=\dfrac{\lambda}{\mu}P(-1,\ t)$,
  $P(-2,\ t)=P(-3,\ t)=\cdots\cdots=0$ を満足しなければならないということから求められている。

以上より，t＋s時点で市場に存在する購買者達がt＋s時点におけるブランド・シエアを決定するということが仮定されるならば，(19)式のtをt＋sに置き換えた$P(z,\ t+s)$が，t＋s時点で市場にz人の購買者（行列に並んでいる人）が存在する確率であり，その時点の初期分布を乗ずることにより，

結果としてt＋s時点でのB_iの購買者数の生起確率を得ることができる。

ところで，t時点ではt＋s時点の初期分布を確定できない。したがって，一つの仮定を設定する。すなわち，すべての購買者（潜在的購買者も含めて）にとって〔3〕節よりt時点での銘柄推移確率が同一で変化の過程はマルコフ性に従うとするとs時間経過後の銘柄確率分布（すなわちブランド・シェアをあらわしている）$P_{ji}(t+s)$は同一である。

これよりs時間経過後の銘柄確率分布がt＋s時点での初期分布となる。z人のうち，B_iを購買する期待購買者数の生起確率は，⒆式の$P(z,\ t+s)$を用いて

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ji}(t+s)\cdot P(z,\ t+s) \cdots\cdots (20)$$

となる。

以上は一般的な場合と考えられるが，次に定常状態の場合を検討する。⑿式において，定常状態を考えてやると，時間に関して⑿の$P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau)$の変化率は0である。定常状態では$P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau)$の値は，連続的に一定である。

したがって，各$k(\tau+\delta\tau)$とすべてのτについて，

$$(\lambda+\mu)P(k(\tau+\delta\tau),\ \tau)=\mu P(k(\tau+\delta\tau)+1,\ \tau)+\lambda P(k(\tau+\delta\tau)-1,\ \tau)$$

ここではτは本質的でないので，方程式からおとし，$k(\tau+\delta\tau)=z$とおくと，

$$\mu P(z+1)=(\lambda+\mu)P(z)-\lambda P(z-1) \cdots\cdots (21)$$

$z=0$のときは，この市場からの退去はないので特別な方程式が導かれる。

$$\mu P(1)=\lambda P(0)$$

これを⒇に代入することにより結果的に，

$$\left.\begin{array}{l} P(z+1)=\dfrac{\lambda^{z+1}}{\mu^{z+1}}P(0) \\ \qquad z\geq 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (22)$$

与えられた時間でzの値は存在するので，$z=0$から∞までの$P(z)$の総和は1である。

$\dfrac{\lambda}{\mu}=\rho$とおくと

$$P(0)[1+\rho+\rho^2+\cdots\cdots]=1$$

ここで$\rho<1$であれば

$$P(0)=1-\rho \quad \cdots\cdots (23)$$

および(22)より

$$P(z)=\rho^{z}(1-\rho) \quad \cdots\cdots (24)$$

ρは取引強度ともよばれる。また，サーバーが遊休している時間は市場に購買者が存在していない確率に比例していなければならないが，これは(23)より明らかで，$(1-\rho)$が遊休時間の比率である。

結果としてρは平均退却率に対する平均到着率の比を示しているので，定常状態が可能であるためには$\rho<1$である。なぜならもし，$\rho>1$の場合は，待ち行例は増大し，例えば(19)式によって与えられるものとなるからである。そして，$\rho=1$のときは，待ち行列の動きは，刀の刃先で平衡しているようなもので，この待ち行列は定常状態に落着くことはない。

このことから市場にある一定の購買者数を長時間にわたって獲得するためには$\rho<1$であり，そこでのブランド・シェアは一般的な場合で考察したごとく推移確率の変化による値によって表現されることになるであろう。

〔5〕

これまで描いてきたブランド・シェア(B_i/Q)をめぐるいくつかの理論的検討は，いずれも購買者の世界あるいは，i社では外的で直接的に統制しえないと思われる状況を前提として行なわれたものであった。

しかしながら，ブランド・シェアをはじめ市場における諸問題に大きくかかわると考えられているメーカー価格，出荷費用，小売価格，特価販売，宣伝，プロモーション，競争状態および購買者間の相互依存性〔15〕などによって銘柄推移確率が変化することが予想され，そうした点の影響を考慮した理論的拡張がなされる必要があろう。

また，理論形成（モデル・ビルディング）としてみた場合には，小論では解析モデルとして確率過程論的な立場をとっていることになる。しかし，こうした解析モデルは次々に変数を増やして市場全体の現実に近いモデルをつ

くるという問題に対してはかなり困難がつきまとう。そのため，解析モデルをとらず，シュミレーションモデルやベイシアン・モデルによる研究〔2〕も進んでいる。

参考文献

〔1〕 J. G. Kemeny and J. L. Snell, Mathematical models in the Social Sciences, Blaisdell Publishing Co. 甲田和衛他訳『社会科学における数学的モデル』培風館，1971年。

〔2〕 R. E. Frank and P. E. Green, Quantitative Methods in Marketing, Prentice-Hall, Inc., 1967年，土岐坤訳『マーケティングに必要な計量技法』ダイヤモンド社，1973年。

〔3〕 A. Fletcher and G. Clarke, Management and Mathematics, The Practical Techniques Available, Business Publication Ltd., 1964年，関恒義監訳『経営と数学』日本評論社，1966年。

〔4〕 田村正紀『消費者行動分析』白桃書房，1972年。

〔5〕 P. G. Hoel, S. C. Port and C. J. Stone, Introduction to Stochastic Processes, Houghton Mifflin Co. 1971年。

〔6〕 J. G. Kemeny and J. L. Snell, Finite Markov chains, Van Nostrand, Princeton, 1960年。

〔7〕 W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. Ⅰ, Vol. Ⅱ, John Wiley & Sons, Inc., 1966年。

〔8〕 小山昭雄『マルコフ過程とその周辺』東洋経済，1971年。

〔9〕 R. A. Howard, "Stochastic Process Models of Consumer Behavior", Journal of Advertising Research, Vol. 3, 1963年（田村〔4〕による）。

〔10〕 近藤次郎『応用確率論』日科技連，1977年。

〔11〕 吉田正昭「とくに広告キャンペーンの効果について」『数理科学』9月号，1974年。

〔12〕 A. A. Kuehn, "Consumer Brand Choice as a Learning Process, "Journal of Advertising Research, Vol. 2, Dec. 1962年。

〔13〕 J. N. Sheth, "A Review of Buyer Behavior", Management Science, Vol. 13, No. 12, 1967年。

〔14〕 吉田正昭，村田昭治，井関利明共編『消費者行動の分析モデル』丸善，1969年。

〔15〕 H. A. Simon, Models of Man, John Wiley & Sons, Inc., 1957年。宮沢光一監訳『人間行動のモデル』同文館，1970年。

〔16〕 黒田重雄「購買者行動と確率過程モデル」—マルコフ過程モデルを中心として—『北大経済学研究』第25巻第2号，1975年。