0－1整数計画法のファセットについて

関口恭毅

1．はじめに

我々が現実に遭遇する決定変数は，すべて一定の量を単位として計量される。この意味でも，我々は離散的な量の世界に住んでいる。これを連続的な数で近似的に表現し，考察することによって，十分な精度を得ることのできる場合は多い。

しかし，特に高精度が必要な場合，連続化によって十分な精度が得られない場合，また，Yes, No といった本質的に離散的な対象を扱う場合等は，本来の離散的世界そのものを考察することが必要になる。

そのような場合の手法の1つが，意思決定手法の分野では整数計画法と言われるものである。大部分の整数計画問題は，そうすることが得策とは言えない場合も多いが，原理的には 0-1 整数線形計画問題 (0-1 ILP) に等価変形できることが知られている[11]。

0-1 ILP を解くには，(変数の個数を n とすれば解は多くとも 2^n 個しかないから) すべての解を列挙してしまえば解ける。この方法で必要な計算量は n の増大とともに急速に増加し，$n=100$ では約 10^{30} 個の列挙を要する。

そこで，n の増加による計算量の増大の速度の低い解法が種々考案されている (例えば(4)を参照)。切除平面法 (cutting plane method) もその1つである。

0-1 ILP の実行可能領域は単位超立方体の頂点の部分集合であるが，これを定義する制約条件の表わす超平面は，これらの頂点にぴったりはりついているのではなく，通常はいく分浮いており，しかも，多少はすになっている。

従ってこれらの超平面が定める多面体の頂点は，単位超立方体の頂点とはなっていない。そこで，余分な頂点を切除し，制約多面体の頂点と超立方体の頂点を一致させるために，追加的な制約条件を設ける。これが切除平面である。

余分なところを最も深く切除する超平面がファセット (facet) と呼ばれる。すべてのファセットが求まれば，これが定める多面体の頂点は，単位超立体の実行可能な頂点に一致する。このことからファセットは，効率的な解法を得るための有力な道具として，また実行可能領域の特性を知る手掛りとして興味深い。

一般的な 0-1 ILP に対するファセットに関して，多くは知られていない。しかし，特定の形をした問題については可成りの研究が公表されている。それらの中で本報告と関連が深いものとして，0-1 ナップザック問題(0-1 KP)と通常のグラフ上の節点パッキング問題 (VP) を上げることができる。

0-1 KP については最小被覆 (minimal cover) に基づいた構成法が良く研究されている[(1)(2)]。この方面の研究を分り易く紹介した報告に嶺野[(5)]がある。これを多重制約の場合に拡張する試みとして Padberg (8), (9)を上げることができる。

VP については，完全グラフや閉路 (cycle) など正則グラフに基づいたものが良く研究されており[(7)(10)(6)]，それを一般化する試みとして Nemhauser and Trotter[(6)]を上げることができる。

これら2つの流れからの一般化が互に密接な関連を有することが Padberg[(8)]により指摘されているが，この事実を利用する試みはまだないようである。

本報告では，超グラフ (hypergraph)[(3)]の概念を利用して，上記の2分野での一般化によって得られた成果が，互に他の分野でも成立することを示し，さらに，新しいファセットの構成法を2，3提案する。

2．多重制約の 0-1 ナップザック問題

通常の 0-1 KP を一般化して，体積，金額…と制約条件が複数ある場合を考える。その時，実行可能領域は次式で定義できる。

$$P(\widetilde{A}, \widetilde{a}_0) = \{x \in R^n \mid \widetilde{A}x \leqq \widetilde{a}_0, \quad x_j = 0 \text{ or } 1 \ \forall j \in N\} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで，R^n：n次元空間，$\widetilde{A}$：$\widetilde{a}_j$を第j列とするm×n行列，$\widetilde{a}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$：非負のm次元列ベクトル，$\widetilde{a}_0$：正のm次元列ベクトルである。また，$N = \{1, 2, \cdots, n\}$とする。

次の$P_I(\widetilde{A}, \widetilde{a}_0)$はPの凸包と言われる。

$$P_I(\widetilde{A}, \widetilde{a}_0) = conv.\{x \in P\} \cdots\cdots\cdots(2)$$

一般性を失うことなく(3)を仮定できる。Oは適当な次元数のすべての要素がゼロのベクトルあるいは行列を示す。

$$O < \widetilde{a}_j \leqq \widetilde{a}_0 \quad \forall j \in N \cdots\cdots\cdots(3)$$

m＝1の場合からの類推で，C⊂Nは(4)を満すとき(2)の被覆（cover）と呼ばれ，さらに(5)を満すとき最小被覆と呼ばれる。

$$\textstyle\sum_{j \in C} \widetilde{a}_j \lneqq \widetilde{a}_0 \cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\textstyle\sum_{j \in C} \widetilde{a}_j - \widetilde{a}_k \leqq \widetilde{a}_0 \quad \forall k \in C \cdots\cdots\cdots(5)$$

T⊂Nに関し，$j \in N \setminus T$に対して，$x_j = 0$とおいて得られるP_Iの$t = |T|$次元部分空間をP_I^Tで示す。P_I^Tの内点をx^Tで示す。

$$\pi x^T \leqq \pi_0 \cdots\cdots\cdots(6)$$

なる不等式が(7),(8)を満す時，これをファセットと言う。(7)を満す時(6)は妥当（valid）であると言われる。

$$\pi x^T \leqq \pi_0 \quad \forall x^T \in P_I^T \cdots\cdots\cdots(7)$$

$$(\exists x^{Ti}, i = 1, 2, \cdots, t \mid x^{Ti} \in P_I^T)\,((\pi x^{Ti} = \pi_0) \wedge (x^{Ti}\text{はアフィン独立})) \cdots(8)$$

P_Iの次元は(3)の仮定があるのでnである。Padberg[(8)]はP_I^Tのファセットを1次元づつ持ち上げて，P_Iのファセットを作る一般的手順を与えた。これは0-1 KPおよびVPにおける逐次持ち上げ（sequencial lift）の一般化である。m＝1の場合には同時持ち上げ（simultaneous lift）が必要であることを考えると，Padbergの手順が，(6)を持ち上げて得られる，P_Iのすべてのファセットを生成するとは考え難い。今後の課題である。

m = 1の場合には，正準（canonical）なファセット（例えば(2)を見よ）のすべてが特徴づけられている。そこで用いられた概念を P_I の場合に拡張することによって，P_I の新しいファセットを得ることができる。

最小被覆Cに対し，E(C)を次のように定義し，これをCの拡大と呼ぶ

$$E(C)=C\cup\{j\in N\setminus C \quad | \quad \tilde{a}_j \geqq \tilde{a}_i \qquad {}^\forall i\in C\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

Cは，次式が成立するとき支持的（supporting）であると言われる。

$$({}^\forall j\in E(C)\setminus C)\,({}^\exists i_1,i_2\in C)\,(\textstyle\sum_{k\in C\setminus\{i_1,i_2\}}\tilde{a}_k \leqq \tilde{a}_0-\tilde{a}_j) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

[定理2.1] Cが支持的最小被覆であれば，

$$\textstyle\sum_{j\in E(C)} x_j^{E(C)} \leqq |C|-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

は $P_I^{E(C)}$ のファセットである。

[証明] 拡大の定義から，E(C)の要素数|C|の任意の部分集合は被覆である(注)。従って(11)は妥当である。$x^{E(C)i}$, i = 1, 2, …, |C|を

$$x_j^{E(C)i}=1 \quad \text{for } j\in E(C),\ j\neq i\ ; \quad x_j^{E(C)i}=0 \quad \text{otherwise}$$

とし，$x_j^{E(C)i}$, i = |C|+1,…, |E(C)|を

$$x_j^{E(C)i}=1 \quad \text{for} \quad j=i \quad \text{or} \quad j\in C\setminus\{i_1,i_2 \text{ in } (10)\}$$

$$x_j^{E(C)i}=0 \quad \text{otherwise}$$

とすれば，$x^{E(C)i}$ は(11)を等号で満してしかも互にアフィン独立であり，かつ $P_I^{E(C)}$ の内点である。

最小被覆Cが強（strong）であるとは，

$$({}^\forall j\in N\setminus E(C))\,({}^\exists i\in C)\,(\textstyle\sum_{k\in C\setminus\{i\}}\tilde{a}_k \leqq \tilde{a}_0-\tilde{a}_j) \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

が成立することである。(12)は上の証明における $x^{E(C)i}$ と独立で，(11)を等号で満す P_I 内の点をn－|E(C)|個作れることを保証する。しかも，(11)は P_I に対しても明らかに妥当である。従って次の定理を得る。

[定理2.2] Cが強かつ支持的最小被覆であれば，(11)は P_I のファセットである。

（注）このことが成立する範囲内であれば，拡大の定義(9)をゆるめても，定理2.1，2.2は成立する。

3．最小被覆が作る超グラフ

$\mathcal{C}$ を2の(2)のすべての最小被覆の集合とする。

$$\mathcal{C} = \{\mathrm{C} \subset \mathrm{N} \mid \mathrm{C}\text{は2の(4),(5)を満す}\} \cdots\cdots(1)$$

$\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \{\mathrm{I} \subset \mathrm{N} \mid \mathrm{I} \subsetneqq \mathrm{C} \in \mathcal{C}\} \cdots\cdots(2)$$

と定義する。$\mathrm{I} \in \mathcal{I}$ の真部分集合はまた，すべて $\mathcal{I}$ に属する。従って，対$(\mathrm{N}, \mathcal{I})$は独立系(independence system)であり，$\mathcal{C}$ はこの系のサーキット(circuit)の族である。この事は Padberg[8] によっても指摘されているが，本報告での検討を Nemhauser and Trotter[6] の成果に結びつけると言う意味で重要である。

対 $\mathrm{G} = (\mathrm{N}, \mathcal{C})$ は頂点 (vertex) 集合N，辺 (edge) 集合 $\mathcal{C}$ より成る超グラフを定義する。Aをこのグラフの辺—節点接続行列とする。Aの各行は各々，最小被覆を表現する。第i行の最小被覆を C_i とするとき，$a_{0i} = |\mathrm{C}_i| - 1$ とする。a_0 を第i要素が a_{0i} である $m_{\mathrm{G}} = |\mathcal{C}|$ 次元列ベクトルとする。通常のグラフでは $a_{0i} = 1$ であることに注意して，VPの超グラフへの一般化を考える。次式で定義する $\mathrm{P_G}$ はこの一般化したVPの制約多面体の凸包と考えられる。

$$\mathrm{P_G}(\mathrm{A}, a_0) = conv.\{x \in \mathrm{R}^n \mid \mathrm{A}x \leqq a_0,\ x_j = 0 \text{ or } 1\ {}^\forall j \in \mathrm{N}\} \cdots(3)$$

［定理3.1］$\mathrm{P_I}(\widetilde{\mathrm{A}}, \widetilde{a}_0) = \mathrm{P_G}(\mathrm{A}, a_0)$

［証明］接続行列Aおよび a_0 の定義から，$\mathrm{P_I}$ の各点が $\mathrm{P_G}$ に含まれることは明らかである。以下に $\mathrm{P_G}$ の各点が $\mathrm{P_I}$ に含まれることを示す。ある $x \in \mathrm{P_G}$ が $\mathrm{P_I}$ に含まれないとする。この x の要素で値1のものの添字の集合をKとする。

$$\textstyle\sum_{j \in \mathrm{K}} \widetilde{a}_j \lneqq \widetilde{a}_0 \cdots\cdots(4)$$

が成立する。$x \in \mathrm{P_G}$ なのでKは最小被覆ではあり得ない。従って(5)を満すkを少くとも1つ含んでいる。

$$\sum_{j\in K}\tilde{a}_j-\tilde{a}_k \lneqq \tilde{a}_0 \qquad k\in K \quad\cdots\cdots(5)$$

そこでKからkを除いたものを新しいKとする。この操作を(5)を満すkが存在しなくなるまで繰返す。2.の(3)の仮定から，この操作は$|K|\geqq 2$で必ず終了し，その時点でKは最小被覆である。これは$x\in P_G$に矛盾する。背理法により，$x\in P_I$でなければならない。

対(A, a_0)が対$(\tilde{A}, \tilde{a}_0)$の集合の部分集合の要素であることに注目する。P_Gに対しても有効である。しかし，P_Gでは最小被覆がAのどれかの行に一致することが明らかであり，この行は他の列には1の要素を持たないから，2の(9)で定義された拡大$E(C)=C$が常に成立する。従って定理2.2は，これをP_Gに適用するとき，Aのある行Cに対応する式

$$\sum_{j\in C} x_j \leqq |C|-1$$

がP_Gのファセットとなるための十分条件2.の(12)を与える。しかし，こうして得ることのできるファセットは，定理を直接P_Iに適用して得るファセットの一部である。つまり，あるCに対して

$$(^\forall j\in N\setminus C)(^\exists i\in C)\left(\sum_{k\in C\setminus\{i\}} a_k \leqq a_0-a_j\right)$$

とする。これは$C\setminus\{i\}\cup\{j\}$が最小被覆を含まないことを示すから，

$$\sum_{k\in C\setminus\{i\}}\tilde{a}_k \leqq \tilde{a}_0-\tilde{a}_j$$

である。従って，定理をP_Gに適用したとき，あるCが2の(12)を満すなら，P_Iに適用したときにも同式を満すことになる。

Gにおいて，$|C|=q$なる辺の任意の集合を$\mathcal{C}(q)$で表わす。$Q=\cup\{C \mid C\in\mathcal{C}(q)\}$とする。Gの部分グラフ$G'=(Q, \mathcal{C}(q))$は，$|\mathcal{C}(q)|=\binom{|Q|}{q}$であるとき，完全部分グラフであると言われる。各最小被覆はそれ自身完全部分グラフである。

Gの完全部分グラフG'は，それを含むより大きい完全部分グラフが存在しないとき，クリーク (clique) と呼ばれる。

互に異るp個の辺の集合$\mathcal{C}_{(p)}=\{C_1, C_2, \cdots, C_p\}$を考える。このとき，(6),

(7)が成立すれば $C_{|p|}$ は閉路（cycle）と言われる。

$$Q_i^+ = C_i \cap C_{i+1} \neq \phi \quad i = 1, 2, \cdots, p-1$$

$$Q_i^- = C_{i-1} \cap C_i \neq \phi \quad i = 2, 3, \cdots, p \quad \cdots\cdots (6)$$

$$Q_1^- = Q_p^+ = C_1 \cap C_p \neq \phi$$

$$C_i = Q_i^+ \cup Q_i^- \quad i = 1, 2, \cdots, p \quad \cdots\cdots (7)$$

閉路 $C_{|p|}$ は p が奇数であるとき奇閉路と言われる。また，$P = \cup_{i=1}^{p} C_i$ とするとき，

$$C \not\subseteq P \quad {}^{\forall}C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{|p|} \quad \cdots\cdots (8)$$

であるとき，無弦である（chordless）と言われる。

4．クリークから構成するファセット

［定理 4,1］ $G' = (Q, \mathcal{C}(q))$ を G のあるクリークとする。

$$\textstyle\sum_{j \in Q} x_j^Q \leqq q-1 \quad \cdots\cdots (1)$$

は P_G^Q のファセットである。

［証明］P_G^Qの各点が(1)を満すことは，Q から任意に q 個選ぶと，それが最小被覆の１つであることから明らかである。x^{Qi} をその第 i 番目から第 $i+q-2$（$mod.\ |Q|$）番目までの要素が１で，その他が０であるようなベクトルとする。x^{Qi}，$i = 1, 2, \cdots, |Q|$ はアフィン独立であり，しかも(1)を等号で成立させる。一方，x^{Qi} は，$\mathcal{C}(q)$ に含まれる各最小被覆に対応する $Ax \leqq a_0$ の行を満たし，さらに，$\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}(q)$ に含まれる任意の最小被覆は $N \setminus Q$ に含まれる要素を少くとも１個は含んでいる。従って，$x^{Qi} \in P_G^Q$ である。

定理 4.1 は Padberg[8]の proposition と同値である。

［系 4.2］定理 4.1 で $q = \min\{|C| \mid C \in \mathcal{C}\}$ であれば(1)は P_G のファセットでもある。

［証明］(1)は明らかに妥当な不等式である。$j \in N \setminus Q$ とする。j を含む任意

の $C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}(q)$ は$|C \cap Q| < |C|-1$ か$|C \cap Q| = |C|-1$ のいずれかを満す。前者を満すものと後者を満して$|C| > q$ のものは，x_j と Q の中の任意の q－1 個の i に対する x_i が 1 である x を作れば，この x はその C に対応する $Ax \leqq a_0$ の行を満す。後者を満して$|C| = q$ のものについては，G′ がクリークであることから，Q から適切に q－1 個の要素を選んで K とすれば，$\{j\} \cup K$ が C に含まれないようにできる。従って，x^j を

$$x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad i \in \{j\} \cup K \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすれば，これは P_G の内点であり，しかも，(1)を等号で満す。各 $j \in N \setminus Q$ に対応して，x^j を定め，定理 4.1 の証明で使った x^{Qi} に $x_j = 0$ for $j \in N \setminus Q$ を追加して R^n の点にすれば，総計 n 個の互に独立な P_G 内の点を得る。これらは明らかに(1)を等号で満す。

系 4.2 によれば，$\mathcal{C}$ の中で最小位数の最小被覆は，それ自身がファセットを構成するか，それを含むクリークがファセットを構成するかのいづれかである。

Nemhauser and Trotter[(6)] の系 4.4 は任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して$|C| = q$ が成立する場合を対象にしたものであるが，これは系 4.2 の特別の場合である。普通のグラフに関する VP では常に$|C| = 2$ であって，系 4.2 が成立する。これが Padberg[(7)] の定理 2.4 の十分性に対応する。系 4.3 は 4.2 を若干拡張したものである。その証明は系 4.2 の証明とほとんど同じである。

[系 4.3] 定理 4.1 において，

$$|C \setminus Q| \geqq 2 \text{ or } |C| \geqq q \quad {}^{\forall}C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}(q) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

が成立すれば，(1)は P_G のファセットである。

定理 2.2 は P_G にも有効であることを前節で指摘した（この場合，2 の(12)の

$\widetilde{a}_j$ を a_j で置き換えれば良い)。これによって得られるファセットは上の系4.3によって得られるものと異る。2の(12)はCがそれ自身クリークであることを要請している。しかし,

$$({}^{\exists}j \in N \setminus C)\ ({}^{\exists}i \in C)\ (\textstyle\sum_{k \in C \setminus \{i\}} a_k + a_j \leqq a_0)$$

であれば, $K \subsetneq (C \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ なる最小被覆が存在し, $j \in K$ が成立しなければならないから,

$$|K \setminus C| = 1 \qquad \text{and} \qquad |K| < q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

である。

このファセットが, 定理2.2を P_I に直接適用して得られる P_G のファセットに含まれることも前節で指摘した。P_I から得られるファセットも系4.3によって得られるものとは異ることが次のようにして示される。

Cが強であるから, $Q \subset E(C)$ が存在して, Qによって生成されるGの部分グラフG′がクリークになる。$j \in E(C) \setminus Q$ とする。jとCの $|C|-1$ の要素から作った, 位数 $|C|$ の集合は拡大の定義からすべて被覆であるが, jはクリークに含まれないから少くとも1つは, 最小被覆でないものが存在する。これをKとして, 3の(5)を満すkを順次除いて行くことによって, 最小被覆K′を得ることができる。このK′に対して, (3)が成立する。しかも $E(C) \neq Q$ であっても良いのである。

5. 無弦奇閉路から構成するファセット

［定理5.1］無弦奇閉路 $C_{(p)}$ があるとき,

$$\textstyle\sum_{j \in P} x_j^P \leqq |P| - \frac{1}{2}(p+1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

は P_G^P のファセットである。

［証明］まず(2)が成立する。

$$|P| = \textstyle\sum_{i=1}^{p} |Q_i^+| = \sum_{i=1}^{p} |Q_i^-| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} |C_i| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

P_G^P は

$$\sum_{j\in P} a_j x_j^P \leqq a_0 \quad \cdots\cdots(3)$$

の凸包として定義されるが，(3)の中の $C_{(p)}$ の要素に対応する各行を辺々加えれば，

$$\text{左辺} = 2\sum_{j\in P} x_j^P$$
$$\text{右辺} = \sum_{i=1}^{p}(|C_i|-1) = 2|P|-p$$

従って，

$$\sum_{j\in P} x_j^p \leqq |P|-\frac{1}{2}p$$

しかしpが奇数で左辺が整数であることから，(1)を得る。従って，(1)は妥当である。

$x^{P\,i(t)}$，$i=1,2,\cdots,p$，$t=1,2,\cdots,|Q_i^-|$ を次のような列ベクトルとする。

$x_j = 1$　　for $j \in Q_i^- - \{Q_i^-$ の第t番目の要素$\}$
　　　　　　$j \in Q_{i+2h-1}^-$
　　　　　　$j \in Q_{i+2h}^- - \{Q_{i+2h}^-$ の最後の要素$\}$
$x_j = 0$　　otherwise

ここで，$h=1,2,\cdots,p-1$。また $i+2h$ と $i+2h-1$ は *mod.* p で計算するものとする。

$x^{P\,i(t)}$ は全部で

$$\sum_{i=1}^{p}|Q_i^-| = |P| \quad \text{個}$$

作られる。また，3の(6)，(7)から

$$C_i = Q_i^- \cup Q_{i+1}^- \quad (i=1,2,\cdots,p-1), \qquad C_p = Q_p^- \cup Q_1^-$$

であり，$x^{P\,i(t)}$ では，Q_i^-，Q_{i+2}^-，$\cdots$，Q_{i-1}^- に各々1個づつ0の要素を持つ（添字は *mod.* p)。従って，C_{i-1} だけが $x_j^{P\,i(t)}=0$ となるjを2個持ち，残りのp−1個のCはすべて，1個づつそのようなjを含んでいる。このことから $x^{P\,i(t)}$ が P_G^P の内点であることがわかる。また，$x^{P\,i(t)}$ の要素のうち0であるものの個数

は，2+(p−1) = p+1 の半分（各 0 が C_i と C_{i+1} の双方に含まれることに注意）である。従って，

$$\sum_{j\in P} x_j^{P\,i(t)} = |P| - \frac{1}{2}(p+1)$$

となり，$x^{P\,i(t)}$ は(1)を等号で満す。しかも $x^{P\,i(t)}$ は互に独立である(付録 1)。従って，$x^{P\,i(t)}$ は，2 の(8)を満す。

通常のグラフでは常に $|C_i| = 2$ であって，閉路の長さ p とその閉路上の点の個数が一致する。このことから次の系を得るが，これは VP に対して奇閉路から得るファセット[7]に一致する。

［系 5.2］定理 5.1 で $|C_i| = 2$，$i = 1, 2, \cdots, p$ であれば，

$$\sum_{j\in P} x_j^{P} \leqq \frac{1}{2}(|P|-1)$$

は P_G^P のファセットである。

Trotter[10] では系 5.2 が，より一般的な正則部分グラフ，web（くもの巣）に拡張されている。超グラフの場合にも，このような一般化が可能であろうか。これも今後の課題である。

6. まとめ

本報告では，多重制約の KP が超グラフにおける VP に等価変換できることを示し，新しいファセット構成法を 2, 3 発見すると共に，単一制約 KP と通常のグラフにおける VP に対して個別に展開された従来の研究の統合を試みた。

単一制約 KP と通常のグラフ上の VP に対する研究成果は，本報告で述べた成果に較べるとき，格段に豊富で体系的である。これまでのところ，従来の研究成果と類似の命題が本研究の対象にも成立している。本報告の接近法をさらに多角的に適用することによって，本研究の成果を一層発展させるこ

とのできる余地があるものと考える。2．で述べた同時持ち上げに関する課題はその1例である。

最後に，本研究の着想が，筆者が行っている研究会における，北海道大学経済学部嶺野幸子助手によるE. Balasの研究紹介を契機として得られたことを記し，謝意を表する。

参考文献

(1) Balas, E., "Facets of Knapsack Polytope," Math. Prog., Vol. 8, pp. 146～164(1975)

(2) Balas, E. and Zemel, E., "Facets of the Knapsack Polytope from Minimal Covers", SIAM J. Appl. Math., Vol. 34, pp. 119～148(1978)

(3) Berge, C., "Graphs and Hypergraphs," (translated by E. Minieka), North-Holland(1976)

(4) Geoffrion, A. M. and Marsten, R. E., "Integer Programming Algorithms : a Framework and State-of-the-art Survey," Manag. Sci., Vol. 18, pp. 465～491(1972)

(5) 嶺野幸子，"Knapsack Polytopeの Lifted Facet",日本オペレーションズ・リサーチ学会整数計画法部会資料（1979年1月）

(6) Nemhauser, G. L. and Trotter, L. E. Jr., "Properties of Vertex Packing and Independence System Polyhedra," Math. Prog., Vol. 6, pp. 48～61(1974)

(7) Padberg, M. W., "On the Facial Structure of Set Packing Polyhedra", Math. Prog., Vol. 5, pp. 199～215(1973)

(8) Padberg, M. W., "A Note on Zero-One Programming," Opns. Res., Vol. 23, pp. 833～837(1975)

(9) Padberg, M. W. "A Note on Zero-One Programming-II," manuscript(1977, 10)

(10) Trotter, L. E. Jr., "A Class of Facet Producing Graphs for Vertex Packing Polyhedra," Discrete Math., Vol. 12, pp. 373～388(1975)

(11) プレン，D.R. and マクミラン，C., "整数計画法入門"，培風館（1976）

付録 1

各行を $x^{Pi(t)}$ の転置で構成した行列は次の X である。

$$
\begin{array}{r}
\\
X = x^{1(t)} \\ x^{2(t)} \\ x^{3(t)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{2i(t)} \\ x^{2i+1(t)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{p-1(t)} \\ x^{p(t)}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} Q_1^- & Q_2^- & Q_3^- & \cdots & Q_{2i}^- & Q_{2i+1}^- & \cdots & Q_{p-1}^- & Q_p^- \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccc}
N & I & I_0 & \cdots & I & I_0 & \cdots & I & I_0 \\
I_0 & N & I & \cdots & I_0 & I & \cdots & I_0 & I \\
I & I_0 & N & \cdots & I & I_0 & \cdots & I & I_0 \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
I_0 & I & I_0 & \cdots & N & I & \cdots & I_0 & I \\
I & I_0 & I & \cdots & I_0 & N & \cdots & I & I_0 \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
I_0 & I & I_0 & \cdots & I & I_0 & \cdots & N & I \\
I & I_0 & I & \cdots & I_0 & I & \cdots & I_0 & N
\end{array}\right)
\end{array}
$$

N：主対角線の要素がすべて 0 で他がすべて 1 のマトリクス

I：すべての要素が 1 のマトリクス

I_0：最右の列がすべて 0 で他の要素がすべて 1 のマトリクス

① X の第 1 行目をそれ以外の各行から引くと X^1 を得る。X^1 では主対角線の両側で +1 と −1 が交互に現われるが，上側では +1 が，下側では −1 が，丁度 1 個多い事に注意する。

$$
\begin{array}{r}
\\
X^1 = x^{1(t)} \\ x^{2(t)} \\ x^{3(t)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{2i(t)} \\ x^{2i+1(t)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{p-1(t)} \\ x^{p(t)}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} Q_1^- & Q_2^- & Q_3^- & \cdots & Q_{2i}^- & Q_{2i+1}^- & \cdots & Q_{p-1}^- & Q_p^- \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccc}
\dot{E} & T & T^{\cdot} & \cdots & T & T^{\cdot} & \cdots & T & T^{\cdot} \\
H & N^- & O_I & \cdots & O_I^- & O_I & \cdots & O_I^- & O_I \\
{}_IO & O_I^- & \underset{\cdot}{V} & \cdots & O & O & \cdots & O & O \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
H & O & O & \cdots & N^- & O_I & \cdots & O_I^- & O_I \\
{}_IO & O_I^- & O_I & \cdots & O_I^- & \underset{\cdot}{V} & \cdots & O & O \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\
H & O & O & \cdots & O & O & \cdots & N^- & O_I \\
{}_IO & O_I^- & O_I & \cdots & O_I^- & O_I & \cdots & O_I^- & \underset{\cdot}{V}
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$\dot{E}$：(1.1)要素以外の第 1 行，第 1 列がすべて 1，(1.1)要素以外の主対角線がすべて−1，他の要素がすべて 0 のマトリクス

T：第 1 行がすべて 1 である他はすべて 0 のマトリクス

$T^{\cdot}$：T で第 1 行最右の要素を 0 としたもの

H：第 1 列がすべて 1，最右列がすべて−1 で他はすべて 0 のマトリクス

N^-：主対角線がすべて−1 で他が 0 のマトリクス

O：すべてが 0 のマトリクス

O_I，${}_IO$：最右列あるいは第 1 列がすべて1で他がすべて 0 のマトリクス

O_I^-：O_Iの最右列を−1 に変えたもの

$\underset{\cdot}{V}$：主対角線上が−1，最右列が 1（ただし最右最下の要素が 0）で他がすべて 0 のマトリクス

② X^1 の第1列に他のすべての列を加えると X^2 を得る。X^2 で(1, 1)要素は $|P|-\frac{1}{2}(p+1)$ である。従って，X の行列式の値は，

$$(-1)^{|Q_1^-|-1}\{|P|-\frac{1}{2}(p+1)\}\times(\text{Y の行列式の値})$$

である。行列 Y は，仕切り線で示したような周期性を持っている。

$$\begin{array}{r l}
 & \begin{array}{cccccccccc} Q_2 & Q_3^- & Q_4^- & Q_5^- & \cdots & Q_{2i}^- & Q_{2i+1}^- & \cdots & Q_{p-1}^- & Q_p^- \end{array} \\
\begin{array}{r} Y=x^{2t} \\ x^{3t} \\ x^{4t} \\ x^{5t} \\ \vdots \\ \\ \\ x^{2it} \\ x^{2i+1\,t} \\ \vdots \\ \\ \\ x^{p-1\,t} \\ x^{pt} \end{array} &
\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc|c|cc}
N^- & O_1 & O_1^- & O_1 & \cdots & O_1^- & O_1 & \cdots & O_1^- & O_1 \\
O_1^- & V & O & O & \cdots & O & O & \cdots & O & O \\
\hline
O & O & N^- & O_1 & \cdots & O_1^- & O_1 & \cdots & O_1^- & O_1 \\
O_1^- & O_1 & O_1^- & V & \cdots & O & O & \cdots & O & O \\
\hline
 & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\
 & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\
 & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\
\hline
O & O & O & O & \cdots & N^- & O_1 & \cdots & O_1^- & O_1 \\
O_1^- & O_1 & O_1^- & O_1 & \cdots & O_1^- & V & \cdots & O & O \\
\hline
 & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\
 & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\
 & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\
\hline
O & O & O & O & \cdots & O & O & \cdots & N^- & O_1 \\
O_1^- & O_1 & O_1^- & O_1 & \cdots & O_1^- & O_1 & \cdots & O_1^- & V
\end{array}\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{r l}
 & \begin{array}{cccc} Q_1^- & Q_2^- & Q_3^- & \cdots\cdots \end{array} \\
\begin{array}{r} X^2=x^{1t} \\ x^{2t} \\ x^{3t} \\ \vdots \end{array} &
\left(\begin{array}{c|ccc}
\mathring{\Lambda} & T & T^{\cdot} & \cdots \\
\hline
O_1^- & & & \\
O_1 & & Y & \\
\vdots & & &
\end{array}\right.
\end{array}$$

$\mathring{\Lambda}$ ：(1,1)要素が $|P|-\frac{1}{2}(p+1)$
他の主対角線上の要素－1
他の第1行の要素が1
他のすべての要素が0の
マトリクス

③ Y に対して，次の操作をする。

(i) Q_3^- の最後の列を Q_2^- の最後の列に加える。

(ii) $x^{3(|Q_3^-|)}$ の行を $x^{2(|Q_2^-|)}$ の行に加える。

(iii) $x^{2(|Q_2^-|)}$ の行を $x^{3(|Q_3^-|)}$ の行から引く。

(iv) $x^{4(|Q_4^-|)}$ の行を $x^{3(|Q_3^-|)}$ の行に加える。

この操作により Y は次のように変形された。

$$
Y' = \begin{array}{c|cccccccccccc}
 & Q_2^- & Q_3^- & Q_4^- & Q_5^- & \cdots & Q_{2i}^- & Q_{2i+1}^- & \cdots & Q_{p-1}^- & Q_p^- \\
\hline
x^{2(t)} & V & O_1 & O_1^- & O_1 & \cdots & O_1^- & O_1 & \cdots & O_1^- & O_1 \\
x^{3(t)} & O & V & O & O & \cdots & O & O & \cdots & O & O \\
x^{4(t)} & O & O & & & & & & & & \\
x^{5(t)} & O & O_1 & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & Y^1 & & & & \\
x^{2i(t)} & O & O & & & & & & & & \\
x^{2i+1(t)} & O & O_1 & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & \\
x^{p-1(t)} & O & O & & & & & & & & \\
x^{p(t)} & O & O_1 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Y^1：Yから$x^{2(t)}$,$x^{3(t)}$の行とQ_2^-,Q_3^-の列を除いてできる小行列

V：Vの最右・最下の要素を－1にしたもの

従って，Yの行列式の値 ＝ $(-1)^{|Q_2^-|+|Q_3^-|}$(Y^1の行列式の値)である。

④　Y^1がYと同形であることに注目し，③の操作を繰返せば，結局，

Yの行列式の値 ＝ $(-1)^{\sum_{i=2}^{p}|Q_i^-|}$

⑤　従って，Xの行列式の値 ＝ $(-1)^{\sum_{i=2}^{p}|Q_i^-|-1}\{|P|-\frac{1}{2}(p+1)\}$ であり，$x^{P_i(t)}$は互に独立でなければならない。

付録2　数値例

例1．
$$5x_1+3x_2+3x_3+3x_4+2x_5+x_6 \leqq 7$$
$$3x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5+x_6 \leqq 5$$
$$4x_1+4x_2+2x_3+4x_4+4x_5+4x_6 \leqq 10$$

この制約条件では最小被覆は次の11個である。

$C_1=\{1,2\}$，$C_2=\{1,3\}$，$C_3=\{1,4\}$，$C_4=\{1,5,6\}$

$C_5=\{2,3,4\}$, $C_6=\{2,3,5\}$, $C_7=\{2,4,5\}$, $C_8=\{2,4,6\}$, $C_9=\{2,5,6\}$
$C_{10}=\{3,4,5\}$,
$C_{11}=\{4,5,6\}$

最初の4個については$E(C)=C$である。このうち，C_1, C_2, C_3は強である。C_4は$j=2,4$について2.の(12)が成立しないので強でない。C_5, C_7, C_8については，$E(C_i)=\{1\}\cup C_i$である。C_5だけが支持的でない。しかし，他のものも強ではない。C_6, C_9については$E(C_i)=\{1,4\}\cup C_i$。C_{10}, C_{11}については$E(C_i)=\{1,2\}\cup C_i$である。しかもこれらは支持的かつ強である。定理2.2からは，従って，C_1, C_2, C_3, $E(C_6)=E(C_{10})$, $E(C_9)=E(C_{11})$がP_Gのファセットを与えることがわかる。一方，

$$A=\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
C_1 & 1 & 1 & & & & \\
C_2 & 1 & & 1 & & & \\
C_3 & 1 & & & 1 & & \\
C_4 & 1 & & & & 1 & 1 \\
C_5 & & 1 & 1 & 1 & & \\
C_6 & & 1 & 1 & & 1 & \\
C_7 & & 1 & & 1 & 1 & \\
C_8 & & 1 & & 1 & & 1 \\
C_9 & & 1 & & & 1 & 1 \\
C_{10} & & & 1 & 1 & 1 & \\
C_{11} & & & & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

であって，C_1, C_2, C_3, C_4, $\{C_5, C_6, C_7, C_{10}\}$, $\{C_7, C_8, C_9, C_{11}\}$がクリークを作る。$C_1$, C_2, C_3は系4.2を満す。残りのものは系4.3も満さない。

例2．例1でx_1, x_2の係数が各々$(3,3,3)'$, $(3,2,3)'$であるとする。この時，最小被覆は例1におけるC_5～C_{11}と次の10個である。

$\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,6\}$, $\{1,3,4\}$,
$\{1,3,5\}$, $\{1,3,6\}$, $\{1,4,5\}$, $\{1,4,6\}$, $\{1,5,6\}$

ここでC_6, C_9の拡大は$C_i\cup\{4\}$となるが，他のものについては$E(C)=C$である。
このうち強であるのは，$\{1,3,6\}$だけである。従って，定理2.2を直接P_1に適用すると

$$x_1+x_3+x_6\leqq 2$$

だけが生成される。

一方，P_Gでは，$\{1,2,3,4,5\}$, $\{1,2,4,5,6\}$, $\{1,3,6\}$ がGのクリークを生成する。

従って，系 4.2 を用いれば，さらに，

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \quad\quad\quad &\leqq 2 \\ x_1+x_2 \quad\quad +x_4+x_5+x_6 &\leqq 2 \end{aligned}$$

を得る。

例 3． $$\begin{aligned} 6x_1+4x_2+5x_3 \quad + x_5 \quad + x_7+x_8 \quad\quad &\leqq 14 \\ x_1 \quad +8x_3+6x_4+9x_5+x_6+x_7 \quad +x_9 &\leqq 21 \\ x_1+2x_2+x_3+8x_4+8x_5+9x_6+8x_7+x_8+2x_9 &\leqq 32 \\ x_2 \quad + x_4 \quad +4x_6+5x_7+4x_8+3x_9 &\leqq 15 \\ 9x_1+9x_2+3x_3+x_4+x_5+2x_6 \quad +9x_8+9x_9 &\leqq 35 \end{aligned}$$

この場合，最小被覆は次の 5 個である。

$\{1,2,3\}$，$\{3,4,5\}$，$\{4,5,6,7\}$，$\{6,7,8,9\}$，$\{8,9,1,2\}$

これは，無弦奇閉路を構成するので

$$\sum_{i=1}^{9} x_i \leqq 6$$

は P_G つまり P_I のファセットである。