多目的計画問題の解法研究の分類と検討

渡 辺 昭 夫

1. はじめに

個人や組織がある事項に関して意思決定を行うとき，複数の評価項目を同時に考慮しなければならない状況がたびたび生じる。この種の問題を解決する方法として，数理計画法の分野で，多目的計画法と呼ばれる手法が，近年提案されてきている。多目的計画法は，複数の評価項目をそれぞれ1個の目的関数と考えて，ある定められた制約条件の下で，それらの目的関数を同時に最適化する手法である。多目的計画法により解かれる問題は多目的計画問題と呼ばれ，(1) 式で定義される。[24] x はベクトルである。

$$\begin{array}{ll} \max & f_1(x) \\ & \vdots \\ \max & f_p(x) \\ \text{subj.} & x \in X \end{array} \tag{1}$$

また，多目的計画問題の最適解 x^* は，他の目的関数の値を悪化させることなしには，ある目的関数の値を改善することができない解として定義され，通常有効解と呼ばれている。解析的にみると，ベクトルでは大小関係の比較不可能な場合が存在するので，有効解は集合として与えられ，単一の解として定義することはできない。今のところ，多目的計画問題を解いて，有効解集合を直接求める解法は存在しておらず，通常有効解集合の要素をひとつ求める手法が「多目的計画法の解法」と呼ばれている。しかし，有効解集合を直接求める解法が発見されたとしても，実用的にはあまり意味がないと思われる。

つまり，現実に複数の評価項目をもつ問題を解く場合であっても，意思決

定者はひとつの解を選択しなければならず，このことは，彼にとって最良と判断される特定の有効解を選択していることと理解できる。これはまた，意思決定者が自己の効用関数（明示的に知られている必要はない）を最大化する代替案の選択を行っていると解釈できる。このような意思決定者が解かなければならない最終的な問題を効用最大化問題と呼ぶことにすると，この問題は (2) 式で表現できる。

$$\begin{aligned} &\max \quad U(f_1(x), ..., f_p(x)) \\ &\text{subj. to} \quad x \in X \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，U は $f_i\,(i=1, ..., p)$ の値に対して非減少関数，X は実行可能解の集合である。この効用最大化問題の解法は（暗黙の）効用関数の値を改善する有効解を逐次求める手法となる。この有効解を求める手法として，いわゆる「多目的計画法の解法」を利用することができる。

本稿では，複数の評価項目をもつ効用最大化問題の解法として，いわゆる「多目的計画法の解法」を利用する立場から，効用最大化問題の解法の分類を行う。以下では従来なされてきた多目的計画法の研究を整理し（2 節），効用最大化問題の解法の 分類基準を提案し，解法のメカニズムを検討する（3 節）。さらに，効用最大化問題の解法を実際に分類し，若干の検討を加える（4 節）。最後に，結論を要約する（5 節）。

2.　多目的計画法研究のアプローチ

これまでなされてきた多目的計画法の研究は，次の 3 つの研究アプローチに整理できる。第一は，多目的計画法の数学的基礎的分析の研究である。この研究アプローチでは，多目的計画問題の特徴やその解の性質などが研究されてきた。それらの研究としては，Kuhn & Tucker [18] のベクトル最大化問題の先駆的研究や，Charnes & Cooper [4]，Geoffrion [13] らによる有効解を特徴づけた研究などがある。これらの研究を基礎として，多目的計画問題と有効解とが，前節で述べたように定義されている。また，実際に多目的計画法を用いて問題を解くという観点から，目的関数および制約条件式が

すべて線形関数である，多目的線形計画法についての研究が，多目的計画法研究の中心となっていることを指摘しておく。

第二は，多目的計画問題の有効解をつくる具体的手法に関する研究である。この研究アプローチについては，Philip [23] の有効解の判定条件に関する研究，Evans & Steuer [11] による改訂シンプレックス法による有効解の生成に関する研究，Zeleny [30] や Dinkelbach & Isermann [9] による，Compromise Programming の考え方を導入した手法の分類・整理に関する研究などがある。

ところで，多目的計画問題の有効解をつくる具体的手法に注目した場合，多目的計画問題を解いて有効解集合を直接求める手法は存在せず，「多目的計画法の解法」と呼ばれているものは，有効解集合の中のある有効解を1個見つける手法にほかならない。このため，通常多目的計画問題を，有効解のひとつを最適解として与える数理計画問題におき換えて解く方法がとられている。このような数理計画問題をつくる方法を複数目的単一化方法とする。それには複数の目的関数を合成して，単一の評価関数に変換すればよい。複数目的を単一化した問題は一般に (3) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} &\max \quad h(f_1(x), \dots, f_i(x)) \\ &\text{subj. to} \quad x \epsilon X \end{aligned} \qquad (3)$$

ここで，h は複数目的関数を合成して単一評価関数に変換する関数である。

変換の関数としては，線形加重和がとられる場合が多く，これをスカラー化問題と呼び，(4) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} &\max \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(x) \\ &\text{subj.} \quad x \epsilon X \end{aligned} \qquad (4)$$

ここで，α_i $(i=1, \dots, p)$ は各目的関数に割り当てられるウェイトで，$x_i>0$ である。

また，他の変換の関数としては，目的関数の最小成分を最大化する，いわゆるマキシ・ミン問題に変換する方法がある。マキシ・ミン問題は (5) 式で

与えられる。

$$\max_{x} \min_{i} \quad (\alpha_1 f_1(x), \ldots, \alpha_p f_p(x)) \qquad (5)$$
$$\text{subj. to} \quad x \in X$$

以下では，多目的計画問題の有効解をつくる具体的手法として，スカラー化問題を用いる方法をスカラー化手法，マキシ・ミン問題を用いる方法をマキシ・ミン手法と呼ぶことにする。

第三は，前節で簡単に触れた効用最大化問題の解法に関する研究である。効用最大化問題の解法は，意思決定者の効用関数が既知の場合と未知の場合との2つで考えられる。効用関数が既知の場合，効用最大化問題 (2) は単一目的の最適化問題に還元できる。これを効用最大化問題の最適化型解法と呼ぶことにする。最適化型解法としては，複数目的を取扱う目標計画法に多くの例がある。[17] [19]　しかし，最適化型解法の利用できる場合には，初めから多目的計画問題として，取扱う必要がなかったものと考えることができる。従って，効用最大化問題として本質的なものは効用関数が未知の場合である。

効用関数が未知の場合，効用最大化問題の解法としては次の2つの方法が考えられる。ひとつは，全ての有効解を列挙して，その中から最善な有効解を選択する完全列挙型解法である。特に，多目的線形計画問題では，有効端点を全部列挙する解法がよく研究されている。[10] [11] [23]　もうひとつは，意思決定者とコンピューターとの会話形式により有効解を逐次改善してゆく逐次改善型解法であるところで多目的計画問題は大部分が連続型の変数を用いて記述される。この場合には，探索しなければならない有効解が無限集合となることから，完全列挙型解法の実行は全く不可能となる。

従って，本稿では効用最大化問題の実用的解法として，逐次改善型解法に注目することにする。

3. 逐次改善型解法の分類基準とメカニズム

効用最大化問題の実用的解法として，逐次改善型解法に注目し，その分類

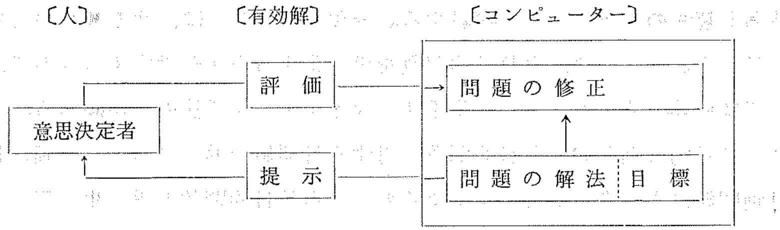
基準と解法のメカニズムを検討する。分類基準としては，次の2つのものに注目する。ひとつは，複数目的関数を単一化する方法に対応するもので，ここでは前節で述べたスカラー化手法とマキシ・ミン手法の種類がある。さらに，多目的計画問題は各目的関数に対する目標値を導入すると，等価な目標計画問題に書き換えることができるので，複数目的関数の単一化に際して，目標を用いるか用いないかによる細分類が可能である。

もうひとつは，効用最大化問題の逐次改善型解法の有効解の改善方法に注目するものである。これには，求めた有効解を利用して，新たな制約条件式をつくり，制約領域を縮小することを繰返して，最良の有効解に接近していく方法と，各目的関数に付したウェイトパラメータを変えることにより，単一の評価関数を新たに作り変えて，新しい有効解を生成する方法とがある。前者を制約領域縮小法と，後者を評価関数再構成法と呼ぶことにする。ただし，制約領域縮小法と評価関数再構成法とは，前者が制約領域を操作し，後者が評価関数を操作することからもわかるように，互いに独立した方法である。このことから，これらの基準を組合せて利用することも可能である。以上の分類基準を用いて，〔図1〕の分類図式が得られる。本稿では各タイプの解法をI型～VIII型と呼ぶことにする。

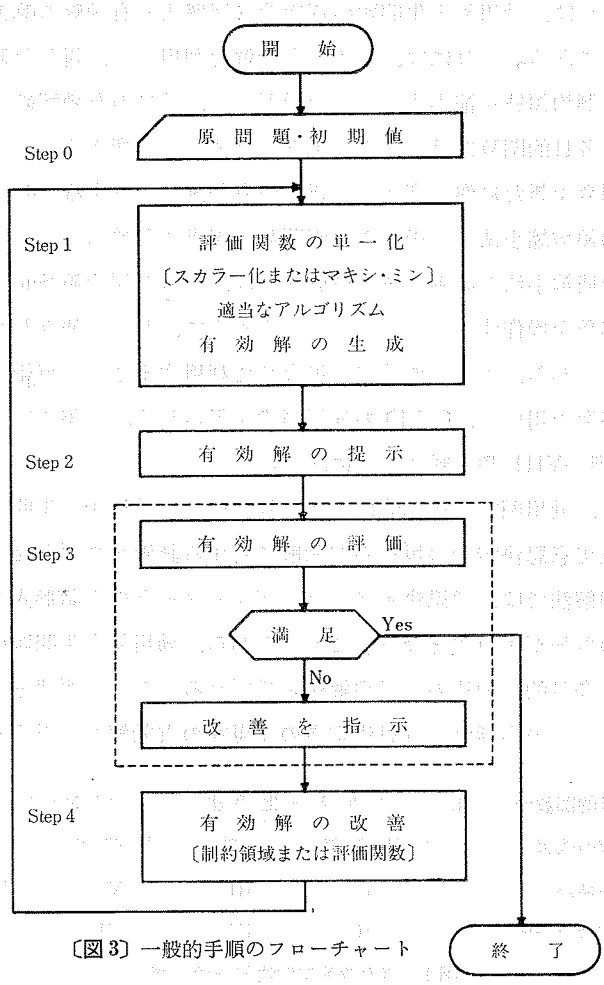
ところで，効用関数が明示的に与えられていない効用最大化問題においては，各時点で意思決定者の現在の有効解に対する評価が必要となる。従って逐次改善型解法では，意思決定者とコンピューターとの会話形式による，意思決定者の参加が不可欠となる。このことから，効用最大化問題の逐次改善型解法は，多目的計画法の会話型解法と呼ばれるものが主要部分を形成することになる。この会話は，意思決定者の「現在の有効解」に対する評価を，

目的関数の単一化 / 有効解の改善	スカラー化手法		マキシ・ミン手法	
	目標無	目標有	目標無	目標有
制約領域縮小法	I	III	V	VII
評価関数再構成法	II	IV	VI	VIII

〔図1〕逐次改善型解法の分類，図式



〔図2〕逐次改善型解法のメカニズム



〔図3〕一般的手順のフローチャート

コンピューターがある形式に従って受取り，問題を修正するメカニズムと，コンピューターが問題を解き，得られた有効解をある形式に従って意思決定者に提示するメカニズムからなると考えることができる。これらのメカニズムは〔図 2〕で示される。前段で述べた分類基準に対応させて考えれば，問題修正のメカニズムは有効解を改善する方法に，問題解法のメカニズムは複数目的関数を単一化する方法に，それぞれ対応づけることができる。

これらの分類基準とメカニズムに従って，効用最大化問題の逐次改善型解法の一般的な手順を〔図 3〕のフローチャートに従って示す。

ステップ 0　多目的計画問題で定義された原問題と，必要ならば，初期パラメータや目標値などをコンピューターに入力する。

ステップ 1 (問題解法メカニズム)　コンピューターが初めに評価関数を単一化し，次に適当なアルゴリズムを解き，有効解を生成する。このとき，アルゴリズムの中には，目標値を補助的に利用するものがある。

ステップ 2 (有効解の提示)　コンピューターが意思決定者に有効解そのものまたは有効解を用いて計算された各目的関数の値を提示する。

ステップ 3 (有効解の評価)　意思決定者が，コンピューターから提示された有効解を評価して，満足ならば終了を満足でなければ有効解の改善をコンピューターに指示する。

ステップ 4 (問題修正メカニズム)　意思決定者の評価に従って有効解を改善するため，コンピューターが新しい制約条件式や新しい評価関数のパラメーターを生成する。その結果，ステップ 1 へ戻る。

4.　既存の逐次改善型解法の研究の分類と検討

従来研究されてきた効用最大化問題の逐次改善型解法は，〔図 4〕のように整理できる。

I 型解法としては，Benayoun & Tergny [2] の POP (Progressive Orientation Procedure) がある。これは，初めに p 個の部分問題（所与の制約条件の下で 1 個の目的関数のみを最適化する問題）を解き，ペイオフ表を構成

型	単一化方法	改善方法	目　標	解　　　　法
I	スカラー化	制約領域	無	(2)
II	スカラー化	評価関数	無	(1) (6) (7) (8) (14) (15) (16) (25) (26) (27) (28) (29) (31)
III	スカラー化	制約領域	有	(21)
IV	スカラー化	評価関数	有	(5) (20) (22)
V	マキシ・ミン	制約領域	無	
VI	マキシ・ミン	評価関数	無	
VII	マキシ・ミン	制約領域	有	(3) (12)
VIII	マキシ・ミン	評価関数	有	

〔図4〕 逐次改善型解法の分類

して，意思決定者に提示する。意思決定者は p 個の有効解を評価し，興味ある有効解をいくつか指定する。問題修正メカニズムではそれらに基づき制約条件式を追加し，新たに評価関数を生成する。続いて，問題解法メカニズムで新しい部分問題を解き，提示を行う。以下，同様の手順により，最も望ましい有効解が得られるまで繰返す。

II 型解法については，従来からよく研究されてきており，多くの解法が提案され，応用されてきている。例えば，Belenson & Kapur [1] の解法は，初めに p 個の部分問題を解き，p 個の有効解を提示する。p 個の有効解を評価して，全ての目的関数に対して，満足できる値を与える有効解がなければ，問題修正メカニズムに入る。ここでは，ゲーム解を用いて，新しいウェイト・ベクトルを生成する。そこで，問題解法メカニズムにすすみ，新しい部分問題を構成して，新しい有効解を得る。以下同様の手順を繰返す。また，Zionts & Wallenius [31] の解法は，初めに任意にウェイトを定めて，有効解をひとつ得る。次に隣接する有効解へすすむ方向をすべて提示し，意思決定者がそれらに評価を下して，新しいウェイトを生成して，新しい有効解を得るものである。さらに，Steuer [25], [26], [27] の解法は，初めに 2p+1 個の部分問題を解き，2p+1 個の有効解を意思決定者に提示して，その評価を得る。最も望ましいとされた有効解に対して，区間基準ウェイト

(Interval Criterion Weights) を用いて，p+1 個の部分問題を生成する。この際，評価関数は選択された有効解を与えた評価関数を基にして構成される。以下同様の手順を繰返す。この解法の応用例としては [28], [29] がある。その他の解法には，有効解の提示に際して各目的関数の値ではなく増分を与え，意思決定者がその増分に対して評価を行うことにより，ウェイトを変更する，Haimes & Hall [15] の SWT (Surrogate Worth Trade off) がある。また，Geoffrion, Dyer & Feinberg [14] は，初めに意思決定者が初期解を1個選択し，得られた値によりウェイトを定める。次に，そのウェイトを基にして Frank & Wolfe のアルゴリズムを適用して新しい解を得る。以下これを繰返すことにより，望ましい解を求める解法を提案した。この解法について，Dyer は [6], [7], [8] でいくつかの検討を加えている。Hemming [16] は Frank & Wolfe のアルゴリズムのかわりに Nelder & Mead（例えば，[24] 1章を見よ）のアルゴリズムを用いる BPR (Boundary Point Ranking) を提案している。ところで，逐次改善型解法ではないが，多目的線形計画法の有効端点を全部列挙する解法は，前節の一般的手順に従えば，問題修正メカニズムと評価を自動化した解法と考えることができる。

III 型解法としては，Nijkamp & Spronk [21] の解法がある。この解法は，p 個の部分問題を解き，各目的関数の最良値と最悪値をリストにした可能性行列 (Potency Matrix) を意思決定者に，提示し評価として許容できる値を与えさせる。目標計画法のアルゴリズムを用いて解を得て，可能性行列を提示する。意思決定者は，その解を受け容れて終了するか，または目標の変更を指示するかする。目標の変更が指示されたならば，前の手順を繰り返すものである。また，複数目的を取扱う目標計画法は，問題修正メカニズムと評価の部分が省略された解法であると考えられる。本稿では，目標計画法において目標値を導入する操作は新たに制約条件式を追加することに対応すると解釈している。

IV 型解法については，前に述べた Geoffrion, Dyer & Feinberg の解法に，片側目標計画法の定式化を導入した Dyer [5] の解法，目標計画法の絶

対順数を変更する Price [22] の解法がある。なお，Nijkamp & Spronk の解説によれば，不満足な値を与える目的関数に対応するウェイトを増加する Monarch, Weber & Duckstein [20] の解法もこのタイプに属すると思われる。

V 型，VI 型の解法について提案されたものは見出されなかった。

VII 型解法としては，Benayoun, de Montgolfier & Tergny [3] の STEM がある。これは，初めに p 個の部分問題を解き，これからウェイトを構成することにより理想解を生成して，マキシ・ミン問題をつくり，それを解いて最初の有効解をつくる。次に，有効解から与えられる各評価値を意思決定者に提示し，全ての値に対して満足または不満足ならば終了を，そうでなければ，不満足な値の改善を指示する。後者の場合，新たな制約条件式の追加とそれに付随するウェイトの変更により問題が修正される。新しい問題に対して，同様の手順を繰返す。また，STEM と目標計画法を結合したと言われる (Nijkamp & Spronk による) Fichefet [12] の GPSTEM はこのタイプに属すると考えてよいように思われる。

VIII 型解法については，特に該当するものが見出されなかった。

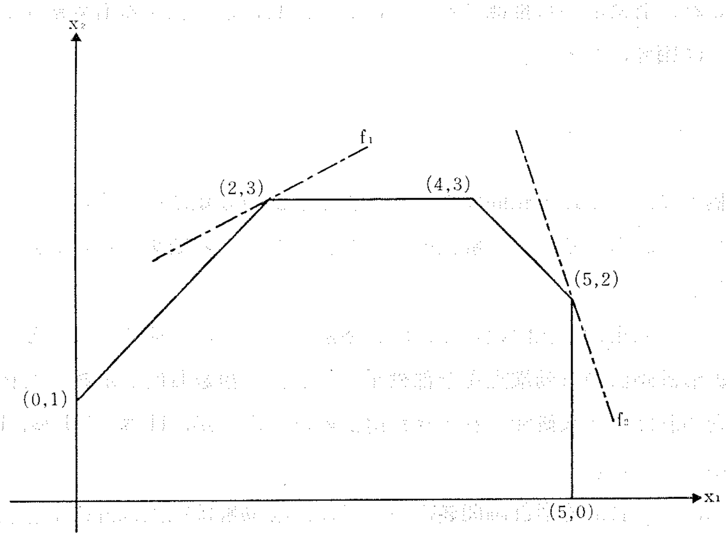
ところで，一般的な多目的計画問題では，複数の目的関数の線形加重和をとって，単一の評価関数をつくり，非線形計画法のアルゴリズムを用いて，問題を解くのはひじょうに有効な方法であると言える。しかし，多目的線形計画問題で上の方法を用いる場合には，状況はかなり違ったものになる。つまり，通常の線形計画法で考えるように，最適解が実行可能な端点解である場合，このような解は確かに多目的線形計画問題のひとつの有効解である。しかし，この解が効用最大化問題の最適解になるという保証は全くない。つまり，意思決定者の効用関数を真に最大化する有効解は，有効解の集合と有効端点解の集合の大きさを比較すれば，有効解の集合がつくる超平面上に存在する場合が，ほとんどであるということが予想できるからである。その結果，意思決定者の効用関数が線形関数であれば問題は生じないが，そうでない場合には，効用最大化問題の逐次改善型解法として，有効端点を列挙する

タイプの II 型解法 (例えば, [1], [25], [31] など) を利用したときには, 意思決定者の効用関数を真に最大化する有効解はほとんど得られないであろうと思われる。

この点について, 次の数値例を検討してみよう。

$$\begin{aligned} &\max \quad f_1(x) = -x_1 + 2x_2 \\ &\max \quad f_2(x) = 3x_1 + x_2 \\ &\text{subj. to} \quad -x_1 + x_2 \leqq 1 \\ &\qquad\qquad x_1 + x_2 \leqq 7 \\ &\qquad\qquad 0 \leqq x_1 \leqq 5 \\ &\qquad\qquad 0 \leqq x_2 \leqq 3 \end{aligned}$$

初めに, 目的関数にウェイト (1, 0) と (0, 1) を割り当てて解くと, $f_1(x)$ の最適解は (2, 3), $f_2(x)$ の最適解は (5, 2) となる。また, 制約領域は〔図 5〕で示されるものである。そこで, この例題の有効端点解を全部列挙するため, (0.8, 0.2), (0.75, 0.25), (0.5, 0.5), (0.4, 0.6), (0.3, 0.7) の 5 通りのウェイトを考える。そのときの評価関数と最適解および各目的関数値は〔図 6〕



〔図 5〕 例 題 の 制 約 領 域

ウェイト	評価関数	最適解	f_1	f_2
0.8, 0.2	$-0.2x_1+1.8x_2$	(2,3)	4	9
0.75, 0.25	$1.75x_1$	(2,3)−(4,3)	−	−
0.5, 0.5	$1.0x_1+1.5x_2$	(4,3)	2	15
0.4, 0.6	x_1+x_2	(4.3)−(5,2)	−	−
0.3, 0.7	$1.8x_1+1.3x_2$	(5,2)	−1	17

〔図6〕

で与えられる。

この例は，有効端点を列挙するタイプのII型解法が与える有効解が，それぞれの目的関数に与えられたウェイトと制約領域の境界面の傾きに従って決定されていることを示す。しかし，(0.75, 0.25)や(0.4, 0.6)のようなウェイトの場合，コンピューターは意思決定者に有益な情報を与えない。つまり，意思決定者がこの例で，例えば $f_1(x)=3$, $f_2(x)=12$ を得たいとしても，この解法は真なる最適解(3,3)を提示できないことがわかる。この例題の場合，〔図5〕を見れば何とかなる。しかし，多変数の場合には，意思決定者が提示された有効解から推測することにより，真に最大化する有効解を見つけることは困難になろう。

5. おわりに

本稿では，効用最大化問題の逐次改善型解法の分類基準とそのメカニズムを示し，それらに基づいて解法の分類を行った。その結果，次の3点が指摘できる。

第一は，効用最大化問題の逐次改善型解法としては未完成ではあるが，多目的線形計画法の有効端点を全部列挙する解法と複数目的を取扱う目標計画法も含めれば，従来研究されてきた解法のほとんどが，II型，III型，IV型に集中している。

第二は，多目的線形計画問題においては，有効解は端点以外にも存在しており，そちらの方がはるかに多いということを考慮すれば，II型解法のうち

有効端点を列挙するタイプの解法は意思決定者の効用関数を真に最大化する有効解を与えないという欠点をもつ。

第三は，少なくとも効用最大化問題の逐次改善型解法に関する限り，I 型解法とマキシ・ミン手法を用いる V～VIII 型解法に対しては，ほとんど検討がなされていない。しかも，これらの解法が，II 型，III 型，IV 型の各解法と比較して劣っているということが明らかになっているわけでもなく，第二で指摘した欠点を除くことができるという長所をもっている。特に，マキシ・ミン手法による解法とスカラー化手法による解法との得失の比較が不十分だと思われる。これらの解法が上述の第二の欠点を除去できるということだけを考えても，今後，検討を行う十分な価値があると思われる。

参考文献

〔1〕 Belenson, S. M. and Kapur, K. C., "An Algorithm for Solving Multicriterion Linear Programming Problems with Example," *Operational Research Quarterly*, 24 (1), 1973, pp. 65-77.

〔2〕 Benayoun, R., Tergny, J. and Keuneman, D., "Mathematical Programming with Multi-Objective Functions: A Solution by P. O. P. (Progressive Orientation Procedure)," *Revue METRA* 9 (2), 1970, pp. 279-299.

〔3〕 Benayoun, R., de Montgolfier, J., Tergny, J. and Laritchev, O. "Linear Programming with Multiple Objective Functions: Step Method (STEM)," *Mathematical Programming* 1 (3), 1971, pp. 366-375.

〔4〕 Charnes, A. and Cooper, W. W., "Management Models and Industrial Applications of Linear Programming", Vol. 1, Wiley, 1961.

〔5〕 Dyer, J. S., "Interactive Goal Programming," *Management Science*, 19 (1), 1972, pp. 62-70.

〔6〕 Dyer, J. S., "A Time-Sharing Computer Program for the Solution of the Multiple Criteria Problem," *Management Science* 19 (12), 1973, pp. 1379-1383.

〔7〕 Dyer, J. S., "The Effects of Errors in the Estimation of Gradient on the Frank-Wolfe Algorithm, with Implications for Interactive Programming," *Operations Reseach*, 22 (1), 1973, pp. 160-174.

〔8〕 Dyer, J. S., "An Empirical Invetigation of a Man Machine Interactive Approach to the Solution of the Multiple Criteria Problem," in *Multiple Criteria Decision Making*, Cochrane, J. L. and Zeleny, M. (eds.), Univ. of

South Carolina Press, 1973, pp. 202–216.
〔9〕 Dinkelbach, W. and Isermann, H., "On Decision Making under Multiple Criteria and under Incomplete Information," in *Multiple Criteria Decision Making*, Cochrane, J. L. and Zeleny, M. (eds.), Univ. of South Carolina Press, 1973, pp. 302–312.
〔10〕 Ecker, J. G. and Konda, I. A., "Finding All Efficient Extreme Points for Multiple Objective Linear Programs," *Mathematical Programming*, 14, 1978, pp. 249–261.
〔11〕 Evans, J. P. and Steuer, R. E., "A Revised Simplex Method for Linear Multiple Objective Programs," *Mathematical Programming*, 5, 1973, pp. 54–72.
〔12〕 Fichefet, J., "GPSTEM: An Interactive Multi-Objective Optimization Method," in *Progress in Operations Research*, Vol. 1, Prékopa, A. (ed.), North Holland, 1976, pp. 317–332.
〔13〕 Geoffrion, A. M., "Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization," *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 22, 1968, pp. 618–630.
〔14〕 Geoffrion, A. M., Dyer, J. S. and Feinberg, A., "An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization, with An Application to the Operation of An Academic Department," *Management Science*, 19 (4), 1972, pp. 357–368.
〔15〕 Haimes, Y. Y. and Hall, W. A., "W. A., "Multiobjectives in Water Resource Systems Analysis; The Surrogate Worth Trade Off Method," *Water Resources Research*, 10 (4), 1974, pp. 615–624.
〔16〕 Hemming, T., "New Method for Interactive Multiobjective Optimization: A Boundary Point Ranking Method," in *Multiple Criteria Decision Making*, Thiriez, H. and Zionts, S. (eds.), Springer, 1975, pp. 333–340.
〔17〕 井尻雄士, "計数管理の基礎", 岩波, 1970.
〔18〕 Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., "Nonlinear Programming," in *Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Neyman, J. (ed.), Univ. of California Press, 1951, pp. 481–192.
〔19〕 Lee, S. M., "Goal Programming for Decision Analysis", Auerbach, 1972.
〔20〕 Monarchi, D. E., Weber, J. E. and Duckstein, L., "An Interactive Multiple Objective Decision-Making Aid Using Non-Linear Goal Programming," in *Multiple Criteria Decision-Making* Zeleny, M. (ed.), Springer, 1976, pp. 235–253.
〔21〕 Nijkamp, P. and Spronk, J., "Interactive Multiple Criteria Programming: An Evaluation and Some Results," in *Third conference on Multiple Criteria*

Decision Making-Theory and Application, 1979.

〔22〕Price, W. L., "An Interactive Objective Function Generator for Goal Programming," in *Multiple Criteria Decision Making*, Thiriez, H. and Zionts, S. (eds.), Springer, 1975, pp. 147–158.

〔23〕Philip, J., "Algorithms for the Vector Maximization Problem," *Mathematical Progrmming*, 2, 1972, pp. 207–229.

〔24〕志水清孝, "システム最適化理論", 4章, コロナ社, 1976.

〔25〕Steuer, R. E., "A Five Phase Procedure for Implementing a Vector-Maximum Aigorithm for Multiple Objective Linear Programming Problems," in *Multiple Criteria Decision Making*, Thiriez, H. and Zionts, S. (eds.), Springer, 1975, pp. 159–169.

〔26〕Steuer, R. E., "Multiple Objective Linear Programming with Interval Criterion Weights," *Management Science*, 23 (3), 1976 pp. 305–316.

〔27〕Steuer, R. E., "An Interactive Multiple Objective Linear Programming Procedure," in *Multiple Criteria Decision Making*, Starr, M. K. and Zeleny, M. (eds.), 1977, pp. 225–239.

〔28〕Steuer, R. E. and Schuler, A. T., "An Interactive Multiple-Objective Linear Programming Approach to a Problem in Forest Management," *Operations Reseach*, 26 (2), 1978, pp. 254–269.

〔29〕Steuer, R. E. and Wallace, Jr., "A Linear Multiple Objective Programming Model for Manpower Selection and Allocation Decisions," in *TIMS Studies in Manangement Science 8*, North-Holland, 1978, pp. 193–208.

〔30〕Zeleny, M., "Compromise Programming," in *Multi Criteria Decision Making*, Cochrane, J. L. and Zeleny, M. (eds.), Univ. of South Carolina Press, 1973, pp. 262–301.

〔31〕Zionts, S. and Wallenius, Wallenius, J., "An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem," *Management Science*, 22 (6), 1976, pp. 652–663.

注) (12), (20) は Nijkamp, P. and Spronk, J. (21) より転載した。